ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS III,

QUI

OPTICAM, PERSPECTIVAM, CATOPTRICAM, DIOPTRICAM, SPHÆRICA ET TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM ATQUE ASTRONOMIAM TAM SPHÆRICAM, QUAM THEORICAM COMPLECTITUR.

AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARIO REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ PROFESSORE PRIMARIO IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORE PETROPOLITANO HONORARIO, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRO.

EDITIO NOVA

PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

CUM PRIVILEGIO SACRÆ CÆSAREÆ MAJEST. ET POLONIARUM REGIS ET SAXONIÆ ELECTORIS.

HALÆ MAGDEBURGICÆ, A. MDCCXXXV.

PROSTAT IN OFFICINA RENGERIANA.

PRÆFATIO.

Quem nobis in conſcribendis hiſce Matheſeos Elementis propoſuimus finem, eundem ut in hoc Tertio quoque eorundem Tomo conſequeremur, operam dedimus. Quamobrem non minus in ſingulis Opticæ partibus, quam in Trigonometria Sphærica & Aſtronomia ea adjecimus, quæ adhuc jure deſiderari poſſe videbantur, ut ſatis inſtructus accedas ad alios quoscunque Autores legendos, vel etiam ad theſauros ſcientiæ propriis inventis ditandos, ſiquidem id ferant vires, ſi ferat otium, ſi volupe fuerit. Hinc utique factum, ut in molem majorem excreverit hic Tomus ceteris & quarta ſui propemodum parte ſuperet partem Tomi ſecundi priorem editionis primæ, quæ in eodem continetur. Prolixum nimis foret indicare ſingula,

quæ acceſſere: ſuffecerit itaque ſpeciminis loco quædam commemoraſſe. In Optica theoriam colorum Newtonianam exhibuimus auctiorem, ne deſiderentur ea, quæ extra dubitationem eandem ponunt, & principia de viſione magnitudinis ac immiſſione luminis uberiora. Ita præter alia Catoptricæ adjecimus caput integrum quintum, de Catoptrica analytica, & Dioptricæ novum, de perſpicillis & Dioptrica analytica; tum etiam in hac teleſcopium catadioptricum Newtonianum una cum mechanico Hadleji apparatu uberius explicavimus, propterea quod ejusdem uſus in obſervatoriis Aſtronomicis hodie invaleſcat. In Trigonometria Sphærica adjecimus varia ad ſolutionem problematis de angulis ex tribus lateribus datis inveniendis. Maxima vero incrementa acceſſere Aſtronomiæ, præſertim parti ejusdem theoricæ, tum quod interea temporis, quo primæ editioni hæc altera ſuccedit, varia notatu digna fuere detecta, tum quod olim in iis acquieveramus, quæ Keplerus ipſe de ſua planetarum theoria tradiderat, omiſſis iis, quæ ad eam perficiendam attulere recentiores. Hiſce incrementis accenſeri debent, quæ de atmoſphæra ſolari, de maculis Veneris, de tentata obſervatione paralaxeos fixarum annua & detectis earundem aberrationibus annuis, de obſervando ſolſtitio ope gnomonis, de anomalia coæquata ex media

dia

dia directe invenienda, de nova forma Tabularum astronomicarum, de eccentricitate orbitæ ellipticæ Telluris, & planetarum primariorum una cum positione lineæ apsidum invenienda, de motu vertiginis Lunæ aliisque traduntur. Cum in editione prima eclipsium solarium calculum per parallaxes, utpote maxime usitatum tantummodo exposuissemus, hodie vero invalescat modus a Keplero excogitatus, considerandi eclipses solares tanquam eclipses Terræ a Selenitis observandas, igitur integro capite elegans hoc inventum explicare voluimus. Nulli igitur dubitamus fore, ut hisce subsidiis instructus opera quæcunque optica & astronomica citra ullam difficultatem perlustret, ac si qua occurrant a nobis non tradita, ea cum nostris, adeoque primis Matheseos principiis connectat. Hunc enim fructum sperare debet, qui nostra Matheseos elementa familiaria experitur, ut, quæcunque jam reperta sunt, vel in posterum reperientur, ea singula citra ullum circuli metum, servato ubique rigore demonstrandi, cum primis Matheseos notionibus connectat: id quod num fieri possit, si cui defuerit Systema, in quo omnium disciplinarum veritates palmariæ inter se connectuntur, illorum esto judicium, qui methodi vires intimius perspexere. Jam porro nemo non novit, quæcunque in Opticis atque Astronomia tra-

duntur, ad naturæ cognitionem mathematicam ejusque usum in vita humana pertinere. Qui vero scientiam propius adspiciunt, ultro fatebuntur, cognitionis mathematicæ primam ideam ex Opticis atque Astronomia derivari, per Aerometriam & Hydrostaticam ampliandam, per Mechanicam vero ulterius perficiendam. Quamobrem qui in scientia rerum naturalium eo usque progredi voluerit, ut cognitionem mathematicam eidem jungat, & hujus auxilio subinde utatur in causarum investigatione, ei suademus, ut ad modum quo Geometria ex Arithmetica, tum etiam Algebra, in Opticis disciplinis ad observationes communes, in Astronomia tam ad communes, quam astronomicas applicatur majorem attentionem afferat, quam qua utuntur illi, quibus tantummodo animus est res solas cognoscendi. Ita enim futurum confidimus, ne cognitionem naturæ mathematicam promoturus in quacunque hypothesi, quam tanquam possibilem sumit, analysin mathematicam exerceat, parum sollicitus num ea sit hypothesis naturæ, quam supponit, an vero ab ea aliena, & utrum aliena citra erroris assignabilis metum veræ substitui possit nec ne. Immo non minus futurum pro explorato habeo atque comperto, ne scientia Physica cum naturæ cognitione mathematica confundatur & illius cultura prorsus negligatur, cum tamen longe plurimi sint

usus,

usus, quos illa promittit, ab hac vero non sine temeritate expectaremus. In parte theorica Astronomiæ, si methodum spectes, singulare quid occurrit. Hæc enim ex parte conjecturalis est, atque liquido monstrat, quomodo conjecturæ levissimæ initio satisfacere debeant, ne desit meditandis materia ulterius progressuris, mox collatis viribus continuo emendandæ, expoliendæ ac perficiendæ, donec tandem ad liquidam perveniatur veritatem. Docuimus in Horis Subsecivis (a) quomodo Astronomum imitari debeat Medicus: eodem vero modo eundem etiam imitari tenetur Physicus. Quicunque igitur eum imitari decreverit, ei lectio Elementorum Astronomiæ, præmissis ceteris disciplinis, unde principia mutuatur, imitamentum reddet facile: immo proderit, ut quæ de hoc imitamento præcepimus, plene intelligantur & vires imitandi conferet, non adeo facile alio modo acquirendas. Ceterum Scientia Optica plurima habet, quæ oblectant, ac ideo technasmata quoque varia hinc inde adjecimus, ut constaret apertius naturæ cognitionem mathematicam & prodesse, & delectare. Ipsa vero siderum scientia per se animum sciendi cupidum voluptate per-

(a) Anni 1729. Trim. brum. n. IV. p. 154. & seqq.

perfundit, quam geminari experieris, ubi ad modum, quo ex obſervationibus eruuntur dogmata, animum adverteris. Abſit vero ut tibi perſuadeas, hanc voluptatem ſolam ab Opticæ atque Aſtronomiæ tractatione ſperandam eſſe. Modo enim oſtendimus utilitates longe majores ex eadem propullulare. Equidem Geographia, Chronologia & Gnomonica adeo firmo nexu cum Aſtronomia cohærent, ut non defuerint, qui iſtarum diſciplinarum palmarias propoſitiones ipſi Aſtronomiæ inſeruerint: non tamen fieri potuit, ut has ipſas diſciplinas cum Aſtronomia eidem Tomo inſererentur, propterea quod Tomus tertius jam in molem majorem ceteris excrevit, Tomo autem quarto non ſuffeciſſet Architectura civilis & militaris cum Pyrotechnia. Aſt molis hic habendam eſſe rationem haud facile quisquam inficiabitur. Cum Matheſi edendæ unice vacare haud quaquam liceat, ſed danda quoque opera eſt, ne operum philoſophicorum editio nimis differatur, ideo Tomus hic tertius tardius prodit, quam alias prodituros fuerat. In id tamen incumbemus, quantum quidem per nos ſtabit, ut quartus horum Elementorum Tomus minori temporis intervallo tertium excipiat, quam is ſecundum ſecutus. Dabam Marburgi Cattorum d. 13 Aprilis A. 1735.

ELEMENTA
OPTICÆ.

PRÆFATIO.

Non temere fit viſio, ſed certis legibus adſtringitur, quas violari Natura non permittit. Equidem ideo haud raro contingit, ut quædam videantur, quod non ſunt; qui tamen ſecundum apparentiam per præcipitantiam de rebus judicans in errorem incidit, fruſtra fallacias ſenſuum incuſat. Homini enim ratio data eſt, cujus lumine leges viſionis abſconditæ deteguntur. Ratione qui utuntur, ſecundum has leges de rebus pronunciant, nec tales judicant, quales a ſenſu menti exhibentur. Utinam eas conſiderarent, qui ad res naturales ſcrutandas animum appellunt! Ita enim uno ictu ex Phyſica profligarentur horrida imaginationis monſtra & commenta Philoſophorum. Operæ itaque pretium fecere Mathematici, immutabilium Naturæ legum interpretes genuini, quod

in leges viſionis ſolita induſtria inquiſiverint. Quare cum eædem in Optica explicentur, ejus ſtudio omnes gnaviter incumbere debent, quibus cognitio rerum naturalium curæ cordique exiſtit. Sunt vero etiam multa inPhyſica argumenta, quæ ſine Opticæ principiis accurate intelligi nequeunt. Quis enim de lumine, de coloribus, de diaphano, opaco, lucido, de meteoris emphaticis, iride, coronis, parheliis, paraſelenis, immo de ipſa viſionis natura certi quidpiam ſtatuet, ubi Opticæ fuerit ignarus? Quis ſiderum naturam? quis ſyſtematis mundani ſtructuram? quis Planetarum motus? quis luminarium eclipſes non invita Minerva rimabitur, niſi Optices cognitione imbutus? Ea igitur in Aſtronomia utramque paginam facit, nec ad ſcientiam iſtam accedere quisquam debet, niſi Optica ſalutata. Peperit etiam Optica Perſpectivam, Artis pictoriæ complementum, immo nullam habet hæc ars regulam, cujus ratio in Optica non contineatur. Unum vero eſt, quod moneam: quia veritatem puram Matheſis complectitur, opinionibus maculatam aſpernatur, a Philoſophorum hypotheſibus abſtinui, quas vulgo in Opticam male intrudunt, iis nempe ſolis contentus, quæ aut experientia certa, aut demonſtratione firma nituntur.

ELE-

ELEMENTA OPTICÆ.
CAPUT I.
DE
FUNDAMENTIS OPTICÆ.

DEFINITIO 1.

1. Optica est scientia visionis directæ.

SCHOLION.

2. *Interdum latius sumitur pro scientia visibilium, quatenus visibilia sunt, ita ut* Catoptricam *atque* Dioptricam *una comprehendat.*

DEFINITIO 2.

3. *Visio directa* dicitur, quam efficit radius directus.

DEFINITIO 3.

4. Per *lumen* vel *lucem* intelligo id, quod corpora circumjecta visibilia efficit.

SCHOLION.

5. *Tum enim dicimus lumen esse præsens, quando corpora circumjecta videre possumus.*

DEFINITIO 4.

6. *Radius* est lumen a puncto radiante per medium non resistens protensum.

DEFINITIO 5.

7. *Radius directus* est, cujus omnes partes a puncto radiante usque ad oculum in directum jacent.

DEFINITIO 6.

8. *Punctum radians* est quodlibet visibilis punctum, unde radii emanant.

DEFINITIO 7.

9. *Corpus luminosum* vel *lucidum* est id, quod sui luminis diffusivum, seu quod suo lumine radiat.

DEFINITIO 8.

10. *Corpus illuminatum* est, quod alieni luminis diffusivum, seu quod lumine aliunde accepto radiat.

DEFINITIO 9.

11. *Corpus diaphanum, pellucidum* seu *perspicuum* est, quod radios transmittit.

DEFINITIO 10.

12. *Corpus opacum* est, quod radios intercipit, seu transitum radiis negat.

DEFINITIO 11.

13. *Visibile radiare* dicitur, quando lumen diffundit.

COROLLARIUM.

14. Nullum ergo corpus radiat nisi luminosum aut illuminatum. Aut enim proprium lumen diffundit, aut alienum. In illo casu est luminosum (§. 9); in hoc illuminatum (§. 10).

DEFINITIO 12.

15. *Radiaturæ locus* est intervallum in diaphano, per quod visibile radiat.

DEFINITIO 13.

16. *Oculus* est organum corporis visibilia repræsentans. Constat ex tunicis quinque, cornea, sclerotica, uvea, choroide, retina, & tribus humoribus, aqueo, crystallino, vitreo.

SCHOLION.

17. *Per repræsentationem intelligimus delineationem visibilium in oculo factam: quam mox experimentis confirmaturi sumus. Sed ut ea distinctius intelligatur, structuram oculi ante exponi fas est.*

DEFINITIO 14.

Tab. I. Fig. 1. 18. *Cornea* est tunica externa anterior *dd*, instar cornu pellucida valdeque firma, figuræ vel sphæricæ, vel potius sphæroidicæ, ultra reliquam oculi globositatem in anteriora protuberans oculumque una cum sclerotica consolidans.

COROLLARIUM.

19. Cornea radios luminis transmittit (§. 11).

SCHOLION.

20. *In multas lamellas facili negotio separatur; sed quod ad præsentem scopum nil facit. Ipsi vulgo ab Anatomiæ imperitis colores adjudicantur, qui tunicæ uveæ substratæ insunt & per eam tantummodo transparent.*

DEFINITIO 15.

21. *Sclerotica* est tunica externa posterior *aa*, opaca valdeque firma, majoris sphæræ aut sphæroidis segmentum quam cornea, cum qua oculum consolidat ejusque figuram pariter ac in situ suo singulas partes conservat. Tab. I. Fig. 1.

SCHOLION 1.

22. *Ideo tam tenaces sunt tunicæ cornea & sclerotica, ne oculus, tam nobile organon, facile lædatur.*

SCHOLION 2.

23. *Vestitur autem sclerotica anteriore sui parte membrana alba, quam adnatam vocant Anatomici, tum ad decorem, tum ad volubilitatem oculo conciliandum.*

DEFINITIO 16.

24. *Uvea* est tunica interna anterior *ee*, corneæ substrata, humori aqueo innatans & in medio perforata, figuram annuli vel zonæ habens, intus aspera & nigra, foris lævis & diversicolor, radios Tab. I. Fig. 2.

dios ad visionem necessarios in interiorem oculi concamerationem intromittens, superfluos vero arcens.

SCHOLION.

25. *Pars uveæ, quæ per corneam transparet, a varietate colorum dicitur* Iris. *Et quia solis depicti imaginem referre videtur, radiis quasi innumeris circa orbiculum nigrum diffusis,* Solem *nonnulli vocant.*

DEFINITIO 17.

Tab. I. Fig. 1. 26. **Pupilla** est foramen rotundum tunicæ uveæ *g* instar orbiculi nigricantis in oculo conspicuum & aditum radiis in oculi interiora concedens.

DEFINITIO 18.

27. **Choroides** est tunica interna posterior *bb*, scleroticæ contigua adeoque eandem cum ipsa figuram, superficiem vero concavam politam habens, tenuis atque mollis, suaque nigredine oculum opacans.

SCHOLION 1.

28. *In pecudibus non æque ac in hominibus tota nigra est choroides, sed in superficie concava colore livido tincta apparet. Unde & pupilla in animalibus non prorsus nigricat.*

SCHOLION 2.

29. *Cornea scleroticæ, uvea choroidi connectitur mediante ligamento membranaceo, quod* ciliare *vocant: unde tenuia quædam filamenta usque ad humorem crystallinum undiquaque procedunt, quibus* processuum ciliarium *nomen imposuerunt anatomici.*

DEFINITIO 19.

30. **Retina** seu **amphiblestroides** est tunica initima *cc*, Choroidi contigua, tenuis ac mucosa, subalba, inter diaphanum & opacum fere media, cum fibrillis nervi optici fortiter connexa.

SCHOLION 1.

31. *Retina intra aquam agitata facile expanditur, a choroide autem separata in massam mucosam conglobatur.*

SCHOLION 2.

32. *Equidem* Ruyschius *contendit, inter choroidem & retinam dari adhuc tunicam aliam, quam a se repertam* Ruyschianam *vocat, choroidi tam firmiter connatam (ipsa ejus verba recito) ut vulgari sectione anatomica in oculos non incurrat. Enimvero* Verheyenus *in oculo ovino choroidem duabus lamellis constantem haud difficulter invenit; in humano autem interiorem lamellam nullo modo observare potuit. Quoniam vero tunicæ multæ ac membranæ duplici lamella constant, quemadmodum ego ope siphonis mei anatomici* (§. 52. Hydrost.) *tunicas vesicæ in duas lamellas facile separo; non sine ratione judicat Anatomicus peritissimus* Verheyenus (a), *etsi in omnium viventium oculis*

(a) in Corporis humani Anatom. lib. I. Tract. 4. c. 14. p. 248. Edit. Bat. secundæ A. 1710.

lis duplex choroidis lamella inveniretur, non tamen ideo de novo nomine laborandum esse.

DEFINITIO 20.

Tab. I. Fig. I. 33. ***Humor aqueus*** *g* est, qui anteriorem oculi cavitatem inter corneam & processus ciliares replet, instar aquæ fluidus, tenuis ac limpidus.

DEFINITIO 21.

34. ***Humor Chrystallinus*** *f* est massa consistens, sed pellucida, figuræ lenticularis, inæqualiter convexa, pellicula tenui ac pellucida involuta, quam ***Araneam*** seu ***Arachnoidem*** vocant.

SCHOLION 1.

35. *Partem humoris crystallini anteriorem* Keplerus (b) *segmentum sphæroidis rotatione ellipsis circa axem geniti; posteriorem vero segmentum conoidis hyperbolici rotatione hyperbolæ circa axem geniti esse suspicatur.*

SCHOLION 2.

36. *Humorem crystallinum nec in omnibus hominibus, nec in omnibus ejusdem hominis ætatibus ejusdem esse figuræ; in aliquibus enim magis, in aliis minus ad rotunditatem tendere: in ætate integra esse turgidum, in fracta quasi planum, autor est* Schottus (c).

DEFINITIO 22.

Tab. I. Fig. I. 37. ***Humor vitreus*** *h* est, qui posteriorem oculi cavitatem replet, vitro fuso similis, aliqualis consistentiæ, admodum diaphanus, pellicula tenui (quam *hyaloidem* vocant Anatomici) vestitus.

DEFINITIO 23.

38. ***Reflexio luminis*** est propagatio in partes anteriores corporis opaci, in quod incidit, ob ejus resistentiam.

DEFINITIO 24.

39. ***Refractio luminis*** est deviatio a linea, per quam propagari debebat, ob diversam medii densitatem.

DEFINITIO 25.

40. ***Visio distincta*** est, quæ partes a se invicem distinctas discernit.

DEFINITIO 26.

41. ***Visio confusa*** est, quæ partes a se invicem distinctas non discernit, seu confundit.

AXIOMA 1.

42. ***Nihil videtur sine lumine*** (§. 4).

AXIOMA 2.

43. ***Si oculus eodem modo afficitur, visio eadem.***

SCHO-

(b) in Paralip. in Vitellionem c. 5. p. 167.
(c) Magiæ Univers. Nat. & Art. part. 1. lib. 2. præluf. 1. artic. 8. p. 64.

SCHOLION.

44. *Veritas axiomatis manifesta est per axioma fundamentale quod nihil sit sine ratione sufficiente* (§. 25. Mech.). *Si enim oculus eodem modo afficitur in duobus casibus: nulla sane est ratio, cur in uno casu alia esse debeat visio, quam in altero. Videtur equidem axioma adhuc aliquid obscuritatis habere; sed quicquid ejus restat, totum disparebit, ubi in sequentibus explicatum fuerit, quomodo oculus eodem modo afficiatur. Cæterum hinc colligitur, cur in rerum natura pracaveri non potuerit, quia visibilia interdum aliter apparerent, quam sunt.*

OBSERVATIO 1.

45. ***Si per exiguum foramen, quod pisi magnitudinem non adæquat, lumen solare in cameram obscuram intromittatur, per totum, qua patet, medium a foramine usque ad corpus opacum ulteriori propagationi resistens linea recta lucida comparebit in directum jacens rectæ inter foramen & solem interjectæ.***

COROLLARIUM 1.

46. Lumen ergo propagatur per lineam rectam, consequenter radii per lineas rectas repræsentari possunt (§. 6).

COROLLARIUM 2.

47. Cum nihil videatur sine lumine (§. 42), lumen vero per lineas rectas propagetur (§. 46); nullum objecti punctum videbitur, nisi quod pupillæ in directum jacet (§. 26).

SCHOLION.

48. *Suppono nempe radios ab objecto per idem medium ad oculos trajici.*

COROLLARIUM 3.

49. Radii A*b*, A*c*, A*d*, A*e*, &c. ex eodem puncto A emanantes continuo divergunt. Tab. I. Fig. 3.

OBSERVATIO 2.

50. ***Si lumen per exiguum foramen in cameram obscuram intromissum* AC *speculo* BF *excipiatur: in partes anteriores speculi per rectam* CD *propagabitur.*** Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM.

51. Lumen ergo a corporibus reflectitur, quæ ulteriori progressui obstant (§. 38).

SCHOLION.

52. *Non injucundum est spectaculum, dum verso speculo* BF, *radii* AC *&* DC *una ad perpendiculum* EC *accedunt, iterumque ab eo digrediuntur aut prorsus cum eodem coalescunt: imprimis cum radii sub forma linearum rectarum compareant, quales in Optica* (§. 46) *repræsentantur.*

OBSERVATIO 3.

53. ***Si lumen per exiguum foramen in cameram obscuram intromissum* LM *oblique incidat in vitrum conicum* HIK *aqua plenum,*** Tab. I. Fig. 5.

vel etiam in vitrum solidum, non recta ex M *in* O *tendet, sed a recta* LO *deviabit per* MN.

COROLLARIUM.

54. Cum aër & aqua itemque vitrum sint diversæ gravitatis specificæ (§. 57. *Aërom.*), adeoque etiam diversæ densitatis (§. 20. *Hydrost.*); radius ex uno medio in aliud diversæ densitatis transiens refringitur (§. 39).

OBSERVATIO 4.

55. *Si in speculo ad fenestram collocato magnitudinem pupillæ observes; manibus ad tempora applicatis, ut lumen a lateribus affluens ab oculo arceatur, eam dilatari, manibus vero remotis denuo coarctari videbis. Eandem variationem notabis, si noctu candelam ardentem oculo alterius nunc admoveris, nunc ab eodem removeris.*

COROLLARIUM 1.

56. Crescente adeo lumine, pupilla coarctatur; decrescente dilatatur.

COROLLARIUM 2.

57. Hinc major est in luce meridiana, quam in crepera.

OBSERVATIO 5.

Tab. I. Fig. 3. 58. *Quodlibet punctum objecti* A *videtur omnibus in locis* b, c, d, e &c. *ad quæ ex eo linea recta duci potest.*

COROLLARIUM 1.

59. Quia nihil videtur sine lumine (§. 42); quodlibet objecti punctum radios innumeros quaquaversum diffundit.

COROLLARIUM 2.

60. Quare cum radii per lineas rectas propagentur (§.46)); a puncto radiante radius emittitur in quodlibet punctum, ad quod ex eo linea recta duci potest.

OBSERVATIO 6.

61. *Quodsi humor crystallinus* C *candelæ ardenti* AB *aut fenestræ objiciatur, & post eum in certa distantia (quæ tentando facile definitur), folium chartæ mundæ* DE *statuatur, super eo imago candelæ aut fenestræ situ inverso* ba *comparebit & flamma mobilis, uti est, repræsentabitur. Quodsi candela retrahatur, imago* ba *disparebit, reditura si chartam* DE *propius admoveris, sed minor priore. Si ab oculo bovino posticam scleroticæ ac choroidis, immo etiam retinæ partem, humore vitreo illæso separes & candelam ardentem ante pupillam constituas; ejus imaginem situ inverso videbis in extima superficie humoris vitrei vel ipsius retinæ, ubi non fuerit separata. Eadem omnia eodem modo se habebunt, si humori crystallino substituas vitrum politum convexum* C. Tab. I. Fig. 6.

CO-

COROLLARIUM 1.

62. A quibus objectis radii in oculum illabuntur, eorum imagines admodum exiguæ, sed valde distinctæ pone humorem crystallinum delineantur.

COROLLARIUM 2.

63. Imago objecti majoris in eadem distantia major est, quam minoris.

COROLLARIUM 3.

Tab. I. Fig. 6. 64. Imago objecti vicini majore intervallo ab humore crystallino distat, quam remoti.

COROLLARIUM 4.

65. Imago objecti vicini major est; imago remoti minor.

COROLLARIUM 5.

66. Cum adeo objecta remota videantur minora, vicina vero majora; objectum magnum apparet, si magna in oculo delineatur imago; parvum vero, si parva (§. 43).

COROLLARIUM 6.

67. Quæ ergo æqualia apparent; eorum imagines in oculo æquales sint necesse est.

COROLLARIUM 7.

68. Si objectum movetur; imago quoque in oculo movetur, seu successive alias aliasque retinæ partes occupat (§. 61). Moveri adeo videntur, quorum imagines alias aliasque retinæ partes successive occupant (§. 43).

COROLLARIUM 8.

69. Orbium vitreorum in fenestra contiguorum imagines etiam in oculo contiguæ sunt (§. 61). Quorum adeo imagines in oculo contiguæ sunt, ea contigua videntur (§. 43). Eodemque modo patet, quod continua videri debeant, quorum imagines continuæ sunt.

COROLLARIUM 9.

70. Visio igitur convenit repræsentationi objectorum in oculo, hoc est, talia apparent objecta, qualia in oculo repræsentantur, seu ex imaginibus in oculo ratio reddi potest, cur tale appareat objectum.

COROLLARIUM 10.

71. Cum imago in oculo delineata objecto ipso multo minor existat; fieri potest ut vel ob hujus parvitatem (§. 65), vel distantiam (§. 65) individuum in oculo punctum occupet. Quoniam adeo objectum non amplius repræsentatur; in utroque casu videri nequit (§. 70).

COROLLARIUM 11.

72. Quia igitur nec objecti vicini partes omnes exiguæ, nec remoti satis magnæ videri possunt; neque vicina, neque remota prorsus distincte nudo oculo videmus (§. 40), distinctius tamen vicina, quam remota (65. 71) cernimus.

OBSERVATIO 7.

73. *Si vitrum utrinque convexum & politum* AB *charta obdu-* Tab. I. Fig. 7.

 cas,

eas, nonnisi duobus foraminulis sive quadratis, sive rotundis apertis: radii a sole lucente S *in chartam* CD *ad certam distantiam, tentando definiendam, collocatam per utrumque transmissi coalescunt in* F, *mox tamen a se invicem recessuri, si chartam* CD *vel propius ad lentem* AB *admoveas vel longiori intervallo, ab eadem removeas. Si idem vitrum ita tectum fenestræ obvertas, imagines ejus in unam coalescent: nec disparebit imago, etiamsi foramen alterutrum tegas, nisi quod claritas minuatur.*

COROLLARIUM 1.

74. Quilibet radius fert secum integram speciem puncti radiantis.

COROLLARIUM 2.

75. Radii ab eodem puncto objecti egressi per refractionem in vitro convexo, consequenter etiam in humore crystallino (§. 61), factam in uno puncto iterum uniuntur.

COROLLARIUM 3.

76. Tum ergo objectum in charta CD, consequenter etiam in retina (§. 61) repræsentatur, si radii diversorum punctorum radiantium species secum ferentes (§. 74) non confunduntur.

COROLLARIUM 4.

77. Imago in oculo clarior est, si pluribus radiis delineatur, quam si paucioribus (§. 73).

SCHOLION.

78. *Patet jam ratio universæ structuræ oculi. Sclerotica nempe cum cornea concamerationem efficit; uvea cum choroide oculum opacat, ne radii peregrini ab ea reflexi imaginem in retina delineandam confundant* (§. 76). *Humor crystallinus per refractionem radios eandem speciem secum ferentes unit* (§. 75), *ut objectum clare ac distincte pone eum repræsentetur: quam refractionem humores aqueus & vitreus juvant* (§. 54). *Pupilla dilatabilis, ut nunc coarctari, nunc ampliari possit* (§. 56); *quo lumen ad repræsentationem satis claram sufficiens* (§. 77) *illabatur. Hinc non difficilis est oculi artificialis constructio, in quo objecta eodem modo repræsentantur, quo in vero. Quare cum is utilis sit ad veritates hactenus propositas confirmandas; ejus structuram paucis exponemus.*

PROBLEMA 1.

79. *Oculum artificialem construere.* Tab. I. Fig. 8.

RESOLUTIO.

1. Fiant duo hemisphæria cava ex ligno duriori, mediante aliqua commissura facile conjungenda.
2. Hemisphærium anterius sit in medio perforatum foramine rotundo C, quod pupillæ vices sustineat & vitro tenui plano, vel

vel (quod perinde est) convexo concavo tanquam tunica cornea muniendum.

3. Interius in tubum brevem efformetur, & alius ductilis G cum lenticula vitrea polita ac utrinque convexa (quæ humoris crystallini munere fungitur) eidem immittatur.

4. Hemisphærio posteriori immittatur tubus ductilis EF, cui inditum sit vitrum planum, cujus superficies interior lævigata quidem, sed non polita, retinam cum nervo optico repræsentans.

Tab. 1. Fig. 8.

Quodsi igitur foramen C objecto cuidam obvertas & tubum ductilem FE, sensim sensimque extrahas; videbis tandem objectum in vitro plano accuratissime suis quidem coloribus nativis, sed situ inverso, delineatum. Et hac machina ea explorare licebit, quæ in antecedentibus de visibilium in oculo naturali repræsentatione dicta sunt (*§. 62. & seqq.*).

Aliter.

Quoniam perinde est, quæcunque fuerit cavitatis internæ figura; conclave quodcunque ita obscurare poteris, ut nonnisi per exiguum foramen, vitro polito utrinque convexo muniendum, luci aditus pateat. Quodsi enim linteum album in certa distantia expandas; omnium objectorum foramini oppositorum imagines quam distinctissime suis nativis coloribus super eodem depinguntur. Erunt autem imagines tanto majores, quo lens vitrea fuerit majoris sphæræ segmentum.

SCHOLION.

80. *Hæc est decantata illa* camera obscura, *cum qua hodie Philosophi oculum conferre solent, rationes phænomenorum opticorum reddituri. Equidem si foramen pisi magnitudinem non excedat; objecta quoque delineantur, lente remota: non tamen tam distinctæ sunt imagines, quam altero in casu. Primus hoc phænomenon observavit* Joannes Baptista Porta (d). *Demonstrationem damus in sequentibus.*

B 3 CAPUT

(d) Magiæ naturalis lib. 4. c. 2.

CAPUT II.
DE
LUCE.

DEFINITIO 27.

81. *Intensitas luminis* est quantitas vis illuminatricis.

SCHOLION.

82. *Vim illuminatricem ut phænomenon considero, non ut peculiarem entitatem lumini superadditam, aut ut qualitatem occultam. Licet autem eam non pro inexplicabili habeam; Mathematici tamen non esse existimo, ut ejus naturam explicet, seu rationes physicas reddat. Absit itaque ut quis arbitretur, me scholasticorum figmenta ex philosophia feliciter profligata in eam reducere velle.*

COROLLARIUM.

83. Quoniam radius perpendicularis fortius ferit, quam obliqùus in ratione finus totius ad finum anguli obliquitatis (§ 552. *Mechan.*); radius quoque perpendicularis obliquo in eadem ratione intensior est.

AXIOMA 3.

84. *Si singulorum radiorum vires illuminatrices fuerint æquales, aut radii fortes ac debiles in constante ratione misceantur; intensitates luminis habent rationem multitudinis radiorum æqualia plana ferientium.*

COROLLARIUM.

85. Quia densitas luminis ex multitudine radiorum per datum medium una transmissorum æstimatur (§. 14. *Hydrost.*); intensitates luminis in hypothesi virium illuminatricium æqualium aut in constante ratione mixtarum, in ratione densitatum erunt.

THEOREMA 1.

86. *Si lumen propagatur per radios parallelos in medio non resistente; intensitas non variatur.* Tab. I. Fig. 9.

DEMONSTRATIO.

Quoniam radii per spatium AB DC transmissi sunt paralleli, *per hypoth.* singuli a singulis eandem distantiam constanter tuentur (§. 81. *Geom.*). Quare cum lumen propagetur in medio non resistente *per hypoth.* nullus radius intercipitur, nec ullius vis immutatur (§. 20. *Mechan.*). Intensitas igitur variari nequit (§. 81). *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

87. *Si lumen propagatur per radios divergentes æqualium virium in* Tab. I. Fig. 10.

in medio non resistente, intensitas luminis decrescit in ratione duplicata distantiarum a puncto radiante reciproce.

DEMONSTRATIO.

Cum enim lumen in medio non resistente propagetur, *per hypoth.* nec radius ullus intercipitur, nec vis singulorum minuitur, adeoque radii, qui in distantia AC per hemisphærium a semicirculo FCG descriptum diffundebantur, in distantia AB per hemisphærium a semicirculo DBE descriptum diffunduntur. Sunt igitur densitates luminis reciproce ut superficies hemisphæriorum a semicirculis FCG & BDE descriptorum (*§.*23. *Hydrost.*), consequenter etiam intensitates luminis in eadem ratione existunt (*§.*85). Sunt vero superficies illorum hemisphæriorum in ratione semicirculorum FCG & DBE (*§.* 554. *Geom.* & *§.* 181. *Arithm.*), hoc est in ratione duplicata distantiarum AC & AB (*§.*409. *Geom.*). Ergo intensitas luminis in C est ad intensitatem in B in ratione duplicata ipsius AB ad AC (§.167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 10. 88. Si itaque fuerit AB = 2AC; erit intensitas luminis in B = $\frac{1}{4}$ intensitatis in C. Si AB = 3AC; intensitas in B erit $\frac{1}{9}$ intensitatis in C. Intensitas adeo luminis per radios divergentes æqualium virium propagati decrescit secundum progressionem 1. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{25}$. $\frac{1}{36}$ &c.

THEOREMA 3.

89. *Si lumen propagatur per radios convergentes æqualium virium in medio non resistente; intensitas luminis crescit in ratione duplicata distantiarum a puncto concursus reciproce.* Tab. I. Fig. 11.

DEMONSTRATIO.

Eodem, quo in demonstratione theorematis præcedentis, modo ostenditur, intensitates luminis in C & G esse in ratione circulorum EF & AB reciproce, consequenter in ratione duplicata ipsius GF ad CB (§. 409. *Geom.*). Quoniam vero GF ipsi CB supponitur parallela; erit GF : CB = DG : DC (*§.* 268. *Geom.*), consequenter $GF^2 : CB^2 = DG^2 : DC^2$ (§. 260. *Arithm.*). Est igitur intensitas luminis in C ad intensitatem in G in ratione duplicata distantiæ GD ad distantiam CD (*§.*167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

90. *Aër intensitatem luminis minuit, quod per ipsum propagatur.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim per exiguum foramen in conclave obſcurum, vel etiam per exiguam rimam lumen intromittitur, a latere ſtantes lucidum tramitem vident (§. 45). Quare cum trames iſte appareat continuus, nec tantummodo videantur particulæ huc illucque agitatæ, & nihil videatur ſine lumine (§. 42); necesſe eſt, ut a particulis tum aëris, tum aliis in eodem circumvolitantibus radii in oculum reflectantur, conſequenter ut in ulteriori progresſu radiorum numerus continuo minuatur. Quoniam itaque ſingulis radiis ineſt vis ſua illuminandi; minuto radiorum numero, vis quoque illuminatrix, hoc eſt, intenſitas luminis (§. 81) minuitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

91. *Eodem modo oſtenditur, luminis intenſitatem multo magis minui, dum per aquam aut vitrum, aliaque media aëre denſiora propagatur, id quod etiam ſenſui ſatis manifeſtum: videmus enim lumen per vitrum planum transmisſum non ita fortiter illuminare chartam objectam, quam quod ad latera vitri in eandem incidit. Alia vero eſt ratio, ſi per refractionem radii condenſentur: de quo luminis incremento agemus in Dioptrica.*

COROLLARIUM.

92. Luminis adeo per radios parallelos in aëre propagati intenſitas continuo minuitur, conſequenter ipſum tandem extinguitur, nec per immenſum intervallum propagatur.

THEOREMA 5.

93. *Si latitudo plani illuminati* IK *ad diſtantiam puncti radiantis* IH *vel* KH *fuerit ut* 1 *ad* 2000000, *perinde eſt ac ſi radii* HI *&* IK *inciderent in planum paralleli.* Tab. I. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI ad IK perpendicularis *per hypoth.* reperietur ſinus anguli IHK 50 (§. 36. *Trigon.*). Eſt vero ſinus unius minuti ſecundi major 48, ſinus duorum major 96, nimirum fere 97, *vi Canonis ſinuum majoris.* Ergo angulus H unius circiter ſecundi, certe multo minor quam duorum ſecundorum, conſequenter anguli I & K junctim ſumti non differunt ad ſenſum a duobus rectis (§. 240. *Geom.*). Radii igitur HI & HK incidunt in IK ad ſenſum paralleli (§. 296. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

94. Ergo radii HI & HK a puncto procul disſito H advenientes multo magis incident in IK ad ſenſum paralleli, ſi IK ad IH minorem habuerit rationem quam 1 ad 2000000.

COROL-

COROLLARIUM 2.

95. Quoniam diameter pupillæ satis ampliatæ vix 2''' seu $\frac{1}{5}$ unius digiti excedit; radii in pupillam fere paralleli incidunt, si distantia puncti radiantis ab oculo fuerit 4000000''', seu 40000 pedum, hoc est, (quia juxta *Varenium* (e) quantitas unius milliaris Germanici est 22800 pedum Rhenanorum) fere $1\frac{3}{4}$ unius milliaris Germanici.

SCHOLION.

96. *Supposui in demonstratione, duos angulos* I & K *junctim sumtos a duobus rectis non differre ad sensum, si angulus* H *non excedat quantitatem unius minuti secundi. Sed vix different ad sensum, etiamsi* H *fuerit dimidii scrupuli primi. Tum vero ratio ipsius* IK *ad* KH *erit* vi Canonis sinuum *ut* 1454 *ad* 10000000, *hoc est, fere ut* 1 *ad* 6877. *Quodsi diameter pupillæ denuo ponatur* 2''', *reperietur* IH 13754''' *seu* 137 *pedum. Unde id saltem liquet, quam primum distantia objecti excedit intervallum* 140 *pedum, incidentiam radiorum in pupillam sensim sensimque fieri quasi parallelorum.*

AXIOMA 4.

97. *Quæ a luminosis ejusdem intensitatis æqualiter distant loca, in iis æquale lumen producitur.*

SCHOLION.

98. *Patet ex ipsa notione luminosorum ejusdem intensitatis. Cum nimirum intensitas sit quantitas vis illuminatricis* (§.81), *luminosa ejusdem intensitatis dicenda sunt, quando in distantiis æqualibus æquale lumen producunt.*

OBSERVATIO 8.

99. *Si tria vel plura luminosa* A, B, C *per exiguum foramen* F *in locum obscurum radient; singulorum imagines in charta objecta in* a, b, & c *eodem modo delineantur ac si singuli soli per foramen illud* F *radiarent. Idem quoque accidit corporibus per se opacis, sed illuminatis.* Tab. I. Fig. 13.

COROLLARIUM.

100. Lumen igitur unum non officit propagationi alterius.

SCHOLION.

101. *Idem non minus evidenter ex Astronomia constat. Cum enim ibi ostendatur, lumen solare nocturno tempore diffundi per vasta illa spatia, in quibus planetæ vagantur; id tamen minime impedit, quo minus lumen fixarum per eadem spatia ad nos propagetur.*

THEOREMA 6.

102. *Si duo corpora luminosa* L & M *ejusdem intensitatis per commune intervallum* P Q *radient; in locis* N & O *ab utroque lumi-* Tab. I. Fig. 14.

(e) Geogr. Gener. part. absol. lib. 1. c. 4. p. m. 29.

luminoso P & Q æqualiter distantibus æquale lumen producitur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam NP = OQ & lucida L & M ejusdem intensitatis *per hypoth.* quantum luminis L producit in N, tantundem etiam M producit in O (§. 97). Porro quoniam PN = QO *per hypoth.* erit PO = QN (§. 91. *Arithm.*). Cum adeo lumen unum non officiat propagationi alterius (§. 100), adeoque luminosum M in N & alterum L in O eodem modo lumen producant, ac si alterum abesset; tantum luminis M in N producit, quantum L in O (§. 97). In locis adeo N & O æquale lumen producitur (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

Tab. I. Fig. 14. 103. *Si duo lucida* L & M *ejusdem intensitatis per commune intervallum* PQ *radiant; lumen in medio* E *productum erit ad lumen in loco quocunque* N *alterutri luminoso* L *viciniori producto in ratione composita quadrati dimidiæ distantiæ lucidorum* PE *ad rectangulum ex segmentis* PN & NQ & *aggregati ex quadratis istorum segmentorum ad duplum ejusdem rectanguli.*

DEMONSTRATIO.

Sit PE = EQ = a, PN = b, NQ = c, lumen in E a luminoso L productum = l. Quoniam intensitates lucidorum L & M sunt æquales, *per hypoth.* erit lumen in E a lucido M productum itidem = l (§. 102). Porro lumen in N a lucido L productum = $a^2 l : b^2$ & lumen in N a lucido M productum = $a^2 l : c^2$ (§. 86). Quare cum lumen a lucido L in N productum non impediat, quo minus lucidum M lumen vi suæ proportionatum ibidem producat (§. 100), erit lumen in N a duobus lucidis L & M junctim productum = $a^2 l : b^2 + a^2 l : c^2 = (a^2 c^2 l + a^2 b^2 l) : b^2 c^2$ (§. 235. *Arithm.*). Quod vero ab iisdem in E producitur = $2l$, consequenter illud ad hoc est ut $(a^2 c^2 l + a^2 b^2 l) : b^2 c^2$ ad $2l$, seu ut $a^2 (b^2 + c^2)$ ad $2b^2 c^2$ (§. 178. 181. *Arithm.*,) nempe in ratione composita PE² ad PN. NQ & PN² + NQ² ad 2PN. NQ (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

104. Quodsi fiat NE = d, erit PN = $b = a - d$ & NQ = $c = a + d$, consequenter his valoribus substitutis reperitur lumen in N ad lumen in E ut $2a^4 + 2a^2 d^2$ ad $2a^4 - 4a^2 d^2 + 2d^4$, seu ut $a^4 + a^2 d^2$ ad $a^4 - 2a^2 d^2 + d^4$ (§. 181. *Arithm.*). Quoniam itaque

a >

$a > d$, erit quoque $a^2 d^2 > d^4$ (§.180. *Arithm.*), adeoque $a^4 + a^2 d^2 > a^4 + d^4$ (§. 90. *Arithm.*) & hinc multo magis $a^4 + a^2 d^2 > a^4 - 2a^2 d^2 + d^4$. Lumen adeo omnium minimum in E producitur.

THEOREMA 8.

Tab. I. Fig. 15. 105. *Si duo lucida* L *&* l *a punctis* B *&* C *æqualiter distent; erit lumen in* B *productum ad lumen in* C *productum in ratione duplicata distantiarum reciproce.*

DEMONSTRATIO.

Sint distantiæ lucidorum a punctis B & C ut rectæ AB & AC. Sit porro AB $= a$, AC $= b$, lumen a lucido L in B productum $= m$, quod vero ibidem producitur a lucido $l = n$; erit lumen a lucido L in C productum $= a^2 m : b^2$, & quod ibidem producitur a lucido $l = a^2 n : b^2$ (§.87). Est itaque lumen ab utroque productum in B $= m + n$, in C vero $= (a^2 m + a^2 n) : b^2$ (§.100), adeoque lumen in B ad lumen in C ut $m + n$ ad $(a^2 m + a^2 n) : b^2$, hoc est, ut b^2 ad a^2 (§. 178. 181. *Arithm.*), nempe in ratione duplicata distantiæ AC ad distantiam AB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

106. Ergo & ejusdem lucidi diversæ partes a duobus punctis sigillatim fere æqualiter distantes producunt in iis lumen distantiarum reciproce sumtarum quadratis proportionatum.

SCHOLION.

107. *Hoc corollario in Astronomia utimur, ubi quantitatem illuminationis a Sole in diversis planetis definimus.*

PROBLEMA 2.

108. *Data distantia* AB, *ad quam luminosum simplex lumen datæ intensitatis producit, definire distantiam* AC, *ad quam luminosum in data ratione auctum lumen priori æquale producit.* Tab. I. Fig. 15.

RESOLUTIO.

Sit ratio data $= a : b$, distantia AB $= a$, quæsita AC $= x$, lumen in C a luminoso simplici productum $= l$; erit ab eodem in distantia x producendum $= a^2 l : x^2$ (§.87), consequenter quod ad eandem distantiam a luminoso aucto in ratione $a : b$ producitur $= abl : x^2$ (§.530. *Mechan.*). Est vero lumen in C a luminoso aucto productum æquale ei, quod producitur a simplici in B, *per hypoth.* Ergo

$$\frac{abl : x^2 = l}{\dfrac{ab : x^2 = 1}{ab = x^2}}$$

consequenter $a : x = x : b$

Theorema. Distantia AC, ad quam

lumi-

luminosum auctum lumen ejusdem intensitatis producit, quod a simplici in data distantia producebatur, est media proportionalis inter hanc distantiam datam & aliam, quæ ad eam habet rationem luminis aucti ad lumen simplex.

COROLLARIUM.

109. Sphæra igitur activitatis in minore ratione augetur, quam vires luminosi.

SCHOLION.

110. *Eodem sane modo reperitur distantia, ad quam luminosum fortius idem lumen producit, quod a debiliori in data distantia producebatur & contra. Nec difficulter hac methodo problemata agnata alia solvuntur.*

THEOREMA 9.

Tab. I. Fig. 16. 111. *Si sphæra luminosa* AGB *aliam opacam* CHD *illuminat; radii extremi sphæram utramque tangunt.*

DEMONSTRATIO.

Recta AC, quæ utramque peripheriam AGB & CHD in A & C tangit, tota extra circulum cadit (§. 47. *Geom.*). Quare cum lumen per lineas rectas propagetur (§. 46); fieri sane nequit, ut ullus radiorum, qui ultra tangentem AC propagantur, a luminoso AGB ad opacum CHD pertingant. Radii ergo extremi sphæram utramque tangunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

112. *Si sphæra luminosa* A B *fuerit opacæ* C D *æqualis; dimidia partem opacæ dimidiam illuminabit.* Tab. I. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Jungantur centra sphærarum E & F recta E F, ducanturque diametri AB & CD ad EF perpendiculares. Agantur præterea per A & C, itemque per B & D rectæ CA & DB (§. 20. *Geom.*). Quia CF & AE, itemque FD & EB ad EF perpendiculares atque æquales, *per hypoth.* erunt AC & BD ipsi EF parallelæ (§. 226. *Geom.*), consequenter anguli ad A & C, itemque ad B & D recti (§. 230. *Geom.*). Tangit adeo AC peripheriam AGB in A, peripheriam vero CHD in C, & BD illam in B, hanc vero in D tangit (§. 304. *Geom.*). Sunt igitur A & B puncta sphæræ luminosæ extrema, quæ in opacam radiant, & C atque D puncta sphæræ opacæ extrema, quæ illuminantur (§. 111). Quare cum AGB & CHD sint semicirculi (§. 135. *Geom.*); sphæra luminosa dimidia dimidiam opacæ partem illuminat. *Q. e. d.*

THEOREMA 11.

113. *Si sphæra luminosa* AB *fuerit major opaca* IN; *pars minor quam*

quam dimidia luminosæ illuminat partem majorem dimidia opacæ.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 16. Radius extremus CI utramque sphæram tangit (§. 111), adeoque ad semidiametros CG & IM perpendicularis (§. 304. *Geom.*), consequenter GC & MI sunt distantiæ punctorum G & M, seu rectæ GM a recta CI (§. 225. *Geom.*). Quare cum IM < GC, *per hypoth.* distantia rectæ GM a recta CI continuo decrescit, adeoque radius luminis CI cum recta GM centra sphærarum G & M conjungente convergit (§. 83. *Geom.*). Anguli igitur *o* & *u* sunt recto minores (§. 241. *Geom.*), consequenter IMK recto major (§. 147. *Geom.*). Est ergo CE quadrante minor; IK quadrante major (§. 143. *Geom.*). Quare cum eodem modo demonstretur, esse DE quadrante minorem, KN vero quadrante majorem; erit CED semicirculo minor, IKN semicirculo major, consequenter minor quam dimidia pars sphæræ luminosæ majorem dimidia partem sphæræ opacæ illuminat. *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

114. *Si sphæra luminosa* IN *fuerit minor sphæra opaca* AB; *pars major quam dimidia luminosæ illuminat partem opacæ dimidia minorem.*

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentes.

PROBLEMA 3.

115. *Datis semidiametris sphæræ luminosæ* CG *& sphæræ opacæ* IM *una cum distantia centrorum* GM, *invenire quantitatem partis illuminatæ pariter ac illuminantis.* Tab. II. Fig. 17.

RESOLUTIO.

Ducatur FM ipsi CI parallela. Quoniam MI & CF ad CI perpendiculares (§. 111. *Optic.* & §. 304. *Geom.*), erit IM = CF (§. 226. *Geom.*), consequenter FG differentia semidiametrorum CG & IM, quæ ob has datas etiam datur. Et quia IM etiam ad FM perpendicularis (§. 230. *Geom.*), erit IL quadrans (§. 143. *Geom.*); adeoque LK excessus partis dimidiæ illuminatæ ultra quadrantem.

Quoniam vero in Triangulo GFM ad F rectangulo (§. 230. *Geom.*) datur latus FG differentia semidiametrorum IM & CG, itemque GM distantia centrorum G & M; angulus M inveniri potest (§. 38. *Trigon.*) cujus

 men-

mensura est arcus desideratus KL.

Dato vero angulo FMG datur etiam FGM (§. 241. *Geom.*), cujus mensura est arcus CE, qui dimidiam partem illuminantem sphæræ luminosæ manifestat.

E. gr. Juxta *Ricciolum* (c) diameter Telluris ad diametrum Solis ut 1 ad 33, nempe IM = 1 & CG = 33, adeoque FG = 32; distantia Solis a Tellure GM = 7300. Quare

Log. GM	38633229
Log. sin. tot.	100000000
Log. FG	15051500
Log. Sin, tot.	76418271,

cui in canone sinuum artificialium respondent 15'. Est ergo IK = 90° 15', consequenter IKN 180° 30'. Porro CGM = 89° 45', consequenter CED 179° 30'.

COROLLARIUM.

116. Cum eodem modo inveniatur tam arcus IKN, quam CED, si sphæra minor IN fuerit luminosa, major vero AB opaca; per problema præsens etiam determinatur pars sphæræ majoris a sphæra minore illuminata, itemque pars sphæræ minoris in majorem radians.

THEOREMA 13.

117. *Si sphæra lucida major AB propior fuerit opacæ minori IN; minor illius pars in hanc radiat, hujus tamen pars major illuminatur, quam in longinquiori distantia.* Tab. II. Fig. 17.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut GM ad FG ita sinus totus ad sinum excessus partis dimidiæ illuminatæ ultra quadrantem LK (§. 115). Quamobrem si GM minuitur, FG existente eadem; ratio sinus totius ad sinum arcus LK minor fit (§. 203. *Arithm.*), consequenter sinus arcus LK, adeoque ipse arcus LK augetur (§. 206. *Arithm.*). Major ergo sphæræ opacæ pars illuminatur. *Quod erat unum.*

Dum vero arcus LK seu angulus LMK augetur; angulus CGE, consequenter arcus CE necessario minuitur (§. 241. *Geom.*). Minor adeo sphæræ lucidæ pars in opacam radiat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 14.

118. *Si sphæra lucida minor IN majori opacæ AB propior fuerit, major ejus pars in eam radiabit, minorem tamen hujus partem illuminabit.*

DE-

(c) Astronom. Reform. lib. 1. c. 19. f. 70. b.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis.

THEOREMA 15.

Tab. II. Fig. 18.

119. ***Si objectum* AB *radiet per exiguum foramen* C *in parietem album ipsi oppositum, sitque radiaturæ locus post foramen* bCa *obscurus: situ inverso in pariete depingetur.***

DEMONSTRATIO.

Quia enim foramen C valde exiguum radii a puncto B dimanantes parietem in *b* contingunt; qui vero a punctis A & D emanant, in parietis puncta *a* & *d* incidunt. Quare cum radii a diversis punctis emanantes non confundantur; a pariete reflexi speciem adhuc objecti secum afferunt (§. 74), consequenter objectum in pariete spectandum exhibent (§. 43). Quia vero radii AC & BC in foramine se mutuo secant; situs objecti invertatur necesse est, cum radius ab infimo puncto in locum supremum *b* perveniat & contra. Objectum adeo situ inverso depingitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

120. Quia anguli ad D & *d* recti, *per hypoth.* verticales autem ad C æquales (§. 156. *Geom.*), erunt etiam *b* & B, itemque *a* & A æquales (§. 246. *Geom.*), consequenter, si paries, in quo delineatur objectum, fuerit huic parallelus, *ab* : AB = *d* C : DC (§. 396. *Geom.*), hoc est, altitudo imaginis est ad altitudinem objecti ut hujus distantia a foramine ad distantiam illius ab eodem.

SCHOLION.

121. *Ut picturæ sint claræ, objecta lumine solari collustrata sint opus est. Clariores quoque apparebunt, si spectator per horæ circiter quadrantem in tenebris commoratus fuerit. Cavendum præterea ne forte per rimulas lumen illabatur nec cœlum parietem nimis illustret. Imago equidem fit major atque distinctior, si major fuerit parietis a foramine distantia* (§. 120): *sed dum radii nimis dilatantur, lumen debilitatur peritque claritas imaginis, ut tandem non amplius discerni possit. Atque hinc apparet defectum claritatis officere quoque visioni distinctæ.*

CAPUT III.

DE
UMBRA.

DEFINITIO 33.

122. ***Umbra*** est privatio luminis interpoſito corpore opaco. Privatio totalis omnis luminis dicuntur *Tenebræ*, ſubinde ***Umbra mera.***

COROLLARIUM.

123. Quoniam nihil videtur ſine lumine (§. 42), umbra mera videri nequit.

SCHOLION.

124. *Quando itaque umbram videre dicimur, partim corpora videmus in umbra quidem collocata, ſed lumine a collateralibus corporibus reflexo adhuc colluſtrata, partim confinia lucis & umbræ, atque luminis imminuti minorem vim percipimus.*

THEOREMA 16.

125. ***Quodlibet corpus opacum projicit umbram in directum cum radiis, a quibus illuminatur, ſeu in partem luci oppoſitam.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim corpus opacum radiis tranſitum neget (§. 12), radii autem per lineam rectam propagentur (§. 46); per intervalla cum ipſis in directum jacentia a tergo corporis non progrediuntur. Hæc ergo lumine privantur, conſequenter in iis umbra eſt (§. 121). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

126. Moto ergo luminoſo, umbra locum mutat.

COROLLARIUM 2.

127. Moto corpore illuminato, umbra locum mutat.

THEOREMA 17.

128. ***Quodlibet opacum* G *tot habet umbras* H, I &c. *quot ſunt lucida* E & F *ipſum illuminantia.*** Tab. II. Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus opacum G intercipit radios (§. 12), radii autem per lineam rectam propagantur (§. 46), lucidum F per ſpatium H ipſi oppoſitum radiare nequit. Privabitur ergo illud intervallum lumine luminoſi F. Eodem modo oſtenditur, ſpatium I privari lumine lucidi E: ad ſpatium vero L a neutro lucidorum E & F lumen diffundi. Quamvis vero opacum G non obſtet, quo minus lumi-

luminosum E in spatio H & luminosum F in spatio I lumen suum producat (§. 46); cum tamen spatia illa ab uno luminoso minus illuminentur quam a duobus (§. 100), minus luminis in iis existit, quam in aliis contiguis, adeoque luminis quadam parte carent. Opacum igitur G tot umbras habet, quot sunt lucida ipsum illuminantia. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

129. Quodsi ergo luminosa ad eandem opaci partem multiplicentur, multiplicabuntur quoque ejus umbræ.

SCHOLION.

130. *Si lumen a luminoso F in spatio* H *producendum insensibilem habuerit rationem ad lumen in eodem spatio a luminoso altero* E *productum; erit equidem in spatio isto* H *aliqua luminis carentia, remoto opaco* G *adfuturi, adeoque umbra aliqua* (§. 121): *sed illam oculus discernere nequit.*

THEOREMA 18.

131. ***Si lumen luminosi fuerit intensius, umbra quoque intensior est.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim umbra sit privatio luminis ob interpositum corpus opacum (§. 122); majore lumine privabitur spatium aliquod, si lumen luminosi fuerit intensius, quam ubi remissius extiterit. Unde umbra obscurior videbitur, si corpora contigua majori lumine collustrentur, quam si minore resplendeant, hoc est, umbra intensior est, si lumen interceptum ab opaco fuerit intensius, quam si remissius extiterit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

132. Si plures umbræ coalescunt, opaco a pluribus luminosis collustrato; umbra multiplicata intensior est.

SCHOLION.

133. *Intensitas adeo umbræ æstimatur ex gradibus luminis, quibus spatium aliquod privatur, relatæ quidem ad lumen, quo privatur.*

THEOREMA 19.

134. ***Si sphæra luminosa* AB *fuerit æqualis opacæ* CD, *quam illuminat: umbra hujus* CDLK *erit cylindrica.*** Tab. I. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Cum enim radii extremi CK & DL umbram terminantes peripheriam CHD in C & D tangant (§. 111) & diametro CD insistant (§. 112); erunt ad eandem rectam CD perpendiculares (§. 304. *Geom.*), adeoque inter se paralleli (§. 256. *Geom.*). Quare si ex centro F perpendicularis FM erigatur; erit eadem

eadem radiis CK & DL parallela (§. *cit.*), consequenter facta CK = DL, CFMK rectangulum (§. 100. *Geom.*). Quodsi jam concipiamus semicirculum CHI una cum rectangulo CKMF circa rectam HM gyrari; ille sphæram parte sui antica illuminatam (§. 470. *Geom.*), adeoque hic spatium umbrosum describet. Figura igitur umbræ cylindrica est (§. 465. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

135. Sphæræ igitur opacæ CD luminosæ AB æqualis umbra ad eam distantiam extenditur, ad quam agere apta est luminosa.

COROLLARIUM 2.

136. Si igitur ejus umbra secatur, sectionis planum circulus est circulo maximo sphæræ opacæ æqualis (§. 466. *Geom.*).

THEOREMA 20.

Tab. II. Fig. 17. 137. *Si sphæra luminosa* AB *major fuerit opaca* IN, *quam illuminat; umbra* IHN *erit conica.*

DEMONSTRATIO.

Quia radius CH sphæras AB & NI in C & I tangit (§. 111); radii GC & MI ad eundem perpendiculares sunt (§. 304. *Geom.*). Quare cum GC > IM *per hypoth.* radius CH ad rectam GH per centra sphærarum G & M transeuntem convergit (§. 83. *Geom.*). Ducta igitur subtensa IN; triangulum IHP erit ad P rectangulum (§. 291. *Geom*). Quodsi jam concipiamus figuram KIH circa KH rotari; KIQ sphæram, quæ illuminatur (§. 470. *Geom.*), triangulum vero IPH figuram umbræ, nempe conum (§. 467. *Geom.*) describit. Patet adeo, figuram umbræ esse conicam. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Si igitur umbra secatur plano basi parallelo; planum sectionis erit circulus, tanto quidem minor, quo longiori intervallo a basi distat (§. 468. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

139. Sphæræ igitur opacæ a luminosa majore illuminatæ umbra continuo decrescit, tandemque in H finitur.

THEOREMA 21.

140. *Si sphæra luminosa* IN *minor fuerit opaca* AB, *quam illuminat; umbra* CDSR *calathiformis est, seu coni truncati figuram habet.* Tab. II. Fig. 17.

DEMONSTRATIO.

Quia radius IR sphæras AB & NI in C & I tangit (§. 111); semidiametri GC & IM ad eundem perpendiculares sunt (§. 304. *Geom.*)

Geom.). Quare cum GC > IM *per hypoth.* radius IR a recta MT per centra sphærarum M & G transeunte divergit (§. 84. *Geom.*). Quodsi ergo RS agatur cum chorda CD parallela; erit RCTV trapezium parallelarum basium (§. 103. *Geom*). Quodsi jam concipiamus figuram TECR circa rectam TE rotari; quadrans AEG describet hemisphærium illuminatum (§. 470. *Geom.*), trapezium vero RCVT, tanquam segmentum trianguli rectanguli RHT, ob rectos ad V (§. 291. *Geom.*) & T (§. 230. *Geom.*), conum truncatum (§. 467. *Geom.*): quæ cum sit figura umbræ, patet umbram esse calathiformem, seu figuram coni truncati habere. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

141. Umbra igitur sphæræ opacæ majoris a lucido sphærico minore illuminatæ continuo dilatatur & ad eam distantiam extenditur, in qua agere aptum est luminosum.

Tab. II. Fig. 17.

COROLLARIUM 2.

142. Si umbra secetur plano basi parallelo; erit illud circulus tanto quidem major, quo a basi remotior (§. 468. *Geom.*).

PROBLEMA 4.

Tab. II. Fig. 17.

143. *Data semidiametro sphæræ lucidæ majoris* CG *una cum semidiametro opacæ minoris* IM *& distantia centrorum* GM; *invenire longitudinem umbræ* QH *seu axem coni umbrosi.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur FM ipsi CH parallela. erit IM = CF (§. 226. *Geom.*), adeoque FG differentia semidiametrorum GC & IM, consequenter (§. 268. *Geom.*):
   Ut FG differentia semidiametrorum ad GM distantiam centrorum;
   Ita CF semidiameter sphæræ opacæ ad MH distantiam verticis coni umbrosi a centro sphæræ opacæ.
2. Quodsi ratio PM ad MH valde exigua fuerit, ita ut MH & PH notabiliter non differant; MH pro axe Coni umbrosi assumi potest. Alias mulctanda est parte PM: quæ ut inveniatur.
3. Quæratur arcus LK (§. 115). Hic enim a quadrante subductus relinquit arcum IQ, qui est mensura anguli IMP (§. 57. *Geom.*). Cum adeo in triangulo MIP ad P rectangulo præter angulum IMQ etiam detur latus IM semidiameter corporis opaci; reperietur MP (§. 36. *Trigon.*)

E. gr. Si semidiameter Telluris MI = 1,

$=1$, erit juxta *Ricciolum* semidiameter Solis AG $= 33$, distantia Solis a terra GM $= 7300$, adeoque GF $= 32$. Unde MH $= 228\frac{1}{4}$. Quoniam angulus MIP est tantum 15′; MP ad MH est ut sinus 15′ ad sinum totum, adeoque ut 43635 ad 10000000, seu ut 1 ad 252 (§. 181. *Arithm.*). Cum adeo PM non sit nisi $\frac{1}{252}$ ipsius GM, ast PH $= 228\frac{1}{4}$ GM; poterit PM tuto negligi, adeoque etiam PH $228\frac{1}{4}$ semidiametrorum terrestrium assumi potest.

COROLLARIUM.

144. Quoniam ratio distantiæ corporis opaci a luminoso GM ad longitudinem umbræ MH constans est, nempe in omni casu ut differentia semidiametrorum GF ad semidiametrum sphæræ opacæ CF vel MI (§. 173. *Arithm.*); si distantia minuitur, longitudo quoque umbræ minor evadere debet (§. 203. *Arithm.*). Opaci igitur sphærici ad luminosum sphæricum majus accedentis umbra decrescit.

DEFINITIO 29.

Tab. II. Fig. 20. 145. Si per extremitates objecti opaci S & T ducantur parallelæ TV & SQ; angulus TVS, quem radius per verticem S transiens & umbram in V terminans cum recta TV efficit, dicitur *Altitudo luminosi.* Perinde vero est, sive recta ST jungens extremitates luminosi sit ad rectam TV, quæ extremitatem unam objecti T cum extremitate umbræ V jungit, perpendicularis, sive sub quocunque angulo ad eandem inclinata, veluti si fuerit SZ.

PROBLEMA 5.

146. ***Data altitudine corporis opaci* TS *&* altitudine luminosi *e. gr.* Solis supra horizontem, *hoc est, angulo* SVT, *invenire longitudinem umbræ in plano horizontali* TV.** Tab. II. Fig. 20.

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo STV ad T rectangulo (§. 227. *Geom.*) datur angulus V una cum latere TS, *per hypoth.* invenietur longitudo umbræ TV (§. 36. *Trigon.*).

E. gr. Sit altitudo solis 37° 45′, altitudo turris 187 pedum; reperietur TV $241\frac{1}{2}$ pedum. Nimirum

Log. Sin. V.	97869056
Log. TS.	22718416
Log. Sin. S.	98980060
	12.1.69.8476
Log. TV	2.3829420, cui in

canone quam proxime respondent 2415″.

PROBLEMA 6.

147. ***Data altitudine corporis opaci* TS *una cum longitudine umbræ* TV; *invenire altitudinem Solis supra horizontem.*** Tab. II. Fig. 20.

RESO-

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo STV ad T rectangulo dantur crura TV & TS, invenietur angulus V, qui metitur altitudinem Solis, inferendo (§. 38. *Trigon.*).

Ut longitudo umbræ TV
ad altitudinem corporis opaci TS;
ita sinus totus
ad tangentem altitudinis Solis supra horizontem.

E. gr. Sit TS 30 pedum; TV 45′; reperietur TVS 3° 41′. Nempe

Log. TV	16532125
Log. TS	14771212
Log. Sin. Tot.	100000000

Log. Tang. TVS 9.8239087, cui in canone quam proxime respondent 33° 41′.

THEOREMA 22.

Tab. II. Fig. 22. 148. *Si altitudo luminosi v. gr. Solis supra horizontem* TVS *fuerit* 45°; *longitudo umbræ* TV *altitudini corporis opaci* TS *æqualis est.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus ad T rectus est, si TVS fuerit 45° seu semirectus, etiam alter TSV semirectus erit (§. 241. *Geom.*), consequenter TV = TS (§. 253. *Geom.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

149. *Longitudines umbrarum* TZ *&* TV *ejusdem corporis opaci* TS *in plano horizontali pro diversa altitudine luminosi sunt ut cotangentes altitudinum luminosorum.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim TZ & TV longitudines umbrarum: erunt TZS & TVS altitudines luminosi (§. 145). Quodsi TS sumatur pro sinu toto, erunt TZ & TV tangentes angulorum TSZ & TSV (§. 7. *Trigon.*), consequenter cotangentes altitudinum TZS & TVS (§. 11. *Trig.*). Sunt itaque umbrarum longitudines ut cotangentes altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

150. Quoniam cotangens anguli majoris minor est cotangente anguli minoris (§. 11. *Trigon.*); luminoso ascendente umbra decrescit.

COROLLARIUM 2.

151. Hinc umbræ corporum meridianæ hieme longiores sunt quam æstate, & singulis diebus umbræ meridianæ breviores sunt antemeridianis & pomeridianis.

THEOREMA 24.

152. *Si duorum opacorum parallelorum & ad horizontem perpendicularium* AB *&* DE *umbræ* BC Tab. II. Fig. 21.

BC & DC *eodem radio* AC, *vel diversis æque altis terminentur; altitudinibus opacorum* AB & DE & , *si opaca fuerint ad lineam horizontalem similiter inclinata, etiam longitudinibus eorum proportionales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim DE est ipsi AB parallela, *per hypoth.* si umbræ eodem radio AC terminantur, erit in casu opacorum perpendicularium ad horizontem CD : CB = DE : DA (§. 268. *Geom.*). *Quod erat primum.*

Tab. VII. Fig. 81. Quodsi vero fuerint opaca AB & EF ad horizontem BC inclinata, erit angulus ABC = EFC (§. 233. *Geom.*) &, cum præterea angulus C utrique triangulo ABC & EFC communis sit; CB : CF = BA : FE & CB : CF = AD : EG (§. 396. *Geom.*). *Quod erat secundum.*

Tab. II. Fig. 25. Si umbræ radiis æque altis AC & E*c* terminentur; erunt in casu opacorum AB & ED ad horizontem perpendicularium in utroque triangulo ABC & ED*c* anguli B & D recti, anguli vero obliqui C & *c* æquales (§. 145), adeoque denuo D*c* : BC = DE : AB (§. 267. *Geom.*). *Quod erat tertium.*

Denique si umbræ radiis æque altis AC & EC terminentur & plana AB atque EF ad horizontem similiter inclinata; erit anglus ABC = EFC & ACB = ECF, consequenter cum △ ABC ∽ △ EFC (§. 267. *Geom.*), BC : FC = BA : FE = DA : GE (§. 396. *Geom.*). *Quod erat quartum.* Tab. VII. Fig. 81.

PROBLEMA 7.

153. *Mediante umbra in planum horizontale projecta metiri altitudinem objecti cujuscunque opaci, e. gr. turris* AB. Tab. II. Fig. 22.

RESOLUTIO.

1. In termino umbræ turris C baculo infixo, fune aut catena horizontaliter extensa metire longitudinem umbræ AC (§. 126. *Geom.*).
2. Defigatur in terra baculus notæ altitudinis DE ad horizontem perpendicularis &
3. Investigetur ut ante longitudo umbræ EF.

Dico esse EF : AC = DE : AB.

E. gr. Sit AC = 45′, ED = 5′, EF = 7; erit AB = 45. 5 : 7 = 32$\frac{1}{7}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ob ingentem distantiam Lunæ & Solis a terra angulus F æqualis deprehenditur ipsi C, si bacu-

baculus prope turrim in terra defixus umbram EF projicit, umbra turris AC & baculi EF radiis terminantur æque altis (§. 145). Est ergo EF : AC = DE : AB (§. 152). *Q. e. d.*

SCHOLION.

154. *Si alio lumine, quam solari aut lunari, collustratum objectum* AB *umbram projiceret in* C; *baculus* DE *ita infigi deberet, ut ejus umbra etiam in* C *terminaretur* (§. 152).

PROBLEMA 8.

155. ***Mediante umbra partim in planum horizontale, partim in verticale, hoc est, in planum ad prius perpendiculare projecta, altitudinem objecti opaci e. gr. turris metiri.***

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 23.

1. Metire primum umbram horizontalem AK (§. 126. *Geom.*).
2. Pertica ad planum verticale applicata investiga altitudinem umbræ verticalis KL.
3. Hac in terra ita defixa, ut nonnisi pars ipsi KL æqualis emineat, metire longitudinem umbræ ejus.
4. Quoniam hæc addita umbræ AK conficit longitudinem umbræ a turri projiciendam, remota domo MK; erit (§. 153), ut longitudo umbræ perticæ ad longitudinem umbræ turris modo inventam, ita altitudo LK ad altitudinem turris AB.

E. gr. Sit AK = 20′, KL = 12′, umbra a pertica 12 pedum projecta = 8; erit AB = 28. 12 : 8 = 7. 6 = 42.

THEOREMA 25.

156. ***Æqualium opacorum ad horizontem perpendicularium umbræ habent longitudines distantiis suis ab eodem luminoso vel luminosis æque altiis proportionales.***

DEMONSTRATIO.

Sit EF longitudo umbræ opaci DE, BC longitudo umbræ opaci AB, & tam GH, quam AB & DE ad HF perpendiculares, erit BH distantia opaci AB a luminoso G & EH distantia opaci DE ab eodem luminoso G (§. 225. *Geom.*). Et quia tum AB, tum DE ipsi HG parallela (§. 256. *Geom.*); erit porro AB : GH = BC : CH & DE : GH = EF : FH (§. 268. *Geom.*), consequenter ob AB = DE *per hypoth.* AB : GH = DE : GH (§. 168. *Arithm.*) ac ideo BC : CH = EF : FH (§. 167. *Arithm.*). Unde porro BH : BC = EH : EF (§. 193. *Arithm.*), adeoque tandem BH : EH = BC : EF (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 24.

CO-

COROLLARIUM.

157. Luminoso igitur ad opacum, vel opaco ad luminosum accedente, umbra augetur; recedente alterutro, minuitur.

SCHOLION.

158. *Ex diversa igitur longitudine umbrarum ejusdem opaci in eadem altitudine Solis, Lunæ, Jovis ac Veneris supra horizontem, colligere licet diversam eorundem a terra distantiam: quamvis ad hanc diversitatem distincte cognoscendam non sufficiat hæc methodus, ut ex Astronomia inferius constabit.*

DEFINITIO 30.

159. ***Umbra recta*** est, quam projicit corpus opacum ad horizontem perpendiculare in plano horizontali.

SCHOLION.

160. *Tales sunt umbræ hominum erectorum, ædificiorum, montium, arborum.*

DEFINITIO 31.

161. ***Umbra versa*** est, quam projicit opacum perpendiculariter affixum plano ad horizontem perpendiculari in hoc planum.

SCHOLION.

162. *Talis est umbra, quam projiciunt brachia hominis extensa: talis quoque est styli muro perpendiculariter infixi.*

THEOREMA 26.

163. ***Umbra recta* BF *est ad altitudinem opaci* GF, *ut cosinus altitudinis luminosi* DH *ad sinum* DE.** Tab. II. Fig. 25.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BF est umbra recta opaci GF *per hypoth.* erit GF ad BC perpendicularis (§. 159): & cum angulus B sit altitudo luminosi (§. 145), erit DE sinus, DH vel BE cosinus altitudinis luminosi (§. 2. 11. *Trigon.*), & DE etiam perpendicularis ad BC (§. 3. *Trig.*), consequenter DE ipsi GF parallela (§. 256. *Geom.*), adeoque BE : ED = BF : GF (§. 268. *Geom.*), hoc est, ut cosinus ad sinum altitudinis luminosi ita umbra recta ad altitudinem opaci. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

164. Jam cum sinus & cosinus æquales sint, altitudine luminosi DBC 45 graduum existente (§. 241. 253. *Geom.*), in minore autem altitudine majores, in majore minores (§. 189. *Geom.*); patet umbram rectam fieri in altitudine luminosi 45° altitudini objecti æqualem; in minori altitudine vero majorem, in majori minorem, quorum prius jam supra (§. 148) demonstratum.

THEOREMA 27.

165. ***Si altitudo luminosi fuerit eadem,***

Tab. II. Fig. 26. *eadem, erit opacum AC ad umbram versam AD, ut umbra recta EB ad opacum suum DB.*

DEMONSTRATIO.

Sint AC & EB ad AB perpendiculares, ducaturque recta EC. Quodsi CE fuerit radius luminosi; erit AD umbra versa ipsius AC (§. 161) & EB umbra recta ipsius DB (§. 159). Quare cum verticales ad D sint æquales (§. 156. *Geom.*); erit EB : DB = AC : AD (§. 267. *Geom.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

166. Quoniam umbra recta ad opacum suum ut cosinus ad altitudinem luminosi (§. 163); erit etiam opacum ad umbram versam ut cosinus altitudinis luminosi ad ejus sinum (§. 167. *Arithm.*), consequenter umbra versa AD ad opacum suum AC ut sinus altitudinis luminosi ad ejus cosinum (§. 173. *Arithm.*).

SCHOLION.

167. *Idem quoque inde patet, quod per demonstrata angulus C sit altitudini luminosi E æqualis. Quodsi enim CD sumatur pro sinu toto, erit AD sinus, AC cosinus altitudinis luminosi* (§. 2. 11. Trigon.)

COROLLARIUM 2.

168. Si DB = AC seu longitudo opacorum eadem; erit tum DB media proportionalis inter EB & AD (§. 156. *Arithm.*), hoc est, longitudo opaci est media proportionalis inter umbram ejus rectam & versam sub eadem luminosi altitudine.

COROLLARIUM 3.

169. Quando angulus C est 45°, sinus & cosinus æquales sunt, adeoque umbra versa longitudini opaci æqualis: quod idem de recta supra ostensum (§. 164).

THEOREMA 28.

170. *Umbra recta est ad versam ejusdem opaci sub eadem altitudine luminosi in ratione duplicata cosinus ad sinum altitudinis luminosi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim umbra recta ad longitudinem opaci ut longitudo opaci ad umbram versam (§. 168), consequenter ut prima proportionalium ad tertiam (§. 155. *Arithm.*). Quamobrem umbra recta ad umbram versam est in ratione duplicata umbræ rectæ ad longitudinem opaci (§. 216. *Arithm.*), seu ut quadratum umbræ rectæ ad quadratum longitudinis opaci (§. 259. *Arithm.*). Est vero umbra recta ad longitudinem opaci ut cosinus altitudinis luminosi ad sinum ejusdem (§. 163), consequenter & quadratum illius ad quadratum hujus ut quadratum cosinus alti-

tudinis luminosi ad quadratum sinus (§. 260. *Arithm.*). Ergo etiam umbra recta ad versam ut quadratum cosinus altitudinis luminosi ad sinum ejusdem (§. 167. *Arithm.*), consequenter in ratione duplicata cosinus altitudinis luminosi ad sinum ejusdem (§. 259. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

171. *Umbrarum rectarum & versarum usus est in Geodæsia: earum enim ope commode metimur altitudines tum accessibiles, tum inaccessas, etiam cum corpus nullam umbram projicit. Utimur autem umbris rectis, quamdiu umbra corporis altitudinem ejus non excedit; umbris autem versis, quando umbra altitudine major: quod quomodo fiat, problemata sequentia exponunt.*

PROBLEMA 9.

172. ***Quadratum Geometricum construere, hoc est, instrumentum, cujus ope ratio umbræ rectæ atque versæ ad altitudinem objecti investigari potest.***

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 27. 1. Paretur quadratum ADGB vel ex orichalco, vel ex ligno, arbitrariæ magnitudinis. Latus orichalcei communiter unius pedis; lignei vero pedis unius cum dimidio esse solet.

2. Rectis AD & DG in 100 particulas æquales divisis (vel in plures, si majus fuerit; vel etiam in pauciores, si minus fuerit, e. gr. more veterum in 12) ducantur rectæ iis æquidistantes & ad puncta divisionum singula ducantur inter eas rectæ versus centrum B convergentes.

3. Ad latus AB aptentur pinnulæ E & F; in centro vero B alligetur filum BH cum appenso pondere H.

4. Denique ad latus DG e regione minutorum scribatur *umbra recta*; ad latus vero alterum AD *umbra versa*: numerenturque partes umbræ rectæ a G versus D; umbræ versæ ab A versus idem D.

Dico, si per pinnulas E & F in verticem objecti collimes; centro B eidem opposito, partem lateris DG a filo abscissam esse ad latus integrum BG uti umbra recta est ad altitudinem objecti; similiterque partem lateris AD ab eodem filo resectam esse ad latus integrum AD uti est umbra versa ad altitudinem objecti, vel etiam latus integrum ad partem AD ab eodem filo resectam ut umbra recta ad altitudinem objecti.

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 28. I. Concipiamus enim radium visualem AC per pinnulas E & F transeuntem protendi usque in C donec longitudinem umbræ rectæ BC definiat, resecare in hoc instrumenti situ partem umbræ rectæ GF. Quoniam angulus E utrique triangulo EGF & EDC communis, angulus F rectus (§. 98. *Geom.*), D itidem rectus (§. 215. *Mechan.*); erit GF : FE = DC : DE (§. 267. *Geom.*). Quoniam vero DE perpendicularis ad BC *per demonstr.* & AB objecti altitudo *per hypoth.* ad eandem BC perpendicularis (§. 227. *Geom.*), adeoque DE ipsi AB parallela (§. 256. *Geom.*); DC : DE = BC : AB (§. 268. *Geom.*), adeoque GF : FE = BC : AB (§. 167. *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Tab. III. Fig. 29. II. Concipiamus similiter radium visualem AF continuari, donec in C umbram rectam BC opaci AB in hoc situ instrumenti definiat & filum EG resecare partem umbræ versæ HG. Quoniam angulus H rectus est (§. 98. *Geom.*) & D itidem rectus (§. 215. *Mech.*), ob parallelismum vero linearum HI & EF (§. 336. *Geom.*) $o = x$ (§. 233. *Geom.*); erit etiam $u = y$ (§. 246. *Geom.*), consequenter u altitudini luminosi æqualis (§. 145). Quodsi jam EG sumatur pro sinu toto, erit HG sinus (§. 2. *Trigon.*), HE cosinus (§. 11. *Trigon.*) altitudinis luminosi. Est adeo HG ad HE ut sinus altitudinis luminosi ad ejus cosinum, consequenter ut umbra versa ad longitudinem opaci (§. 166). *Quod erat alterum.*

III. Denique quoniam triangula HEG & DEC sibi mutuo æquiangula *per demonstr.* erit EH : HG = DC : DE (§. 276. *Geom.*). Et quoniam eodem modo, quo *num.* 1. patet, esse DC : DE = CB : BA; erit etiam EH : HG = BC : BA (§. 167. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Tertium infertur etiam hoc modo: Latus quadrati HE ad partem umbræ versæ a filo resectæ HG ut altitudo objecti ad umbram versam *vi num.* 3. Ergo etiam ut umbra recta ad altitudinem objecti (§. 164). *Q. e. d.*

SCHOLION.

173. *Plerumque quadratum Geometricum cum quadrante conjungunt: quo in casu præterea opus est regula cum Dioptris circa centrum* B *mobili.* Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 10.

174. *Altitudinem accessibilem* AB *tam per umbram rectam, quam versam metiri.* Tab. III. Fig. 30.

RESOLUTIO.

Statione in D ad arbitrium electa, & ejus ab altitudine AB distantia DB investigata (§. 126. *Geom.*) quadratum geometricum huc illucque vertatur, donec per pinnulas collineanti apex altitudinis A occurrat. Quodsi filum umbram rectam secet, inferatur:

Ut pars umbræ rectæ resecta
ad latus quadrati geometrici,
ita distantia stationis DB
ad partem altitudinis AE.

Quodsi vero filum umbram versam secet, inferatur:

Ut latus quadrati geometrici
ad partem umbræ versæ resectam,
ita distantia stationis DB
ad partem altitudinis AE.

Cum adeo in utroque casu AE per regulam trium inveniri possit, si ipsi repertæ partem altitudinis BE, hoc est, in planitie horizontali altitudinem oculi tui addas; prodibit altitudo quæsita integra AB.

E. gr. Sit BD = EC = 36; umbra recta 64. Quoniam latus quadrati est 100; erit EA = 100. 36 : 64 = $56\frac{1}{4}$ pedum. Quare si addatur EB, quæ sit $5\frac{3}{4}$ pedum; prodibit altitudo AB = 62'. Sit BD = EC = 188', umbra versa 50: erit EA = 188. 50 : 100 = 94'. Quare si addatur EB $5\frac{3}{4}$ pedum; prodibit AB = $99\frac{3}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam EC ipsi BF parallela, *per hypoth.* erit BF : BA = CE : EA (§. 268. *Geom.*). Est vero etiam BF : BA ut umbra recta a filo resecta ad latus quadrati (§. 172). Ergo ut umbra recta a filo resecta ad latus quadrati, ita E C ad E A (§. 167. *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Porro latus quadrati est ad partem umbræ versæ a filo resectam ut umbra recta ad altitudinem AB (§. 172). Ergo etiam ut CE ad EA, *per demonstrata. Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

175. Quodsi ergo filum in diagonalem quadrati cadit; erit EC = EA, seu altitudo objecti demta altitudine oculi est distantiæ ab objecto æqualis.

PROBLEMA II.

176. *Metiri altitudinem inaccessam per umbram rectam, itemque per umbram versam.* Tab. III. Fig. 30.

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes in D & H investigeturque distantia DH vel CG (§. 126. *Geom.*).

2. Ob-

2. Observetur, ut in problemate præcedente, quamnam partem umbræ vel rectæ, vel versæ in quadrato Geometrico filum resecet.

3. Quodsi filum in utraque statione umbram rectam secet, inferatur.

Ut differentia umbrarum rectarum in utraque statione designatarum
ad latus quadrati;
ita distantia stationum GC
ad altitudinem EA.

4. Si filum in utraque statione umbram versam secet, inferatur:

Ut differentia umbrarum versarum in utraque statione designatarum
ad umbram versam minorem;
ita distantia stationum GC
ad intervallum GE.

Quo dato ope umbræ versæ in G repertæ, altitudinem EA invenies ut in problemate præcedente.

Tab. III. Fig. 30.

5. Si denique filum in prima statione G secet umbram rectam, in altera C umbram versam; inferatur:

Ut differentia facti ex umbra recta in versam a Quadrato lateris Quadrati
ad factum ex latere Quadrati in umbram versam;
Ita distantia stationum GC
ad altitudinem quæsitam AE.

E. gr. Sit in casu primo distantia stationum GC = 25, umbra recta in G 20, in C 35; erit EA = 25. 100:(35 − 20) = 166⅔.

Sit in casu secundo distantia stationum GC = 200, umbra versa in G 66, in C vero 33; erit EG 33. 200:33 = 200. Unde per problema præcedens reperitur EA = 66. 200:100 = 132.

Sit in casu tertio distantia stationum GC = 150, umbra recta in G = 88, umbra versa in C = 60: erit EA = 100. 60. 150:(10000 − 60. 88) = 190 $\frac{40}{59}$ seu fere 191.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut umbra recta in G ad latus quadrati ita EG ad EA & ut umbra recta in C ad latus quadrati ita CE ad EA (§. 174), adeoque umbra recta in G ad umbram rectam in C ut GE ad CE (§. 195. *Arithm.*), consequenter ut differentia umbrarum rectarum ad umbram rectam in G ita distantia stationum GC ad GE (§. 193. *Arithm.*). Quare cum etiam sit ut umbra recta in G ad latus quadrati ita EG ad EA (§. 174); erit ut differentia umbrarum rectarum ad latus quadrati ita di-

ſtantia ſtationum GC ad altitudinem EA (§. 194. *Arithm*). *Quod erat primum.*

Porro ut latus quadrati geometrici ad umbram verſam in G ita GE ad EA & ut latus quadrati ad umbram verſam in C ita CE ad EA (§. 174). Ergo umbra verſa in G eſt ad umbram verſam in C ut CE ad EG (§. 200. *Arithm.*), conſequenter differentia umbrarum verſarum eſt ad umbram verſam in C ut diſtantia ſtationum GC ad diſtantiam ſtationis primæ ab altitudine quæſita EG (§. 193. *Arithm.*). *Quod erat ſecundum.*

Denique ſit umbra recta in G $=r$, verſa in $C=v$, $GC=d$, $EG=x$: latus quadrati $=l$ erit ob $r:l=x:EA$ & $l:v=d+x:EA$ (§. 174)

$$lx:r=(vd+vx):l$$

$$l^2x=rvd+rvx$$

$$l^2x-rvx=rvd$$

$$x=rvd:(l^2-rv).$$

Quare cum ſit $EA=lx:r$ *per demonſtr.* valore ipſius x ſubſtituto, reperitur $EA=lvd:(l^2-rv)$, conſequenter $l^2-rv:lv=d:EA$. *Quod erat tertium.*

CAPUT IV.

DE
COLORIBUS.

DEFINITIO 32.

177. *Radius rubeus* eſt, qui efficit ſenſum coloris rubri. *Radius flavus* eſt, qui efficit ſenſum coloris flavi. Unde patet, quinam porro dicantur *virides*, *cærulei*, *violacei* aut alio modo colorati.

SCHOLION.

178. *Si radii luminis a corporibus illuminatis reflexi eodem modo oculum afficerent, fieri ſane nullo modo poſſet, ut aliorum color appareret ruber, aliorum flavus, aliorum viridis, aliorum cæruleus, aliorum violaceus & ita porro* (§. 43). *Alia igitur eſſe debet diſpoſitio radiorum, qui efficiunt, ut objecta videantur rubra; alia vero eorum, qui objecta exhibent flava, viridia, cærulea, violacea, vel alio colore tincta. Quamvis autem a propoſito noſtro alienum exiſtimemus ut inquiramus, in quonam diſpoſitio illa conſiſtat; nil tamen obſtat, quo*

minus per eam licet obſcure cognitam doctrinæ gratia radios diſtinguamus & hoc intuitu alios rubeos, alios flavos, alios virides &c. appellemus.

DEFINITIO 33.

179. *Refrangibilitas radiorum* eſt diſpoſitio patiendi refractionem.

DEFINITIO 34.

180. *Refrangibilitas major* eſt diſpoſitio ad majorem refractionem ſub eodem angulo incidentiæ. *Minor* vero eſt diſpoſitio ad minorem refractionem ſub eodem angulo incidentiæ.

DEFINITIO 35.

181. *Reflexibilitas radiorum* eſt diſpoſitio patiendi reflexionem.

DEFINITIO 36.

182. *Reflexibilitas major* eſt diſpoſitio ad majorem reflexionem ſub eodem angulo incidentiæ. *Reflexio* autem *major* cenſetur, ſi radii aut copioſiores aut citius in totum reflectuntur.

OBSERVATIO 9.

Tab. III. Fig. 31. 183. *Si radius luminis per exiguum foramen rotundum, cujus latitudo quartam digiti partem haud excedit, in conclave obſcurum intromiſſus priſmate vitreo trigono* ABC *ita excipiatur, ut prope angulum* C *per illud tranſeat; in charta alba* EF *colores iridis vivaciſſimi conſpiciuntur, nempe in* E *rubeus, deinde flavus, proxime viridis, poſtea cæruleus, & tandem purpureus ſeu violaceus. In quacunque a priſmate diſtantia lumen exceperis charta aut corpore alio; iidem conſtanter apparebunt colores. Quemadmodum vero hoc lumen coloratum per lineas rectas inſtar reliqui propagatur; ita quoque a ſpeculo reflectitur & per lentem vitream convexam refringitur, ſuosque colores tam poſt reflexionem, quam refractionem retinet. Cum tamen radii in foco coarctantur, in lumen ſplendidum degenerant, mox, ubi poſt focum rurſus divergunt, colores priſtinos recuperantes. Neque injucundum eſt, ſpectare particulas in aëre volitantes eodem colore reſplendentes, quo imbuti ſunt radii ipſas illuſtrantes. Nempe in lumine viridi virides, in cæruleo cærulei, in rubro rubri apparent & colorati ſplendorem retinent.*

COROLLARIUM 1.

184. Cum lumini in tranſitu per priſma nil accidat, niſi quod refringatur tum in ingreſſu, tum in egreſſu (§. 54) (utraque refractio oculis ipſis admodum diſtincte obvia, dum experimentum capitur); per ſolam refra-

refractionem lumen in colores mutari poteſt.

COROLLARIUM 2.

185. Quoniam radii colorati adhuc per lineas rectas propagantur, ſi a ſpeculis reflectantur, immo etiam in lentibus vitreis refringantur (§. 183); omnes luminis proprietates retinent (§. 46. 51. 54), conſequenter adhuc lumen ſunt.

COROLLARIUM 3.

186. Et quia radii colorati post focum invertuntur, ſuumque colorem ſtatim recuperant, quem ante focum habuerant (§. 183); in foco decusſantur, adeoque invicem permiſcentur, conſequenter radii colorati, ſpeciatim rubei, flavi, virides, cœrulei, purpurei ſeu violacei, ſub conveniente proportione commixti lumen album reſplendens generant.

COROLLARIUM 4.

187. Radii colorati non mutantur, etiamſi a corporibus opacis reflectantur. Reflexio igitur eorum diſpoſitionem non immutat.

SCHOLION 1.

Tab. I. Fig. 5. 188. *Iidem colores comparent, ſi radius ſolis* LM *oblique incidat in vitrum conicum* HKI.

SCHOLION 2.

289. *Experimentum equidem ſuccedit, etiamſi conclave non fuerit obſcurum; in obſcuro tamen colores non modo clariores, verum etiam magis diſtincti apparent.*

OBSERVATIO 10.

190. *Priſma* DEF *ita collocetur, ut refractiones luminis ad ingreſſum & egresſum ſint inter ſe æquales: id quod obtinetur, ſi illud circa axem lente convertas, donec lumen coloratum, quod nunc aſcendit, nunc deſcendit, inter aſcenſum & deſcenſum ſtationarium videatur. Hunc enim ſitum convenientisſimum judicat vir ſummus* Newtonus (f). *In medio ſpatio inter priſma* DEF *& lumen coloratum in pariete depictum* NO (§.183) *collocetur priſma alterum* GH, *quod excipiat lumen coloratum* LM *ſibi parallelum. Poſt alteram refractionem in hoc ſecundo priſmate factam lumen coloratum in pariete depictum* IK *inclinabitur ad ſimile lumen* NO, *quod remoto priſmate* GH *ibidem cernitur, ita ut extremitates cœruleæ* N & I *longiori intervallo a ſe invicem diſtent rubris* O & K. Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM 1.

191. Neceſſe igitur eſt, ut radii cœrulei magis refringantur quam rubri & diſpar etiam ſit refractio in radiis intermediis.

CO-

(f) Optic. lib. 1. part. 1, prop. 2. p. 23. edit. Lat. ſec.

COROLLARIUM 2.

192. Radii igitur luminis solaris non ejusdem sunt refrangibilitatis (§. 179), consequenter cum ratio diversæ refringibilitatis intrinseca sit, nec ejusdem naturæ.

OBSERVATIO 11.

193. *Si fasciæ chartæ oblongæ & rigidæ, lateribus inter se parallelis definitæ, cujus dimidia pars colore rubro, altera cæruleo infecta, filum serici nigrum atque tenue aliquoties circumvolvas & ante eam in situ ad horizontem perpendiculari collocatam candelam accensam statuas, tandem in distantia 6 circiter pedum lentem vitream totidem fere pedum eamque utrinque convexam & uncias circiter* $4\frac{1}{4}$ *latam apponas, ut chartæ coloratæ imago post eam in charta alia alba depingatur* (§.61); *animadvertes, ubi imago cærulea distincta comparet, ibi confusam esse rubram, ita ut fila serica vix discerni possint & contra, majoremque requiri distantiam chartæ albæ a lente, si rubræ imago distincta esse debet, quam ubi cæruleam distinctam desideraveris.*

COROLLARIUM.

194. Quoniam imago ibi videtur distincta, ubi radii ab uno objecti puncto emanantes in uno iterum uniuntur (§. 75. 76); radii cærulei citius convergunt, quam rubri (§. 83. *Geom.*). Majorem igitur refractionem patiantur necesse est (§. 39), consequenter radii ab objectis diversimode coloratis reflexi non sunt æque refrangibiles (§. 180).

OBSERVATIO 12.

195. *Si prisma* DFE, *cujus anguli* D *&* E *semirecti, foramini* C *ita objiciatur, ut lumen coloratum a basi in* G *reflectatur; primo lumen cæruleum* HG *totum reflecti observabitur, cum reliquum adhuc in* IK *refringetur, & ultimo tandem loco reflectetur rubrum.* Tab. III. Fig. 33.

COROLLARIUM 1.

196. Radii igitur diversi coloris differunt gradibus reflexibilitatis (§. 181).

COROLLARIUM 2.

197. Et quoniam lumen cæruleum celerius reflectitur ceteris, rubrum vero tardissime omnium (§. 195); lumen cæruleum reflexibilius est ceteris, rubrum vero reflexibilitatem minimam habet (§. 182).

COROLLARIUM 3.

198. Sunt igitur iidem radii magis reflexibiles, qui magis refrangibiles existunt (§. 191).

SCHOLION 1.

199. *Refrangibilitatis & reflexibilitatis diversitatem ignorarunt Philosophi, donec eandem in apricum produceret vir ingeniosissimus magnoque suo meri-*

merito celeberrimus Isaacus Newtonus (g). *Ab anno* 1675. *in Transactionibus Anglicanis eam cum eruditis communicavit & ab objectionibus nonnullorum ita vindicavit, ut ipsi antagonistæ sibi satisfactum esse confiterentur* (h). *Demum clarius eandem exposuit & magna experimentorum copia confirmavit in præclaro* Optices *opere. Ac postea eadem experimenta coram Societate Regia repetiit*, Monmortio *Gallo tunc in Anglia agente aliisque ex Academia Regia scientiarum Parisina præsentibus* Cel. Desagulierius (i). *Describit quoque eadem experimenta* Cel. Guliel. Jac. 's Gravesande, *& modum eadem facile repetendi exponit, omni apparatu huc necessario accurate descripto* (k). *Id vero palmarium est in hac doctrina, ut evincatur, radios sua natura esse diversimode refrangibiles nec coloratos in aliud lumen iterata refractione transmutari posse: quod ut ostendatur, radios luminis heterogeneos a se invicem separari necesse est, quemadmodum problemate sequente docetur.*

PROBLEMA 12.

200. ***Luminis solaris radios heterogeneos a se invicem separare.***

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 82.

1. Per parvulum operculi fenestræ foramen rotundum F v. gr. $\frac{1}{10}$ unius digiti in cameram obscuram contra omnem luminis accessum optime munitam immittatur radius Solis. Quodsi lumen coloratum latius desideres, foramen præstat esse oblongum, v. gr. ut longitudo sit digiti unius vel duorum, latitudo vero $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{20}$ ejusdem digiti.
2. In distantia decem vel duodecim pedum excipiatur is lente convexa MN, imaginem Solis I in distantia sex, octo, decem duodecimve pedum delineatura, pro diversa ejus forma, juxta ea, quæ in Dioptricis demonstranda hic tanquam a posteriori nota supponi possunt (§. 75).
3. Pone lentem collocatur prisma ABC, quod lumen per illam transmissum refractione transmutat in imaginem Solis oblongam & coloratam *pt* (§. 183) eadem fere distantia charta alba excipiendam, qua imago rotunda *num*. 2. excipiebatur, huc tamen illucve movenda, donec rectilinea imaginis latera quam maxime distincta appareant.

Aliter.

1. Foramen majus, cujus latitudo circiter pollicum lamina metal- Tab. VII. Fig. 83.
2

(g) Transact. Anglic. n. 80. p. 3075. it. n. 83. p. 4061. & seqq. &c.
(h) Vid. Transact. Anglican. n. 45. p. 5018
(i) Transact. Anglic. Num. 348. p. 433. & seqq.
(k) in Phys. Element. Mathem. Tom. 2. c. 19. 20. p. 84. & seqq.

tallica muniatur, in quo nonnisi exiguum admodum sit foramen F, veluti $\frac{1}{12}$ unius digiti.

2. Quodsi radius luminis per id in cameram obscuram incidens fuerit admodum declivis, ope speculi B ita reflectatur, ut pavimento sit ad sensum parallelus, quo citra inclinationem ad ipsum longius progrediatur, & ad corrigendam irregularitatem reflexionis excipiatur tabula T ad libitum attollenda, vel deprimenda, donec is transeat per foramen f $\frac{1}{12}$ unius digiti.

3. Radius per foramen f transiens excipiatur lente utrinque convexa L in distantia diametri convexitatis, veluti 9 pedum, si radius fuerit $4\frac{1}{2}$ pedum.

4. Pone lentem L statuatur prisma P eo situ, ut axis sit ad horizontem perpendicularis & radius per lentem refractus nova refractione in prismate facta abeat in imaginem coloratam oblongam.

Dico lumina heterogenea ita a se invicem esse separata, ut singula lumina colorata pro simplici lumine haberi possint: id quod per sequens experimentum a posteriori patet, & ex superioribus cum *Newtono* ita ostenditur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam spectrum oblongum coloratum, quod vi primæ refractionis prodit, secunda refractione in latus facta, non sit imago quadrata, sed priori similis situ tantummodo inclinato (§. 190); evidens est lumen secunda refractione non æque in latitudinem, quemadmodum prima in longitudinem extendi. Quoniam latitudo imaginis ea est, quæ Solis diametro respondet, & lateribus parallelis excurrentibus superiori ac inferiori parte arcu convexo terminatur; porro hinc colligitur imaginem oblongum ex tot constare circulis seu imaginibus rotundis, quot sunt colores diversi, & secunda refractione, cum similis prorsus prodeat priori imago, unumquemque circulum uniformi refractione tantummodo alio transferri. Enimvero si majores fuerint circuli, foramine ampliori existente invicem confunduntur, ut lumen adhuc compositum sit. Quodsi vero diametri minuantur, foramine imminuto, centrorum situ atque distantiis minime mutatis, circuli minores non amplius, quemadmodum ante, confunduntur, ut minimum circa centrum cujuslibet circuli prodire debeat

lumen satis simplex, præsertim ubi lente utaris ad penumbram auferendam. Atque ita patet utroque, quem exposuimus modo, lumina heterogenea a se invicem separari. *Q. e. d.*

OBSERVATIO 13.

201. ***Quodsi imago colorata per problema præcedens facta radiorum separatione prodiens tabella inter latera sustentaculi sursum deorsum mobili excipiatur & per exiguum foraminulum lumen unius coloris solum transmissum ope prismatis secundi denuo refringatur, imago charta alba excepta est rotunda & ejusdem coloris sive oculo nudo, sive per prisma ipsam intuenti apparet, qui solus per foramen transmittebatur, nisi quod lumen rubrum altissimo, cæruleum infimo loco compareat. Ceterum experimentum eodem successu instituitur, si radius declivis luminis per foramen, cujus diameter est digiti dimidii, in cameram obscuram immissus per prisma in sustentaculo circa axem suum volubile in aliud reflectatur & in eo refractum, ut imago prodeat colorata, per foramen tabulæ inter ejusdem sustentaculi, quod prisma alterum circa axem volubile continet, latera sursum deorsum mobilis, cujus diameter nonnisi $\frac{1}{8}$ unius digiti, transmittatur; spectrum vero coloratum ut ante in distantia 10 aut 12 pedum excipiatur.***

COROLLARIUM 1.

202. Quoniam lumina colorata a permixtione separata nulla refractione amplius mutantur, sed eundem constanter colorem retinent; evidens est omne lumen homogeneum proprium habere colorem & lumina illa, qualia per prisma prodeunt, esse simplicia, atque eorum colores esse colores primarios, quorum permixtione prodeunt colores compositi.

COROLLARIUM 2.

203. Nullus adeo color ex modificationibus luminis oritur; colores vero permanentes corporum inde sunt, quod alia corpora alios radios copiosius reflectant.

SCHOLION 1.

204. *Hinc videas nullo alio lumine collustrata magis resplendere cærulea, quam cæruleo; nec rubra magis quam rubro ac ita porro.*

SCHOLION 2.

205. *Equidem industrius Naturæ scrutator* Mariottus *facto accurate experimento se observasse profitetur, cum in distantia* 30 *circiter pedum colorem violaceum, qui majus quam* 3½ *linearum spatium occupabat, per crenam duarum linearum trajectum prismate alio valde oblique opposito exciperet, quan-*

quandam ejus partem in colorem cæruleum & rubrum transmutatum fuisse, hincque falsitatem theoriæ Newtonianæ *concludit* (1). *Enimvero cum non totum lumen violaceum in alios diversos colores abierit; id saltem inde colligitur; separationem radiorum diversis coloribus imbutorum in prima refractione non fuisse absolutam: id quod experimento præsenti conforme, minime autem experimentum istud ad theoriam illam funditus evertendam facit, quemadmodum visum iis, qui radiorum heterogeneorum separationem Newtonianam ignorarunt.*

SCHOLION 3.

206. *Enimvero ut corpora hos radios facilius quam alios reflectant; ab ipsorum textura derivandum. Videmus enim mutata textura corporum, mutari quoque colorem. E. gr. si frustulis ligni nephritici aquam limpidam affundas, intra 24 circiter horarum spatium extrahetur color, qui oculo inter lumen seu fenestram & tincturam posito intense cæruleus minimeque perspicuus apparet, tinctura autem inter lumen seu fenestram & oculum collocata, perspicuus & ruber videtur. Quodsi olei vitrioli guttas aliquot instillaveris, quod vi corrosiva particulas ex ligno extractas dissolvit texturamque tincturæ variat; color ex omni parte flavus est. Si vero oleum tartari per deliquium affuderis, quod massulas dissolutas iterum coagulat, color pristinus anceps redit. Sed quoniam hæc & innumera alia physicæ sunt considerationis; ideo ea non persequimur, suo loco eadem reservantes.*

CAPUT V.

DE
VISIONE MAGNITUDINIS.

DEFINITIO 37.

Tab. III. Fig. 34. 207. *Angulus Opticus* seu *visorius* ABC est, quem intercipiunt radii AB & BC ab extremis objecti punctis in centrum pupillæ ducti.

DEFINITIO 38.

208. *Magnitudinem apparentem* appello, quam angulo optico metimur.

AXIOMA 5.

209. *Quæ sub eodem vel æquali angulo videntur, æqualia apparent. Quod vero videtur sub majori, id apparet majus: quod sub minori videtur, minus apparet.*

(1) Essay de la Nature des couleurs p. 207. & seqq.

SCHOLION.

210. *Hæc propositio ab Opticis instar axiomatis assumitur, quia innumeris experientiis confirmari potest. Sane Sol & Luna, quia sub angulo ad sensum æquali videntur, æquales apparent. Unde etiam Astronomi magnitudinem apparentem stellarum ex angulo optico æstimare solent. Nec ratione caret. Etenim objecta videntur æqualia, si imagines in oculo æquales sunt, & illud majus est altero, cujus imago in oculo delineatur major. Si autem angulus opticus idem est, ex principiis Dioptricis demonstrari potest, imagines quoque in retina æquales esse. Ex iisdem constat, imaginem esse majorem, si angulus opticus major; minorem vero, si is minor extiterit.*

THEOREMA 29.

Tab. III. Fig. 35. 211. *Idem objectum* DF *in vicinia majus apparet, quam e longinquo.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim crura anguli CAH, sub quo videtur objectum CH e longinquo, cadunt in crura anguli DAF, sub quo idem videtur in distantia minore, aut extra crura hujus anguli, aut intra eadem. Intelligatur itaque HC ipsi DF parallela & CH = DF, *vi hypoth.* ex A vero demissa ad DE perpendicularis AE, quæ eadem erit ad CH perpendicularis (§. 230. *Geom.*). Quodsi AC caderet in AD, & CH in AF; tum foret ob △△ DAF & CAH similia (§. 268. *Geom.*) AE : AB = DF : CH (§. 296. *Geom.*), consequenter ob AE < AB *per hypoth.* DF < CH contra hypothesin. Crura igitur anguli CAH non cadunt in crura anguli DAF, multo minus extra ea cadere possunt. Cadunt adeo intra crura anguli DAF, consequenter angulus CAH < DAF, hincque objectum idem e longinquo minus apparet, quam in vicinia (§. 209). *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

212. *Magnitudines apparentes objecti* ADC *&* ABC *sunt in ratione minore quam distantiæ* DG *&* BG *reciproce; in majoribus tamen distantiis sunt ad sensum ut distantiæ illæ reciproce.* Tab. III. Fig. 34.

DEMONSTRATIO.

Ponamus magnitudinem apparentem fieri subduplam; erit $o = 2x$ (§. 208). Est vero $o = x + y$ (§. 239. *Geom.*). Ergo $x = y$, consequenter DC = BD (§. 253. *Geom.*). Quare cum BG sit distantia ab oculo *per hypoth.* adeoque angulus ad B rectus (§. 225. 78. *Geom.*); DC > DG (§. 220. *Geom.*), consequenter DB > DG (§. 89. *Arithm.*) & hinc

& hinc BG > 2 DG (§.90. *Arith.*). Quoniam igitur *o*: *x* = 2 DG : DG *per demonstr.* BG ad DG rationem majorem habet quam *o* ad *x* (§.203. *Arithm.*), seu quod perinde est, *o* ad *x* rationem minorem habet quam BG ad DG. *Quod erat unum.*

Quodsi distantia DG augeatur, donec angulus *o* paucorum minutorum secundorum fiat, anguli *m* & *n* ad sensum non different (§. 241. *Geom.*) adeoque nec DC a DG (§. 253. *Geom.*) consequenter nec DB = DC *per demonstr.* a DG, ad sensum differre potest (§. 87. *Arithm.*). Est adeo BG = 2 DG & hinc ut BG ad DG ita *o* ad *x*. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 31.

Tab. III. Fig. 34. 213. *Cotangentes magnitudinum apparentium dimidiarum* o & x *ejusdem objecti* AC *sunt ut distantiæ* DG & BG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus *n* rectus est (§. 225. *Geom.*); si GC sumatur pro sinu toto, erunt GD & GB tangentes angulorum GCD & GCB (§. 7. *Trigon.*), hoc est, cotangentes dimidiorum angulorum *o* & *x* (§. 11. *Trigon.*). Est itaque cotangens ipsius *o* ad cotangentem ipsius *x* ut DG ad GB. *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

214. *Data magnitudine apparente dimidia* ABG *una cum distantia* BG, *dimidiam magnitudinem veram* AG *invenire.* Tab. III. Fig. 34.

RESOLUTIO.

Quoniam angulus ad G rectus est (§. 225. *Geom.*), reperietur AG inferendo (§. 40. *Trigon.*)

ut sinus totus
ad tangentem dimidiæ magnitudinis apparentis ABG
ita distantia BG
ad dimidiam magnitudinem veram AG.

Eadem BG invenitar inferendo (§. 36. *Trigon.*).

Ut Cosinus magnitudinis apparentis dimidiæ ABG
(hoc est, sinus anguli BAG)
ad sinum ejusdem;
ita distantia BG
ad magnitudinem veram dimidiam AG.

E. gr. Sit ABG = 15°, BG 30 pedum; erit

Log. sin. tot.	100000000
Log. tang. ABG	94280525
Log. BG	14771212
Log. AG	10.9051737,

cui

cui in Canone quam proxime respondent 8′0″4‴.

Aliter.

Log. Cosin. ABG	99849438
Log. Sin. ABG	94129962
Log. BG	14771212
Logg. Summa	108901174
Log. AG	0.9051736

qui cum ante invento idem est.

COROLLARIUM.

215. Quodsi ABG ponatur dimidii scrupuli secundi & BG 6 digitorum; cum tangens dimidii scrupuli secundi sit 24, reperitur AG $\frac{144}{10000000}$ adeoque CG = $\frac{288}{10000000}$ hoc est, fere $\frac{1}{34722}$ (§. 227. *Arithm.*), adeoque minor quam $\frac{1}{30000}$ unius digiti. Unde assumere licet, objecta, quæ sub angulo unius minuti secundi videntur, non amplius apparere, sed instar punctorum ab oculo exhiberi.

SCHOLION.

216. *Si sinus totus sit* 10000000, *sinus* 10 *scrupulorum secundorum vi Canonis majoris* Pitisci *est* 484. *Unde sinus dimidii scrupuli* 24 (§. 23. *Trig.*), *consequenter cum tangens unius minuti in istiusmodi particulis a sinu non amplius differat teste Canone Sinuum & tangentium communi, etiam tangens dimidii scrupuli secundi est* 24.

PROBLEMA 14.

217. *Data dimidia magnitudine vera* AG *una cum distantia ab oculo* BG, *invenire magnitudinem apparentem dimidiam* ABG. Tab. III. Fig. 34.

RESOLUTIO.

Cum in triangulo ABG dentur præter rectum G (§. 225. *Geom.*) latera AG & BG, invenitur cosinus magnitudinis apparentis ABG hoc est, sinus anguli BAG (§. 38. *Trig.*).

Exemplum est inversum præcedentis.

COROLLARIUM.

218. Quodsi ergo objectum aliquod tanto intervallo removeatur ab oculo, cui directe opponitur, donec ob imminutam continuo magnitudinem apparentem visui subducatur & distantia ab oculo mensuretur; per problema præsens definietur magnitudo apparens seu angulus visorius, quem illud subtendit, ubi instar puncti apparet.

PROBLEMA 15.

219. *Data dimidia magnitudine vera* AG, *invenire distantiam* BG, *ad quam sub dato angulo* ABG *videtur.* Tab. III. Fig. 34.

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo ABG præ-

præter rectum G (§. 225. *Geom.*) datur etiam angulus ABG una cum crure AG, invenitur basis BG (§. 36. *Trig.*).

E. gr. Sit AG 30 pedum, ABG 25°; erit

Log. sin. ABG	9.6259483
Log. sin. BAG	9.9572757
Log. AG	1.4771212
	11.4343969
Log. BG	1.8084486, cui

in tabulis quam proxime respondent 64′3″3‴.

Quodsi BG sumatur pro sinu toto, erit AG tangens anguli ABG, adeoque reperitur etiam BG inferendo: ut tangens anguli ABG ad sinum totum; ita AG ad BG.

COROLLARIUM.

220. Quodsi angulus ABG fiat dimidii scrupuli secundi, definietur distantia, ad quam objectum integrum AC instar puncti apparere, adeoque non amplius videri debet (§. 213).

SCHOLION.

221. *Quodsi per experientiam (§. 217) definiatur angulus, sub quo desinit visio distincta objecti; per præsens problema determinari potest distantia, in qua visio objecti distincta esse desinit, ita ut non amplius discerni possit. Quamvis autem distincta sensim sensimque esse desinat visio, neque adeo in puncto fiat; in praxi tamen seligendum est punctum, ubi non amplius objectum discerni possit, nec summa in hisce talibus accuratione opus est.*

THEOREMA 32.

222. *Quæ sub eodem angulo* CAH *videntur* GI *&* CH, *habent* Tab. III.
magnitudines distantiis AE *&* AB Fig.
proportionales. 35.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim GI ipsi CH parallela *per hypoth.* erit $o = x$ (§. 233. *Geom.*), adeoque triangula GAF & CAH similia sunt (§. 267. *Geom.*). Quare cum AB sit ad CH (§. 225. *Geom.*), adeoque etiam ad GI (§. 230. *Geom.*) perpendicularis; erunt AE & AB altitudines triangulorum GAI & CAH (§. 227. *Geom.*), consequenter GI : CH = AE : AB (§. 396. *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

223. *Invenire distantiam* AB, *ad quam ab oculo removendum est objectum magnitudinis datæ* CH, *ut videatur tantæ magnitudinis, quanta apparet* GI *in distantia data* AE.

RESOLUTIO.

Quoniam GI : CH = AE : AB (§. 222); datis GI, CH & AE, reperitur AB per regulam trium (§. 302. *Arithm.*).

E. gr. quæritur, ad quam distantiam ab oculo removeri debeat objectum 30 pedum, ut appareat æquale objecto, quod videtur 6 pedum in distantia 20 pedum.

Quoniam GI = 6, CH = 30, AE = 20; erit AB = 20.30:6 = 100.

PROBLEMA 17.

Tab. VII. Fig. 84. 224. *Invenire altitudinem* BD *supra lineam horizontalem* BH *per oculum* A *positione datum ductam, in qua elevari debet objectum datæ altitudinis* DE *ut tantum appareat quantum objectum aliud altitudinis similiter datæ* BC *in data distantia oculi* AB.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam in triangulo ABC ad B rectangulo (§. 225. *Geom.*) datur distantia oculi AB & altitudo objecti BC, cui æqualis apparere debet altitudo objecti elevandi DE; angulus BAC, sub quo in A videtur objectum BC, reperiri potest (§. 40. *Trig.*): cui æqualis est DAE (§. 209).

2. Concipiatur jam circulus transiens per puncta A, D & E, cujus centrum sit in G; erit angulus DGE duplus anguli DAE modo inventi (§. 313. *Geom.*). Quare si ex centro G demittatur perpendicularis GF; erit DF = ½ DE & DGF = ½ DGE (§. 184. *Geom.*) = DAE. In triangulo igitur rectangulo DFG ad F rectangulo datis angulis & latere DF reperiuntur latera FG & DG (§. 36. *Trig.*).

3. Demittatur ex centro G ad BO perpendicularis GH: cum etiam sit FB ad BO perpendicularis *per hypoth.* erit GH parallela ipsi FB (§. 256. *Geom.*) adeoque perpendiculares GF & BH inter GH & FB interceptæ æquales sunt (§. 226. *Geom.*). Quare si ex FG paulo ante inventa subtrahatur distantia oculi BA, relinquetur AH.

4. In triangulo itaque AGH ad H rectangulo datis AH & AG = DG (§. 40. *Geom.*) reperitur GH (§. 417. *Geom.*)

5. Quoniam denique ipsi GH æqualis est FB *per demonstr.* si inde subtrahatur dimidia altitudo objecti elevandi FD; relinquetur altitudo quæsita BD. *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit distantia oculi AB 8′ & quæratur altitudo, in qua elevari debeat objectum altitudinis 9 pedum; ut appareat 5 pedum: erit BC 5 & DE 9′, adeoque DF 45″. Inferatur ergo:

Log.

Log. AB	0.9030900
BC	0.6989700
Sin. tot.	10000000

Tang. BAC	9.7958800, cui

in Tabulis quam proxime respondent 32°.

Est igitur angulus DGF 32°. Quare cum ad F sit rectus & DF 45″; inferatur porro:

Log. sin. DGF	97242097
Log. DF	16532125
Log. sin. tot.	100000000

Log. DG	1.9290028
Log. sin. tot.	100000000
Log. DG	1.9290028
Log. Cosin. DGF	99284205

Log. GF	+1.8574233

Est igitur DG = AG = 85″ & FG = BH = 72″.

Quoniam BH minor prodit ipsa BA, id indicio est punctum A in præsente casu cadere in O. Quamobrem ex BO = 80″ subtrahatur BH = 72″; relinquetur HO = AH (§. 291. *Geom.*). Quamobrem si

a Quadrato AG	7225
subtr. Quadr. AH	64

relinquetur Quadr. GH 7161 unde extracta radix 8°4′5‴ est GH. Ablata hinc DF 450‴, relinquitur altitudo quæsita BD 395‴, quæ in præsente casu minor quam BC = 500‴.

Sit AB = 12′, BC = 6′, DE = 18′, adeoque DF = 9′; erit

Log. AB	10791812
BC	0.7781513
Sin. tot.	100000000

Tang. ABC	96989701
ABC =	26° 33′
Log. sin. DGF	96502868
Log. sin. DF	09542425
Log. sin. tot.	100000000

Log. DG	1.3039557
Log. Cos. DGF	99516020

Log. GF +1.2555577	
DG = 20′	GF = 18′
AG² = 400	AB = 12
AH² = 36	AH = 6
GH² = 364	BF = 19
	DF = 9
GH = 19	BD = 10

Aliter.

Idem problema etiam absque Trigonometria solvi potest. Etenim

1. Quoniam angulus FGD = BAC *per demonstr.* & ΔΔ DFG & BAC ad F & B rectangula; erit CB : BA = DF: FG (§. 267. *Geom.*). Quamobrem cum dentur CB, BA & DF; reperietur FG (§. 302. *Arithm.*).
2. Hinc porro reperitur DG (§. 417. *Geom.* & §. 269. *Arithm.*) = AG (§. 40. *Geom.*).
3. Quodsi ergo ex FG = BH subtrahatur AB; relinquetur AH

& inde porro reperietur GH (§. 417. *Geom.* & §. 269. *Arithm.*).

4. Denique ex GH subducatur DF; relinquetur altitudo quæsita BD.

E. gr. sit ut ante AB = 12′, BC = 6′, DE = 18′; erit DF = 9′. Unde porro reperitur FG = 18′ & ob $DG^2 = FG^2 + DF^2 = 324 + 81 = 405$ DG = 20′, atque hinc tandem BD = 10′ ut ante.

PROBLEMA 18.

Tab. VII. Fig. 14. 225. *Data altitudine* BD, *in qua consistere debet objectum* DE *invenire quanta ipsius esse debeat longitudo, ut in distantia oculi data* AB *videatur alteri longitudinis datæ* BC *æquale.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente &

1. ex datis in triangulo ABC ad B rectangulo cruribus AB & BC investigetur ut ibidem *num.* 1. angulus BAC, cui æqualis est DGF, cujusque complementum ad rectum est GDF, quemadmodum ibidem ostendimus.

2. Eodem modo ex datis in △ ABD præter rectum B cruribus AB & BD investigetur angulus BDA & latus AD (§. 40. 38. *Trigon.*), qui

3. cum angulo GDF ex duobus rectis subductus relinquit angulum GDA.

4. Datis itaque in △ DAG ob crura DG & GA æqualia (§. 40. *Geom.*) æquicruro (§. 89. *Geom.*) præter latus AD *vi num.* 2. omnibus angulis (§. 248. *Geom.*) invenitur crus DG (§. 36. *Trigon.*).

5. Atque ita tandem datis in △ DFG ad F rectangulo angulo obliquo DGF *vi num.* 1. & latere DG *vi num.* 4. reperitur DF (§. 36. *Trigon.*), cujus duplum est longitudo objecti quæsita DE (184. *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

Sit e. gr. veluti in exemplo posteriori AB = 12′, BC = 6′, BD = 10; reperietur ut ibidem angulus DGF 26° 33′. Jam porro

Log. BD	1.0000000	
BA	1.0791812	
Sin. tot.	100000000	
Tang. BDA	10.0791812	
Ergo BDA	50°	11′
FDG	63	27
Summa	113	38
anguli ad D	179	60
GDA	66	22

2

	132 44
D+A+G	179 60
DGA	47 16
Log. sin. BDA	98854162
BA	10791812
sin. tot.	100000000
Log. DA	1.1937650
Log. sin. DGA	98660036
DA	11937650
sin. DAG	99619569
Logg. Summa	111557219
Log. DG	12897183
sin. DGF	96502868
DF	10.9400051

Cui in Tabulis quamproxime respondent 9′.

PROBLEMA 18.

Tab. VII. Fig. 84. 226. *Data altitudine objecti elevandi* DE *&* *altitudine* DB, *in qua constitui debet, invenire distantiam* BA, *in qua oculo cum objecto datæ altitudinis* BC *ejusdem altitudinis apparet.*

RESOLUTIO.

Sit DE $= a$, BD $= b$, BC $= c$, BA $= x$; quoniam per ea, quæ in problematum præcedentium resolutione demonstrata sunt, DF $= \frac{1}{2}a$ & anguli ad F atque B recti, anguli vero BAC & DGF æquales; erit

BC : DF = BA : FG (§. 267. *Geom.*)

$$c : \tfrac{1}{2}a = x : \frac{ax}{2c}$$

& $DG^2 = AG^2 = DF^2 + FG^2$ (§. 417. *Geom.*)

$$= \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2x^2}{4c^2}$$

Jam porro AH $= \frac{ax}{2c} - x$

& GH $= b + \frac{1}{2}a$, adeoque

$GA^2 = AH^2 + GH^2$

$$= \frac{a^2x^2}{4c^2} - \frac{ax^2}{c} + x^2 + b^2 + ab + \tfrac{1}{4}a^2$$

Habemus itaque subtractis a se invicem valoribus ipsius GA^2,

$$x^2 - \frac{ax^2}{c} + b^2 + ab = 0$$

$$cx^2 - ax^2 + b^2c + abc = 0$$

$$abc + b^2c = ax^2 - cx^2$$

$$\frac{abc + b^2c}{a - c} = x^2$$

Regula. 1. Quæratur ad differentiam magnitudinum datarum BC & DE magnitudinem minorem BC & factum ex altitudine DB, in qua constitui debet objectum DE, in compositam BE ex eadem altitudine DB & altitudine objecti elevandi DE numerus quartus proportionalis.

2. Ex hoc extrahatur radix, quæ erit distantia quæsita BA.

E. gr. sit DE $= 18$, DB $= 11$, BC $= 6$; erit

erit BE = 29 & BE.DB = 319. Unde reperitur $AB^2 = 6.319:12 = 159$. Quamobrem AB = 12.

THEOREMA 33.

Tab. III. Fig. 36. 227. *Si oculus* O *intra parallelas* AB *&* CD *ponatur, parallelæ versus plagam ipsi oppositam convergere videntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB ipsi CD parallela *per hypoth.* erit FE = BD (§. 226. *Geom.*). Cum igitur FE & BD oculo directe opponantur; intervallum BD minus apparere debet viciniori FE (§. 211). Eodem modo ostenditur, intervallum quodlibet ulterius minus apparere debere ipso BD & ita porro. Distantiæ itaque rectarum AB & CD continuo minui, consequenter versus plagam oculo oppositam parallelæ AB & CD convergere videntur (§. 84. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

228. Quodsi tanta fuerit longitudo parallelarum AB & CD, ut distantia earum a se invicem oculo in O posito instar puncti appareat (§. 215); parallelæ coire videbuntur in illo puncto ibique visus terminabitur.

THEOREMA 34.

Tab. III. Fig. 37. 229. *Subtensa* AB *in omnibus punctis* D, C, E, *&c. arcus segmenti* ACB *æqualis apparet; diameter vero* GD *in singulis peripheriæ punctis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim anguli ADB, ACB, AEB &c. æquales sunt (§. 315. *Geom.*); subtensa AB in punctis D, C, E &c. videtur sub eodem angulo. Æqualis itaque in singulis istis punctis apparet (§. 209). *Quod erat unum.*

Quodsi ab extremitatibus diametri D & C ad quodcunque peripheriæ punctum E rectas DE & EG ducas; angulus E semper erit rectus (§. 317. *Geom.*). Diameter adeo circuli in singulis peripheriæ punctis sub æquali angulo videtur (§. 145. *Geom.*), consequenter æqualis apparet (§. 209). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

230. Optima igitur theatrorum figura est segmentum circuli, in quo subtensa actoribus, arcus spectatoribus locum concedit.

SCHOLION.

231. *Non jam urgeo, quod hæc figura etiam sit rectilinearum eodem ambitu comprehensarum capacissima.*

COROLLARIUM 2.

232. Quodsi ergo oculus moveatur in peripheria satis magna, per longinquum intervallum ad objectum ali-

aliquod AB accedere, vel ab eo recedere poteris, ut tamen magnitudo ejus semper videatur eadem.

THEOREMA 35.

Tab. III. Fig. 38.

233. *Si oculus fuerit immotus in A, recta autem BC ita moveatur, ut extremitates semper cadant in peripheriam; ejusdem constanter magnitudinis apparebit.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim BC transferri primum ex BC in CD, deinde ex CD in DE. Quoniam BC = CD = DE (§. 81. *Arithm.*), arcus cognomines æquales sunt (§. 289. *Geom.*). Cum igitur etiam anguli BAC, CAD, DAE æquales sint (§. 315. *Geom.*); recta BC in omni situ ejusdem magnitudinis apparet (§. 209). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

234. Cum polygonum regulare circulo inscriptibile sit (§. 348. *Geom.*); oculo in uno angulo posito latera æqualia apparent.

THEOREMA 36.

Tab. III. Fig. 39.

235. *Quæ oculus uno obtutu comprehendit, intra ambitum anguli recti continentur.*

DEMONSTRATIO.

Sit oculus in O & intervallum quodcunque AB in infinitum excurrens: radius ab uno extremo A in oculum cadens AO sit ad AB perpendicularis. Sumatur intervallum quodcunque AD, ducaturque recta OD. Quoniam angulus A rectus est (§. 78. *Geom.*); erit AOD recto minor (§. 241. *Geom.*). Intervallum igitur, quod oculo spectandum exhiberi potest, intra limites anguli recti coërcetur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

236. *Facile theorema præsens experimento confirmatur. Angulo enim recto in tabula horizontali descripto & recta ex vertice ducta bifariam diviso, si in eadem duo styli perpendiculares erigantur & oculus ad verticem anguli applicetur, ita ut ab eo, qui eidem vicinior, tegatur remotior; nullum extra anguli recti crura positum objectum in oculum incurrere observabis.*

THEOREMA 37.

Tab. III. Fig. 35.

237. *Si objecti* DF *oculo* A *directe oppositi magnitudo dimidia* DE *fuerit distantiæ* AE *æqualis; objectum totum visu comprehenditur, nec quicquam amplius ultra ejus limites conspici potest.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AE distantia objecti visibilis ab oculo *per hypoth.*; erit ea ad DF perpendicularis (§. 225. *Geom.*). Cum adeo angulus E sit

sit rectus (§. 78. *Geom.*) & AE = DE *per hypoth.*; erit DAE semirectus (§. 241. *Geom.*). Eodem modo ostenditur, esse FAE semirectum, consequenter DAF rectum. Objectum itaque totum uno obtutu comprehenditur, nec extra ejus limites quicquam amplius conspicitur (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

Tab. III. Fig. 35. 238. *Si distantia* AE *objecti* DF *oculo directe oppositi fuerit minor dimidia magnitudine* DE; *objectum integrum uno obtutu non comprehenditur, sed ejus tantum aliqua pars videtur, & quidem minor, si* AE *minorem ad* DE *habuerit rationem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AE perpendicularis ad DE (§. 225. *Geom.*); erit angulus E rectus (§. 78. *Geom.*), consequenter ADE & EAD junctim sumti recto æquales (§. 241. *Geom.*). Quare cum AE < DE, *per hypoth.* erit angulus ADE minor altero EAD (§. 189. *Geom.*), consequenter DAE semirecto major. Eodem modo cum ostendatur, esse FAE semirecto majorem, consequenter DAF recto majorem; si oculus DAF objectum integrum DF uno obtutu comprehendit, non intra ambitum anguli recti continentur, quæ uno obtutu comprehenduntur: quod cum sit absurdum (§. 236), ut partem tantum objecti videat oculus in A opus est. *Quod erat unum.*

Spatia, quæ amplitudinem visus definiunt, sunt ut distantiæ (§. 222). Quare si distantia AE ad DE minorem habuerit rationem, adeoque minuitur (§. 203. *Arithm.*); pars quoque visa minor fieri debet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

239. Quo propius itaque ad objectum accedis, eo minorem ejus partem uno obtutu comprehendis.

THEOREMA 39.

240. *Si altitudo oculi non fuerit dimidiæ objecti magnitudini æqualis, & si perpendiculum* DC *ex oculo in magnitudinem* AB, *ultra quam is uno obtutu nil amplius comprehendit, demissum ipsam inæqualiter secet; erit distantia inter segmenta* AD *&* DB *media proportionalis & contra.* Tab. IV. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Si AB spatium definit, quod uno obtutu visus comprehendit; erit angulus ACB rectus (§. 235). Quare si perpendiculum ex oculo C in AB demittatur; erit DB : DC = DC : DA (327. *Geom.*). Est vero

DC

DC distantia objecti ab oculo (§. 225. *Geom.*). Ergo distantia est media proportionalis inter segmenta AD & DB. *Quod erat unum.*

Quodsi fuerit distantia DC media proportionalis inter DB & DA; erit DB : DC = DC : AD. Quoniam vero DC est distantia *per hypoth.* ad AB perpendicularis est (§. 225. *Geom.*) adeoque anguli ad D æquales sunt (§. 79. *Geom.*), consequenter etiam $o = u$ (§. 183. *Geom.*). Est vero $o + x = 90°$ (§. 241. *Geom.*). Ergo etiam $u + x = 90°$ (§. 87. *Arithm.*). Ultra magnitudinem igitur AB visus nihil amplius comprehendit (§. 235). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 20.

241. *Data distantia objecti* AB, *quod amplitudinem visus definit, ab oculo* C, *una cum magnitudine illius objecti* AB, *invenire segmenta* AD *&* DB, *in quæ a distantia* DC *secatur.*

RESOLUTIO.

Quoniam DB : DC = DC : DA (§. 240); non alia re opus est, quam ut distantiæ objecti DC inveniantur reciprocæ DB & DA (§. 262. *Anal. fin.*)

PROBLEMA 21.

242. *Data altitudine objecti* AB *&* *altitudine oculi* DB, *invenire distantiam* DC, *ad quam oculus positus objectum integrum nec quicquam amplius uno obtutu comprehendit.* Tab. IV. Fig. 40.

RESOLUTIO.

Quoniam DA est differentia inter altitudinem oculi & magnitudinem objecti: inter hanc differentiam & altitudinem oculi quærenda est media proportionalis, quæ erit distantia quæsita DC (§. 240).

THEOREMA 40.

243. *Spatia, quæ amplitudinem visus in diversis distantiis definiunt, sunt distantiis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Spatia, quæ amplitudinem visus in diversis distantiis definiunt, intra limites anguli recti consistunt (§. 235); adeoque sub eodem angulo videntur (§. 145. *Geom.*). Sunt igitur distantiis proportionalia (§. 222). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

244. Quo longius itaque visus exporrigitur, eo amplius spatium uno obtutu comprehendit: quo citius autem terminatur, eo minus spatium uni obtutui sufficit.

THEOREMA 41.

245. *Si objecta diversæ magnitudinis* AB *&* DB *ex eadem distan-* Tab. IV. Fig. 41.

stantia BC *videntur & radiorum extremorum alter fuerit ad* AB *perpendicularis; tangentes magnitudinum apparentium sunt in ratione magnitudinum verarum* AB & DB.

DEMONSTRATIO.

Radius BC est ad AB perpendicularis, *per hypoth.* Si ergo BC sumatur pro sinu toto; erit BD tangens anguli BCD, AB vero tangens anguli BCA (*§. 7. Trigon.*). Sunt vero BCD & BCA magnitudines apparentes verarum BD & BA (§. 208). Quare magnitudinum apparentium tangentes sunt ut veræ. *Q. e. d.*

PROBLEMA 22.

Tab. IV. Fig. 42. 246. *Data distantia a centro sphæræ* BC *una cum ejus semidiametro* AC *invenire quantitatem portionis* ADE, *quam oculus unus obtutu suo comprehendit.*

RESOLUTIO.

Quoniam radius extremus AB sphæram necessario tangit in A, ceu ex demonstratione theorematis 9 (*§. 111*) manifestum; erit angulus A rectus (*§. 309. Geom.*), & hinc ABC complementum dimidii arcus AD, qui partem uno obtutu comprehendendam definit (§. 241. *Geom.*), consequenter (§. 38. *Trigon.*).

ut distantia oculi a centro CB
ad semidiametrum sphæræ AC;
ita sinus totus
ad cosinum dimidii arcus AD, qui partem sphæræ uno obtutu comprehendendam definit.

E. gr. Sit juxta *Ricciolum* semidiameter Solis AC 33 semidiametrorum terræ, distantia ejus a terra CB 7300; erit

Log. CB	3.8633229
Log. AC	1.5185139
Log. sin. Tot.	100000000
Log. sin. ABC	7.6551910

cui in tabulis quam proxime respondent 15'.

Est ergo arcus AD 89° 45', consequenter ADE 179° 30'.

THEOREMA 42.

247. *Majorem sphæræ portionem oculus unus contuetur e longinquo, quam e vicino; nunquam tamen integrum hemisphærium uno obtutu comprehendit.* Tab. IV. Fig. 22.

DEMONSTRATIO.

Quoniam distantia CB ad semidiametrum sphæræ AC ut sinus totus ad cosinum dimidii arcus AD, qui portionem sphæræ visibilem definit (*§. 246*); si distantia minuitur adoeque ratio ejus ad semidia-

diametrum minor redditur (§. 203. *Arithm.*), ratio quoque sinus totius ad cosinum arcus AD fit minor, consequenter cosinus ipse major evadit (§. 206. *Arithm.*). Cum adeo arcus AD complementum ad quadrantem crescat (§. 11. *Trigon.*); arcus ipse AD decrescit: e vicinia itaque minorem sphæræ portionem oculus contuetur, quam e longinquo. *Quod erat unum.*

Si oculus hemisphærium integrum uno obtutu comprehenderet; AD foret circuli quadrans, adeoque angulus ACB rectus (§. 143. *Geom.*), consequenter AB ipsi CB parallela (§. 256. *Geom.*) & hinc angulus visorius ABC nullus: Quod cum sit absurdum, hemisphærium integrum videri nequit. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 43.

Tab. III. Fig. 39. 248. *Longitudines tantum mediocres, non autem magnas visus comprehendere potest.*

DEMONSTRATIO.

Sit AO = 1, AD = 57. Quoniam sinus totus ad tangentem anguli visorii ut AO ad AD (§. 40. *Trigon.*); reperietur angulus visorius 89°. Quodsi vero AD ponatur 3437; reperietur angulus visorius AOD 89° 59′ (§. *cit. Trig.*), adeoque pro 3380 distantiis oculi tantummodo relinquitur angulus 59′ & cum angulus AOD a recto, qui totam amplitudinem visus definit (§. 235), nonnisi unico minuto differat; pro omni reliqua longitudine, quæ 3437 distantias seu altitudines oculi excedit, nonnisi unius minuti angulus restat. Visus igitur tantum mediocres, non autem magnas longitudines comprehendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

249. Cum angulus visorius, quo ad distantiam oculi 6 pedum spectatur longitudo 342 pedum, sit 89°, adeoque omni intervallo reliquo usque ad 20622 pedes nonnisi 59 minuta cedant; longitudines 342 pedibus majores solo adspectu vix dimetiemur.

COROLLARIUM 2.

250. Hinc distantiarum & altitudinum magnarum differentiæ, quamvis admodum ingentes, nudo adspectu non dignoscuntur.

THEOREMA 44.

251. *Æquales partes ejusdem intervalli* AB, BC, CD *&c. inæquales apparent.* Tab. IV. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ducatur radio OB arcus EF sitque AO ad AD perpendicularis,

adeoque communis altitudo △△ AOB, BOC, COD (§.217. *Geom.*). Sector EOB major △ AOB, adeoque ad △ OBC majorem rationem habet quam △ AOB (§.203. *Arithm.*). Cum △△ AOB & OBC communem altitudinem AO habeant; inter se sunt in ratione basium AB & BC (§. 389 *Geom.*). Sector igitur EOB ad △ OBC majorem rationem habet quam AB ad BC. Quare cum sector BOF < △ OBC; sector EOB ad sectorem BOF multo magis rationem majorem habebit quam AB ad BC. Enimvero sectores EOB & BOF sunt inter se ut arcus EB & BF (§. 415. 389. *Geom.*). Arcus itaque EB ad arcum BF rationem majorem habet quam AB ad BC. Jam AB = BC *per hypoth.* Quare arcus EB major arcu BF (§. 158. *Arithm.*). Unde cum arcus AB & BF sint mensuræ angulorum EOB & BOF (§. 57. *Geom.*), erit angulus EOB major angulo BOC (§. 141. *Geom.* & §. 20. *Arithm.*) consequenter etiam AB majus videtur quam BC (§. 209). Eodem modo ostenditur, BC apparere majus quam CD, & ita porro. *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

251. *Si ex centro circuli* C *excitetur ad planum ejusdem perpendicularis quantacunque, vel linea obliqua utcunque radio æqualis* FC*; oculo in* F *collocato diametri omnes* DE *&* AB *æquales apparebunt.* Tab. IV. Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Si recta FC ad diametros DE, AB &c. perpendicularis; anguli ad C recti sunt (§. 78. *Geom.*) adeoque æquales (§. 145. *Geom.*). Quare cum radii DC, CB, CE, CA æquales sint (§. 40. *Geom.*) & latus FC triangulis DFC, BFC, EFC, AFC commune; anguli cognomines æquales sunt (§. 179. *Geom.*). Radii igitur DC, CB, CE, CA (§. 209), consequenter etiam diametri DE, AB &c. æquales apparent. *Quod erat unum.*

Si AC = CF = CB, ex centro C super AB in plano AFB descriptus semicirculus (§. 135. *Geom.*) transibit per F (§. 40. *Geom.*). Angulus itaque AFB rectus est, (§. 317. *Geom.*). Eodem modo ostenditur, esse DFE rectum. Quare cum diametri AB & DE sub æqualibus angulis videantur (§. 145 *Geom.*); æquales apparebunt (§. 209). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 23.

253. *Invenire punctum* F, *in quo oculo*

Tab. IV. Fig. 45. *oculo magnitudines* AB *&* BC *utcunque inæquales & in directum sitæ appareant æquales.*

RESOLUTIO.

1. Ex A & B intervallo AB facta intersectione in E, ex centro E per A & B describatur circulus.
2. Eodem modo determinetur centrum D & ex eo per B & C describatur circulus alius, priorem secans in F.

Dico F esse punctum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Cum AB & BC sint latera hexagoni (356. *Geom.*); arcus cognomines eandem rationem ad suas peripherias habent (§. 342. *Geom.*). Quare cum angulorum AFB & BFC mensuræ sint arcus dimidii AB & BC (§. 314. *Geom.*); æquales sint necesse est (§. 141. *Geom.*), adeoque & magnitudines AB & BC oculo in F æquales apparent (§. 209). *Q. e. d.*

PROBLEMA 24.

Tab. IV. Fig. 46. 254. *Invenire duo puncta* D *&* C *ejus conditionis, ut punctum* C *sit vicinius utrique extremo magnitudinis* AB, *quam punctum* D, *in viciniori tamen* C *magnitudo* AB *minor appareat, quam in remotiori* D.

RESOLUTIO.

1. Quacunque circini apertura ex A & B fiat intersectio in E & ex E tanquam centro radio EA describatur circulus AIDB.
2. Simili modo determinetur centrum F & ex eo radio FA describatur circulus AHCB.
3. Ducatur ad AB continuatam in G perpendicularis GD, quæ peripheriam majorem in C secet, majori vero in D occurrat.

Dico punctum D magis distare ab extremis A & B visibilis AB, quam alterum C; in puncto tamen C minorem apparere magnitudinem AB, quam in D.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DG perpendicularis ad AG *per hypoth.* BD > BC & AD > AC (§. 417. *Geom.*). Punctum igitur D magis distat ab A & B quam C (§. 192. *Geom.*). *Quod erat unum.*

Quoniam ACB = AHB & ADB = AIB (§. 315. *Geom.*), sed AIB > AHB (§. 300. *Geom.*); erit quoque ADB > ACB (89. *Arithm.*). Magnitudo igitur AB major apparet in D quam in C (§. 209). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 46.

255. *Si oculus infra magnitudi-*

Tab. IV. Fig. 47. *nis humilioris* FE *verticem* E *fuerit collocatus & per eum altiorem* AC *spectet; majorem huius partem videbit in distantia remotiori* FH, *quam in viciniori* FG *vel* FI.

DEMONSTRATIO.

Si oculus fuerit in H, recta ex H per verticem E in magnitudinem altiorem AC ducta partem CB resecat, quæ ab eo spectatur (§. 47). Similiter recta ex G per E ducta GD resecat partem DC, quæ in G spectatur (§. *cit.*). Quoniam itaque recta GD alteram HB in E secat (§. 50. *Geom.*) & pars EG infra partem alterius EH cadit; pars altera DE ipsius DG supra alteram BE ipsius BH cadet (§. *cit. Geom.*), consequenter $DC < CB$ (§. 20. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

Tab. II. Fig. 25. 256. *Si magnitudo humilior* GF *fuerit ad altiorem* DE *in ratione distantiarum* BF & BE, *vel si* BF *ad* BE *minorem rationem habuerit quam* GF *ad* DE; *oculus in* B *collocatus altiorem prorsus non videbit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam GF & DE ad BC perpendiculares sunt (§. 227. *Geom.*) & $BF : BE = GF : DE$ *per hypoth.* radius BG per verticem humilioris G transiens transibit etiam per D (§. 167. *Geom.*). Cum adeo objectum DE non radiet in B; ibi quoque videri nequit (§. 42); adeoque multo minus in propinquiori distantia, hoc est, si $BF : BE < GF : DE$ (§. 261). *Q. e. d.*

PROBLEMA 25.

257. *Datis altitudinibus* GF & DE *una cum distantia earundem a se invicem* FE, *determinare punctum* B, *ubi minor majorem conspectui eripere cessat.* Tab. II. Fig. 25.

RESOLUTIO.

Fiat: ut differentia magnitudinum GF & DF
ad magnitudinem minorem FG;
ita distantia magnitudinum a se invicem FE.
ad distantiam quæsitam BF.

E. gr. Sit GF 100, DE 140, FE = 3 pedum; erit $BF = 3. 100 : 40 = 7\frac{1}{2}$.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut $GF : DE = BF : BE$ (§. 267. *Geom.*). Ergo $DE - GF : GF = BE - BF : BF = FE : BF$ (§. 193. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 26.

258. *Datis altitudinibus* AC & EF *una cum distantia earundem* FA & *distantia oculi ab humiliore* FH, Tab. IV. Fig. 47.

FH, *invenire partem altioris* BC, *quæ per verticem humilioris* E *ab oculo infra eum in* H *posito videri potest.*

RESOLUTIO.

Quia datur distantia oculi ab objecto humiliore FH & distantia humilioris ab excelsiore AF *per hypoth.* distantia quoque oculi ab excelsiore AH datur. Igitur

1. Quæratur ad FH, FE & AH quarta proportionalis, quæ erit pars magnitudinis altioris ab humiliore EF conspectui in H erepta AB (§. 262).
2. Quodsi adeo ex integra AC *per hypoth.* data auferatur, relinquetur portio BC, quæ in H spectari potest.

E. gr. Sit AF = 30, FE = 100, AC = 140, FH = 170; reperietur AB = 100. 200 : 170 = $117\frac{11}{17}$, unde BC $22\frac{5}{17}$.

PROBLEMA 27.

Tab. IV. Fig. 47.

259. *Datis altitudinibus* FE & AC *una cum distantia* FI, *ubi primum conspectui eripitur altior* AC; *invenire distantiam earum a se invicem.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad altitudinem minorem FE, differentiam altitudinum FE & AC atque distantiam FI quarta proportionalis, quæ erit distantia altitudinum quæsita AF.

E. gr. Sit FE = 80', AC = 170, FI = 50; erit AF = 90. 50 : 80 = $56\frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est enim FE : AC = FI : AI (§. 261). Ergo FE : AC − FE = FI : AI − FI = FI : AF (§. 193. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 28.

260. *Data altitudine objecti humilioris* FE *una cum distantia excelsioris ab eodem* AF, *determinare altitudinem excelsioris* AC, *quæ tanta esse debet, ut in data distantia* FH *per verticem humilioris* E *pars data excelsioris* BC *conspici possit.* Tab. IV. Fig. 47.

RESOLUTIO.

Quoniam FH & AF dantur, *per hypoth.* AH quoque datur. Quare

1. Quæratur ad FH, FE & HA quarta proportionalis, quæ erit pars altitudinis majoris a minore conspectui in H erepta AB.
2. Huic ergo si addatur pars conspicua BC; prodibit altitudo integra AC.

Sit e. gr. FH 300 pedum, FE 150, AF 400, BC 50; erit AB = 150. 400 : 300 = 200, consequenter AC = 250.

PRO-

PROBLEMA 29.

Tab. IV. Fig. 48. 261. *Determinare altitudinem* DB, *ad quam collocanda est magnitudo data* AB, *ut oculo in* E *posito tanta appareat, quanta* DC *ibidem videtur.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta EC & in E ad eam excitetur perpendicularis EG fiatque EF magnitudini datæ æqualis.
2. Fiat porro in F angulus ipsi FEG æqualis, ut habeatur punctum G.
3. Ex puncto G demittatur perpendicularis GL ad FE.
4. Producatur DE in I, donec fiat DI=GL &
5. Ex I erigatur perpendicularis HI, quæ ex E intervallo FG secetur in H.
6. Tandem ex H radio EH describatur circulus rectam AD in B & A secans.

Dico AB esse magnitudinem in alto collocandam & DE altitudinem, in qua collocari debet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam GE ad CE perpendicularis, *per construct.* CE circulum ex centro G descriptum per F & E (§. 40. *Geom.*) tangit (§. 304. *Geom.*). Est ergo angulus in segmento FME angulo segmenti CEF æqualis (§. 323. *Geom.*). Quodsi jam fiat DI=KH=GL & radio HE = GF describatur ex H circulus: erit AB = FE (§. 298. *Geom.*) & hinc ob arcus cognomines æquales (§. 289. *Geom.*) angulus FME = BEA (§. 315. *Geom.*). Est vero FME = DEC *per demonstrata.* Ergo etiam BEA = DEC (§. 87. *Arithm.*). Videntur adeo DC & AB in E sub æqualibus angulis, consequenter æquales apparent (§. 209). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Quomodo idem problema per calculum solvatur, in superioribus jam docuimus.* (§. 224.).

PROBLEMA 30.

263. *Oculo* B *positione dato determinare magnitudinem* DE, *quæ in altitudiue data* AD *appareat magnitudini* CA *æqualis.* Tab. IV. Fig. 49.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta CB, ut habeatur angulus CBA, sub quo videtur AC.
2. Ex B ad punctum datum D ducatur recta DB.
3. Fiat arcus GH alteri FI æqualis, ducaturque per H recta BE.

Dico, DE esse magnitudinem quæsitam.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus F I alteri GH æqualis, *per construct*. angulus ABC alteri DBE æqualis est (§.141.*Geom*). Cum adeo AC & DE sub æquali angulo videantur, necessario æquales apparent (§.209). *Q. e. d.*

SCHOLION.

264. *Idem problema superius per calculum solvere docuimus* (225).

THEOREMA 48.

265. ***Si oculus in tenebris constitutus flammam a splendore aëris circumfusi non distinguit & distantia minor, in qua illa ab hoc distinguitur, ad longitudinem flammæ majorem habuerit rationem, quam distantia major, ubi illa cum hoc confunditur, ad diametrum aggregati ex splendore circumfuso & flamma; flamma major videbitur e longinquo, quam e vicinia.***

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 41. Est enim ut distantia oculi BC ad magnitudinem visibilis BD ita sinus totus ad tangentem anguli visorii (§.40. *Trigon.*). Quodsi ergo distantia oculi inter flammam & splendorem circumfusum distinguere nescientis minorem habuerit rationem ad diametrum aggregati ex flamma & splendore circumfuso quam distantia minor, ubi oculus illam ab hoc distinguit, ad magnitudinem flammæ; sinus quoque totus in priore casu minorem rationem habebit ad tangentem anguli visorii quam in posteriore. Tangens igitur anguli visorii in priore casu major est, quam in posteriore (§. 206. *Arithm.*) Quamobrem cum aggregatum ex flamma & splendore circumfuso sub majore angulo videatur, quam flamma sola; illud quoque majus apparet, quam hæc (§.209). *Q. e. d.*

SCHOLION.

266. *Apparet adeo ratio, cur faces & candelæ accensæ oculo in tenebris constituto e longinquo majores appareant, quam in vicinia in aere collustrato. Ponamus enim flammam facis accensæ esse unius digiti & in distantia sex pedum optime adhuc distingui ab aeris splendore circumfuso. Recedat oculus per distantiam quadruplam, ita ut a face jam distet intervallo* 24. *pedum, sit vero aggregati ex flamma & splendore circumfuso diameter solius flammæ quintupla, nempe* 5 *digitorum. Erit ergo ratio distantiæ propioris ad flammam ut* 60 *ad* 1, *distantiæ remotioris ad aggregatum ex flamma & splendore circumfuso ut* 240 *ad* 5, *hoc est, ut* 48 *ad* 1: *quarum rationum posterior priore utique minor* (§.158. *Arithm.*). *Quamvis vero dubium non sit, quin in majore distantia major quantitas splendoris circumfusi a flamma non distin-*

guatur; quoniam tamen integra activitatis sphæra finita est, omnique magnitudini assignari possit intervallum, ultra quod non amplius videtur (§. 218); *evidens quoque est, quod detur aliquis terminus, in quo lux ignea noctu maxima apparere debet, & ultra quem angulus visorius continuo minuitur, distantia ulterius crescente. Hunc vero terminum, datis experientiis necessariis ex principiis superioribus in casibus singularibus haud difficulter reperire licebit.*

DEFINITIO 39.

Tab. IV. Fig. 50. 267. Visibile AB dicitur oculo in D *directe opponi*, si unus radiorum AD centrum pupillæ attingens fuerit ad id perpendicularis. Contra vero AC *oblique opponi* dicitur eidem oculo in D, si nullus radiorum, qui centrum pupillæ attingunt, fuerit ad ipsum perpendicularis.

THEOREMA 49.

268. ***Æqualia objecta*** **AB** ***&*** **AC,** ***quorum alterum*** **AB** ***oculo*** **D** ***directe, alterum vero*** **AC** ***eidem oblique objicitur, in eadem distantia inæqualia apparent: videturque majus*** **AB** ***, quod directe opponitur.***

DEMONSTRATIO.

Quia AC & AG sub eodem angulo videntur, æqualia apparent (§. 209). Est vero AG ipsius AB pars: videtur adeo AC parti ipsius AB æqualis, consequenter minor quam AB (*§. 20. Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

269. *Haud difficulter apparet, theorema præsens non modo valere de objectis in eodem cum oculo plano horizontali sitis; sed etiam de aliis, quæ horizontali insistunt.*

PROBLEMA 31.

270. ***Data distantia*** **AD** ***puncti omnium maxime vicini*** **D** ***una cum angulo obliquitatis*** **CAD** ***& magnitudine visibilis*** **AC** ***invenire magnitudinem directam*** **AG**, ***cui obliqua*** **AC** ***æqualis apparet.*** Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

1. Quoniam angulus DAC datur una cum cruribus DA & AC, *per hypoth.* inveniri potest angulus visorius ADC (*§. 40. Trigon.*).
2. Jam cum angulus DAG rectus sit (§. 78. *Geom.* & §. 273. *Optic.*); reperietur porro AG (§. 36. *Trigon.*).

E. gr. Sit AD 75 perticarum, AC vero 58, angulus CAD 108° 24′; erit AB+AC = 133, AB−AC = 17, $\frac{1}{2}$(C+D) = 35° 48′, adeoque

Log.

Log. AC + AB	21238516
Log. AB − AC	12304489
Log. Tang. ½ (C+D)	98580694
Logg. Summa	110885183
Log. Tang. ½ (C−D)	89646667
Ergo ½ (C−D) =	5° 16′
½ (C+D) =	35 48
ang. D =	30 32
Log. Sin. tot.	100000000
Log. Tang. D.	97707261
Log. AD	18750613
Log. AG	11.6457874

Est ergo AG 44 perticarum.

THEOREMA 50.

271. *Si longitudo* AB *fiat basis semicirculi majoris* ADB *& ejus segmenta qualiacunque* AC *&* CB *bases semicirculorum minorum secantium crura* AD *&* DB *in semicirculo majore; oculo* D *in* E *&* F *posito videntur segmenta* AC *&* CB *& inter se, & toti æqualia.* Tab. VII. Fig. 85.

DEMONSTRATIO.

Anguli enim D, E & F sunt anguli in semicirculo *per constr.* adeoque recti (§. 317. *Geom.*), consequenter inter se æquales (§. 145. *Geom.*). Videntur itaque segmenta AC & CB cum tota AB ex iisdem composita sub eodem angulo, adeoque & inter se, & toti æqualia apparent (§. 209.). *Q. e. d.*

CAPUT IV.

DE

VISIONE FIGURÆ.

THEOREMA 51.

Tab. IV. Fig. 51. 272. *Si centrum pupillæ in directum jacet lineæ rectæ* AB; *linea instar puncti apparet.*

DEMONSTRATIO.

Si enim centrum pupillæ in directum jacet lineæ rectæ AB, fieri omnino nequit, ut a punctis reliquis præter A radii ad oculum pertingant (§. 46). Quare cum nullum punctum videatur, nisi quod in oculum radiat (§. 42); nullum lineæ AB punctum præter A videri potest. Recta igitur AB centro pupillæ in directum jacens instar puncti apparet. *Q. e. d.*

THEOREMA 52.

273. *Si superficies oculo directe opponatur, nec nisi unica perimetri linea in eum radiare possit; instar lineæ apparet.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nonnisi unica perimetri linea in oculum radiare potest, *per hypoth.* radii non aliter in oculum ingrediuntur ac si unica tantum linea adesset. Cum adeo is non aliter afficiatur, quam ab unica linea afficitur; instar lineæ quoque superficies apparere debet (§. 43). *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

274. *Si corpus oculo directe opponatur, nec nisi unicum superficiei planum in eum radiare possit; instar superficiei apparet.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis præcedentis.

THEOREMA 54.

Tab. IV. Fig. 52. 275. *Arcus* ACB *ab oculo* O *in eodem plano existente e longinquo visus instar lineæ rectæ* CE *apparet.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus CB & recta CE sub eodem angulo videntur; æquales apparere debent (§. 209). Quamdiu vero recta DF distincte percipitur; punctum D a puncto F distingui potest. Sed quando DF ex intervallo OD visum instar puncti apparet, puncta D & F non amplius distinguuntur, adeoque unum idemque esse videntur. Hoc cum eodem modo ostendatur de puncto quocunque altero arcus CB: idem e longinquo visus instar lineæ CE apparere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

276. Ex demonstratione abunde patet, theorema non tantum de arcubus circuli, sed de arcubus curvæ cujuscunque valere.

THEOREMA 55.

277. *Sphæra e longinquo visa circulus apparet.*

DEMONSTRATIO.

Portio superficiei sphæræ, quam oculus in B videt, generatur, si arcus DE circa axem DC rotetur (§. 470. *Geom.*). Sed arcus DE apparet ut recta DF (§. 275). Ergo portio superficiei sphæræ ab arcu DE descriptæ apparet instar figuræ, quæ rotatione rectæ DF circa punctum D generatur, hoc est, ut circulus (§. 131. *Geom.*) *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 42.

COROLLARIUM.

278. Cum arcus quilibet instar rectæ appareat (§. 275;) alia quoque cor-

corpora rotunda instar circuli apparere debent.

THEOREMA 56.

Tab. IV. Fig. 53. 279. *Si tria visibilia* A, B *&* C *in eadem superficie, sed non in eadem recta collocentur, sitque medium* B *remotius ; figuram cavam oculo exhibebunt : ubi vero fuerit medium* B *propinquius, convexam.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim per tria puncta non in directum jacentia circulus describi possit (*§.* 294. *Geom.*); tria illa puncta non aliter in oculum radiabunt, ac si in casu primo in arcu circuli concavitatem oculo D obvertente, in altero vero in arcu circuli convexitatem oculo D obvertente posita essent. In illo itaque figuram concavam ; in hoc convexam oculo exhibebunt (*§.* 43). *Q. e. d.*

THEOREMA 57.

280. *Magnitudines angulosæ in majori distantia rotundæ apparent.*

DEMONSTRATIO.

Tab. V. Fig. 54. Ex corpore anguloso fit rotundum, si anguli A, B, C, D resecentur. Jam cum omnis magnitudo in certa quadam distantia evanescat, nec amplius videatur (*§.* 215); anguli quoque A, B, C, D in magna distantia evanescere debent. Magnitudines igitur angulosæ rotundæ appareant necesse est. *Q. e. d.*

SCHOLION.

281. *Evidens est, theorema intelligendum esse non modo de figuris superficialibus; sed & de solidis. Inde est, quod turres quadratæ eminus conspectæ rotundæ appareant.*

COROLLARIUM.

282. Quoniam si circulus ellipsi vel figuræ cuique rotundæ oblongæ inscribitur, excessus hujus supra illum angulis figuræ angulosæ respondent; ellipsis seu figura rotunda oblonga instar circuli apparere debet.

THEOREMA 58.

283. *Si quadratum aut rectangulum* ABCD *uno tantum latere* AB *oculo directe objiciatur; in majore distantia trapezium videbitur.* Tab. V. Fig. 55.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim latera AC & BD sunt parallelæ (*§.* 336. *Geom.*) & oculus E intra eas ponatur; puncta C & D minus distare videntur, quam A & B (§. 227). Cum itaque rectæ AB & CD inæquales appareant; quadratum vel rectangulum trapezii figuram exhibet (§. 103. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

284. Quoniam lineæ parallelæ tandem coire videntur (§. 228); si latera rectanguli AC & BD fuerint longiora & figura sufficiente intervallo ab oculo removeatur; triangulum videbitur (§. 87. *Geom.*).

THEOREMA 59.

Tab. V. Fig. 56. 285. *Si oculus* G *ad centrum* E *figuræ regularis* ABDC *ita defigatur, ut recta* EG *sit ad planum perpendicularis; veram visibilis figuram videbit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim CE=EB=AE=ED (§. 40. *Geom.*), AC=CD=DB=AB (§. 106 *Geom.*) anguli ad E sunt recti (§. 78. *Geom.*) & latus GE est omnibus triangulis AGE, EGB, EGD, EGC communis. Ergo anguli cognomines æquales sunt & AG=CG=DG=BG (§. 179. *Geom.*), consequenter etiam anguli AGC, CGD, DGB, BGA æquales sunt (§. 251. *Geom.*). Videntur adeo tum rectæ AB, BD, DC, CA, tum AE, BE, DE, CE sub æqualibus angulis. Quamobrem tum illæ, tum hæ æquales apparent (§. 209). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

Tab. V. Fig. 56. 286. *Si oculus* G *perpendiculariter in centrum circuli* E *dirigatur, vel distantia oblique in ipsum directi* GE *fuerit semidiametro* AE *æqualis; circuli vera figura videbitur.*

DEMONSTRATIO.

In utroque enim casu omnes diametri apparent æquales (§. 252). Vera igitur circuli figura videtur (40. *Geom.*), *Q. e. d.*

THEOREMA 61.

287. *Si oculus* G *oblique in centrum figuræ regularis* ABCD *vel etiam in circulum dirigatur; vera visibilis figura non apparebit, circulusque videbitur oblongus.* Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Pro diversa enim lineæ GE ad radios CE, AE, BE, ED obliquitate; tum radii isti, tum etiam latera AC, AB, BD, CD inæqualia apparent (§. 268). Vera igitur neque figuræ regularis ABDC (§. 106. *Geom.*), neque circuli (§. 38. *Geom.*) figura videtur. *Quod erat unum.*

Quoniam vero diametri aliæ videntur aliis majores, *per demonstrata;* circuli figura utique altera parte apparebit longior, altera vero brevior. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 62.

288. *Visibilium e longinquo visorum figuræ veræ non apparent.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Ut enim figura vera videatur, necesse est ut singulæ partes distincte appareant: partibus enim contiguis factis, quæ antea contiguæ non erant, figura mutatur. Sed cum omnis visibilis pars in determinata quadam distantia evanescat, nec amplius videatur (§. 215); necesse est, ut contiguæ appareant, quæ non sunt. Figura igitur vera visibilium e longinquo visorum non apparet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

Tab. V. Fig. 56. 289. *Hinc facies fœminarum e longinquo visæ apparent pulchræ, quæ in vicinia ob aliquas deformitates displicent.*

THEOREMA 63.

Tab. V. Fig. 57. 290. *Si unicum luminosi punctum* L *per foramen* ACB *radiet; figura luminis* a b c *plano* DE *foramini parallelo excepti erit figuræ foraminis similis.*

DEMONSTRATIO.

Sit foramen ABC triangulare: dico figuram luminis *a b c* similiter esse debere triangularem & quidem triangulum foramini simile. Quoniam punctum luminosum L radiat in singula puncta perimetri foraminis ABC (§. 60); radii extimi pyramidem triangularem effigiant, cujus basis est figura triangularis foraminis (§. 472. *Geom.*). Quodsi ergo radii ultra perimetrum per foramen continuentur; pyramis quoque continuabitur. Quare si plano DE foramini parallelo lumen excipiatur; erit *abc* triangulum foramini ABC simile (§. 473. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

291. Quodsi A*a* ad LA insensibilem habuerit rationem, erunt LA & L*a* ad sensum æquales, consequenter etiam figura luminis *a c b* ad sensum æqualis erit figuræ foraminis ACB.

SCHOLION.

292. *Idem quoque exinde demonstrari posset, quod radii a puncto remotiori* L *in planum exiguum incidentes sint paralleli ad sensum* (§. 93): *quo in casu nimirum* ABCbca *prisma esse debere patet.*

COROLLARIUM 2.

293. Quoniam innumera Solis puncta per idem foramen in cameram obscuram una radiant; lumen integrum immissum constat ex innumeris figuris foramini similibus & æqualibus.

THEOREMA 64.

294. *Si luminosum* SQ *per exiguum foraminulum* F *in cameram obscuram radiet & lumen plano* GH *foramini parallelo excipiatur; erit* Tab. V. Fig. 58.

erit ejus figura de figuræ luminosi SQ similis & in majori distantia a foramine F major.

DEMONSTRATIO.

Sit figura luminosi SQ circulus. Quoniam singula puncta peripheriæ in foramen F radiant (§. 60); erit SFQ conus (§. 467. *Geom.*). Quare si radii SF & QF omnesque intermedii ultra foramen F continuentur; lumen per cameram obscuram propagatum *d*F*e* itidem conus erit. Ergo si plano foramini parallelo excipiatur; figura luminis *de* erit circulus, tanto quidem major, quo majori intervallo a vertice coni, hoc est, a foramine F distet (§. 468. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

295. Per foramen igitur amplum immissum lumen Solis vel Lunæ ex innumeris constat conis æqualibus, quorum vertices sunt in singulis foraminis punctis.

THEOREMA 65.

Tab. V. Fig. 59. 296. *Si lumen Solis per foramen angulosum transmittatur, in distantia exigua a foramine ejus figuram habebit, in majore autem sensim sensimque ad circulum accedet.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumen Solis per foramen transmissum ex innumeris conis constat, quorum vertices in singulis foraminis DEF punctis constituti sunt (§. 295); si coni isti prope suos vertices secentur, plana sectionum a punctis ad sensum non different (§. 468. *Geom.*), adeoque perinde erit, ac si unicum tantum Solis punctum C in perimetrum foraminis DEF radiaret, consequenter lumen figuram foraminis habebit (§. 290). *Quod erat unum.*

Si vero iidem Coni in distantiis majoribus secentur, plana sectionum erunt circuli *g* tanto quidem majores, quo longioribus intervallis a foramine distant (§. 294). Plures igitur circuli majores ex singulis perimetri figuræ angulosæ *edf* punctis descripti cum ad sensum ab uno circulo non differant: lumen Solis in majore distantia a luminoso exceptum plano foramini parallelo figuram circuli ad sensum habebit. *Quod erat alterum.*

SCHOLION 1.

297. *Theorema præsens experientia abunde confirmat. Imo idem experientia prius innotuit, quam Optici in rationes ejus inquirerent. Unde & Optici veram causam initio non assecuti in reddenda phænomeni ratione non consensere* (m).

CO-

(m) Vid. Keplerus in Paralipomenis in Vitellionem c. 2. p. 57. & seqq.

COROLLARIUM 1.

298. Quodsi ergo pars foraminis tegatur, in minori distantia mutabitur figura luminis transmissi, ob mutatam foraminis figuram; sed in majori retinebit figuram circuli.

COROLLARIUM 2.

299. Quoniam tamen pauciores nunc radii transmittuntur; circulus erit minus lucidus (§. 84).

COROLLARIUM 3.

300. Cum vero circuli illi continuo augeantur (§. 294); lumina per duo foramina vicina transmissa primum ex parte, tandem prorsus in unum coalescunt, distantia nempe centrorum, quæ semper eadem manet, respectu radiorum seu semidiametrorum evanescente.

SCHOLION 2.

301. *Non injucundum est videre, etiam in conclavi illuminato, circulos a radiis per duo diversa foramina triangularia transmissos se mutuo successive contegentes, ita ut crescente continuo communi segmento tandem penitus congruant. Illud quoque observatu dignum est, quod lumen geminatum in communi segmento simplici in segmentis collateralibus multo clarius existat.*

COROLLARIUM 4.

302. Quodsi prope foramen aliqui radii a corpore opaco intercipiantur, deficientibus quibusdam conis lucidis; deficient quoque quidam circuli in lumine a plano excepti, consequenter etiamsi circuli reliqui amplientur, integrum tamen circulum majorem complere nequeunt, sed pars quædam deficiet, cujus scilicet radiatio intercepta.

SCHOLION.

303. *Hinc Solis eclipsin patientis pars deficiens etiam in ejus imagine a radiis per foramen transmissis formata deest.*

THEOREMA 66.

304. ***Si lumen Solis per foramen rotundum in cameram obscuram immittitur & a diametro circuli luminosi charta intus excepti utrinque auferatur semidiameter foraminis; circulus circa diametrum residuam descriptus est imago Solis per centrum foraminis radiantis.***

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumen Solis per foramen in cameram obscuram immissum ex innumeris constat conis æqualibus, quorum vertices sunt in singulis foraminis punctis (§. 295); si secetur plano ad radium per centrum foraminis transeuntem perpendiculari, circulus inde prodiens constabit ex innumeris circulis, quorum centra eandem a se invicem distantiam habent, quam habent conorum vertices in foramine (§. 468. *Geom.*), ob axium istorum conorum parallelismum

(§. 94). Extimi igitur circuli centrum a centro medii, qui per centrum foraminis radiat (§. 294) distat intervallo semidiametri foraminis. Quamobrem cum semicirculus extimus excedat medium ea latitudine, quæ est distantiæ centrorum æqualis; si a diametro circuli luminosi charta excepti intra cameram obscuram, lumine Solis per foramen rotundum radiante, auferatur utrinque semidiameter foraminis, circa residuam diametrum descriptus circulus est imago Solis per centrum foraminis radians (§. 294). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

Tab. V. Fig. 58. 305. Quoniam radii Solis extimi QF & QS per centrum foraminis directe transeunt in *e* & *d*, adeoque se mutuo secant in F; anguli QSF & *d*F*e* æquales sunt (§. 156. *Geom.*). Est igitur angulus *d*F*e* æqualis magnitudini apparenti Solis (§. 208).

COROLLARIUM 2.

306. Quoniam recta ex centro foraminis F in centrum circuli *c* ducta F*c* est distantia imaginis Solis *dc* a foramine F (§. 225. *Geom.*); ex data distantia imaginis Solis a foramine *dc* & semidiametro imaginis *dc* inveniri potest semidiameter Solis apparens (§. 40. *Trig.*).

THEOREMA 67.

307. ***Si oculus in tenebris constitutus flammam candelæ vel facis accensæ, cui directe opponitur, a splendore aëris circumfusi non distinguit: figura flammæ rotunda apparet.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim in eadem a luminoso distantia lumen ejusdem sit intensitatis (§. 97), quodlibet vero luminosi punctum radios quaqua versum diffundat (§. 59); splendor in aëre sphæræ figuram induet (§. 471. *Geom.*). Quodsi ergo oculus in majore distantia & in tenebris constitutus differentiam inter flammam & splendorem non amplius distinguit; flamma rotunda apparere debet (§. 277). *Q. e. d.*

CAPUT

CAPUT VII.

DE VISIONE LOCI.

THEOREMA 68.

308. *Si distantia duorum visibilium sub angulo insensibili videtur; corpora disjuncta contigua apparent.*

DEMONSTRATIO.

Si enim distantia sub angulo insensibili videtur; inter imagines in oculo distantia nulla est. Sunt adeo imagines in oculo contiguæ: consequenter visibilia contigua apparent (§. 69).

COROLLARIUM 1.

309. Quoniam ex pluribus contiguis continuum resultat; si plurium visibilium distantiæ sub angulo insensibili apparent, in unum continuum coalescere videntur.

COROLLARIUM 2.

310. Cum determinari possit distantia, in qua quælibet magnitudo evanescit (§. 218); haud difficulter quoque in casu quolibet invenitur, in qua distantia duo corpora positione data contigua & plura instar unius continui apparere debeant.

SCHOLION.

311. *Eleganter hinc notio continui illustratur. Dicimus nimirum continuum, ubi inter nostras perceptiones ordinem nullum simpliciorem interponi posse animadvertimus.*

PROBLEMA 32.

312. *Tessellatas imagines construere, quæ in partes dissectæ & per planum striatum dispersæ oculo integræ apparent.*

RESOLUTIO.

1. Fiant prismata lignea tantæ longitudinis, quanta est imaginis latitudo, quorum basis EDC est triangulum æquilaterum. Tab. V. Fig. 60.
2. Imago dissecetur in fascias, quarum singulæ sint plano EDGF æquales.
3. Fasciæ istæ agglutinentur planis prismatum dextris EDGF.
4. Sinistris vero DCHG agglutinentur aliæ alterius imaginis.

Quodsi enim prismata super tabula horizontali ita colloces, ut prismatum latera HC se mutuo tangant; oculus in plana dextra ED GF, directus videbit imaginem unam; directus vero in sinistra DC GH alteram contuebitur: vide-

bunturque partes disjunctæ contiguæ (§. 309).

SCHOLION.

313. *Possunt etiam prismata ita collocari, ut plana* EDGF *sint in eodem plano, & imagines in iis delineari: quo facto, in situm convenientem redigenda.*

THEOREMA 69.

314. *Visibilia remota obscura apparent & minus distincta.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim quodlibet visibilis punctum per radios divergentes radiet (§. 59); crescente distantia, lumen descrescit (§. 87). Visibilia igitur obscuriora videntur, si fuerint remotiora. *Quod erat unum.*

Quia qualibet magnitudo in data quadam distantia evanescit (§. 218), partes autem minores citius evanescunt majoribus (§. cit.); visibilis remoti partes omnes non apparent. Quare cum visibile tanto distinctius videatur, quanto plures ejus partes discernere licet (§. 40); visibile remotum minus distinctum apparet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

315. Hinc ex visione obscura & confusa objectum magno intervallo distare colligimus.

SCHOLION 1.

316. *Et his principiis utuntur pictores, objecta alia aliis remotiora in eodem plano exhibituri.*

SCHOLION 2.

317. *Hinc quoque oriuntur fallaciæ visus complures. Ita conclavia parietibus dealbatis minora apparent, quia parietes videntur propiores. Agri etiam nive tecti minores apparent, quam gramine vestiti. Similiter montes nive conspersi, itemque nocturno tempore flammæ propiores; corpora opaca sub crepusculum remotiora videntur.*

THEOREMA 70.

318. *Si oculus A fuerit plano horizontali AB sublimior; partes remotiores videntur sublimiores, donec in eadem cum oculo altitudine constituta videatur ultima.* Tab. V. Fig. 61.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB ad BC supponitur esse perpendicularis, si ex oculo A ducatur AD ipsi BC parallela; erit quoque BAD rectus (230. *Geom.*), consequenter omnem amplitudinem visus definit linea DC ipsi AB æqualis (§. 235). Jam si lineæ parallelæ BC & AD longius protrahantur, sensim sensimque coire videbuntur & quam primum coire videntur, visus terminatur (§. 228). Cum adeo partes rectæ BC continuo ad rectam AB accedant; uti-

utique ſenſim ſenſimque ſublimiores fieri videntur, donec ultima C in D conſtituta appareat. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

319. *Aliter hanc propoſitionem demonſtrat* Euclides (n). *Inſtar axiomatis aſſumit*, ſublimiora apparere, quæ per radium ſublimiorem videntur; *nec ſine ratione. Dum enim ſublimia ſpectamus, radii ex loco ſublimiori in oculum illabuntur. Unde ſi ex aliis rationibus contingat, ut radii alii aliis ſint ſublimiores; eodem modo oculum afficere debent, ac ſi e ſublimiori loco emanaſſent. Unde puncta quoque, ex quibus radiant, ſublimiora apparere debent* (§. 43). *Jam cum manifeſtum ſit, puncta* E & C *radiis ſublimioribus ſpectari anterioribus; inde concludit, puncta* E & C *ſublimiora apparere debere. Enimvero cum demonſtratio hujus & reliquarum propoſitionum, ad quas demonſtrandas axiomate hoc utitur* Euclides *multo evidentius ex antecedentibus deducantur; principiorum numerus ſine neceſſitate non videtur multiplicandus, præſertim cum ex noſtra demonſtratione una conſtet terminus, ad quem remotiora elevari poſſunt dataque altitudine oculi partes, quæ ſubliores apparere debent, facile determinentur. Poſſet tamen axioma* Euclidis *eodem modo demonſtrari, quo nos propoſitionem demonſtravimus.*

Tab. V. Fig. 61.

SCHOLION 2.

320. *Cæterum jam conſtat ratio, cur mare ad littora ſtantibus verſus medium ſenſim ſenſimque attolli videatur.*

THEOREMA 71.

321. *Si planum* BC *fuerit ſublimius oculo* A *remotiora* E & C *depreſſiora apparent, donec punctum ultimum* C *videatur per altitudinem* DC *profunditati oculi* BA *æqualem deſcendiſſe.* Tab. V. Fig. 62.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorſus eſt, quæ theorematis præcedentis.

SCHOLION.

322. Euclides *ad theorema hoc demonſtrandum aſſumit inſtar axiomatis*; depreſſiora apparere, quæ per radium depreſſiorem videntur: *de quo idem eſto judicium, quod ſupra* (§. 319) *de ſimili axiomate* Euclideo *tulimus.*

THEOREMA 72.

323. *Si magnitudines quotcunque* AB, CD, EF *ſub oculo* O *ponantur; remotiores* EF, CD *ſublimiores apparent.* Tab. V. Fig. 63.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim per puncta A, C, E recta GE; erunt A, C, E in eodem plano. Quare cum oculus O ſit ſublimior plano GE, *per hypoth.* remotiora C & E, ſublimiora apparere debent (§. 318). *Q. e. d.*

(n) In Optic, prop. 10.

COROLLARIUM.

324. Quodsi magnitudo ultima tanto intervallo ab oculo distet, ut altitudo oculi HE sub angulo insensibili videatur (§.218); magnitudo E videbitur ad oculi sublimitatem assurgere (§. 318).

THEOREMA 73.

325. *Si magnitudines quotcunque æquales fuerint supra oculum elevatæ; remotiores depressiores apparent.*

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis, modo figura invertatur.

THEOREMA 74.

Tab. V. Fig. 64. 326. *Altitudinum majorum* AB *partes superiores* BC *videntur inclinatæ.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus A rectus est (§. 227. *Geom.*); si ex oculo D agatur altitudini AB parallela, erit angulus ADE itidem rectus (§. 230. *Geom.*) adeoque amplitudo visus intra parallelarum AB & DE intervallum continetur (§. 235). Sed lineæ parallelæ AB & DE sensim sensimque coire videntur (§ 227). Ergo puncta remotiora C & B vertici propiora apparent inferioribus, consequenter pars superior BC inclinata videtur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

327. *Inde est quod templorum altcrum frontispicia, itemque turres, in minori distantia videantur antrorsum inclinari: dico, in distantia minori. Quo minor enim fuerit spectatoris distantia a turri* AD, *eo celerius parallelarum intervallum coire videtur, unde vi demonstrationis phænomenon pendet.*

COROLLARIUM.

328. Quodsi ergo pars superior BC a perpendiculari AC reclinata fuerit; ab oculo prope adstantis erecta videri poterit.

SCHOLION.

329. *Inde est, quod statuæ in locis editis collocatæ paululum reclinentur.*

THEOREMA 75.

330. *Remotiora* C & D *ad dextram sita videntur vicinioribus* L & B *sinisteriora; quæ vero ad sinistram sita sunt* F & E, *videntur vicinioribus* M & G *dexteriora.* Tab. V. Fig. 65.

DEMONSTRATIO.

Sit enim oculus in A & recta AB ad DB perpendicularis. Concipiatur porro AH perpendicularis ad AB; erunt AH & BD parallelæ (§. 256. *Geom.*). Punctum ergo D propius videbitur puncto H, quam C ipsi I, & C propius apparebit ipsi I, quam L ipsi K, vel B ipsi A (§. 227). Puncta igitur D & C sinistræ propiora videntur, quam L & B. *Quod erat unum.*

Eo-

Eodem modo ostenditur, remotiora F & E ad sinistram sita apparere dexteriora vicinioribus M & G. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 76.

Tab. V. Fig. 65. 331. *Fieri potest, ut visibile* D *ad dextram vel sinistram situm, oculo* A *in directum jacere videatur.*

DEMONSTRATIO.

Parallelæ enim DB & AH alicubi coire videntur (§. 228). Quodsi igitur oculus fuerit in illo puncto A, ex quo coire videntur; punctum D coincidere videbitur cum puncto H, adeoque D apparebit in H, nempe in directum jacens oculo A. *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, fieri posse ut visibile F versus sinistram situm oculo A in directum jacere videatur.

THEOREMA 77.

Tab. V. Fig 66. 332. *Si spatium inter visibile* C *& visibilia* D *atque* E *interjectum spectatoribus in* A *&* B *imperceptibile fuerit; idem objectum* C *in diversis locis videbunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam distantia CD spectatori in B imperceptibilis *per hypoth.* objectum C apparebit contiguum alteri D (§. 308). Videt adeo C in D. Eodem modo ostenditur, spectatorem in A videre objectum C in E. Diversis itaque in locis idem objectum C vident spectatores in A & B. *Q. e. d.*

THEOREMA 78.

333. *Si objectum vicinius* C *ad alia remotiora refertur; diversis spectatoribus* A *&* B *e regione diversorum objectorum* D *&* E *apparebit.* Tab. V. Fig. 66.

DEMONSTRATIO.

Objectum C enim inter oculum A & alia remotiora positum e regione ejus videtur, quod punctis A & C in directum jacet. Quoniam vero rectæ AC & CB ex oculis spectatorum A & B in idem objectum C ductæ segmentum commune habere nequeunt (§. 29. *Geom.*): aliud omnino punctum remotius in directum jacet rectæ BC, aliud vero rectæ AC (§. 61. *Geom.*). Idem ergo objectum C diversis spectatoribus A & B e regione diversorum objectorum remotiorum D & E apparet. *Q. e. d.*

DEFINITIO 40.

334. Loca D & E, ad quæ spectatores in A & B referunt objectum C, dicuntur *Loca Optica.* Tab. V. Fig. 66.

THEOREMA 79.

335. *Si recta jungens loca optica* D *&* E *fuerit parallela rectæ trans-*

transeunti per oculos spectatorum AB*; erit distantia locorum opticorum* DE *ad distantiam spectatorum* A *&* B*, ut distantia loci optici alterutrius a visibilis loco* EC*, ad distantiam spectatoris alterutrius ab eodem visibili* AC.

DEMONSTRATIO.

Quia DE parallela ipsi AB *per hypoth.* erit augulus D = B (§. 233. *Geom.*). Sunt vero etiam verticales ad C æquales (§. 156. *Geom.*). Quare EC : DE = AC : AB (§. 267. *Geom.*), consequenter EC : AC = DE : AB (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 80.

Tab. V. Fig. 67. 336. *Quodlibet punctum visibile* A *radiat in pupillam per conum, cujus vertex in ipso puncto radiante* A*, basis vero, pupilla.*

DEMONSTRATIO.

A puncto enim radiante A ad quodlibet punctum pupillæ, adeoque & ad quodlibet perimetri punctum D, C, E &c. emittitur radius (§. 60). Radii igitur extimi superficiem coni formant, cujus vertex A, basis circulus DCE sive pupilla (§. 467. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

337. Si triangula DAE & D*a*E fuerint in eodem plano, erit *a* > A (§. 300. *Geom.*); adeoque anguli *a*DE & *a*ED minores angulis ADE & AED (§. 240. *Geom.*), consequenter radii AE & AD majores angulos efficiunt cum diametro pupillæ, quam *a*D & *a*E. Remotiorum itaque radii minus ad diametrum inclinantur, quam radii viciniorum (§. 54. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

338. Quodsi ergo contingat, ut radii minus divergentes fiant magis divergentes; qui a puncto remotiori A emanant, perinde ac a puncto viciniori *a* in pupillam radiabunt.

COROLLARIUM 3.

339. Contra si contingat, ut radii magis divergentes, antequam oculum ingrediantur, fiant minus divergentes; qui a puncto viciniori *a* emanant, perinde in oculum radiabunt, ac si e remotiori A emanassent.

DEFINITIO 41.

340. *Axis opticus* est radius per centrum oculi transiens.

DEFINITIO 42.

341. *Horopter* est linea recta AB, quæ per concursum axium opticorum C oculorum D & E rectæ HI centra oculorum H & I conjungenti parallela ducitur. Tab. V. Fig. 68.

SCHOLION.

342. *Vocatur* horopter, *quia experientia constat, hunc esse terminum visionis distinctæ.*

DE-

DEFINITIO 43.

343. *Planum horopteris* est, quod per horopterem AB transit & ad planum per axes opticos transiens ICH perpendiculare existit.

THEOREMA 81.

Tab. V. Fig. 68. 344. *Si visibile in horoptere* AB *collocatur, quodlibet punctum videtur in concursu radii a puncto imaginis respondente per centrum oculi retroducti & horopteris.*

DEMONSTRATIO.

Dum objectum in horoptere collocatur, experientia teste, punctum unumquodque videmus ibi, ubi est, adeoque ubi radii in oculum incidentes retroducti concurrunt, hoc est. in vertice sui coni (§. 335). Sed dum visibile in horoptere collocatur, radiorum a quovis puncto emanantium unus per centrum uniuscujusque oculi transit (§. 341). Quare cum omnes radii ab eodem objecti puncto egressi in retina rursus in uno puncto uniantur (§. 75), radius vero per centrum transiens irrefractus transeat; punctum imaginis quodlibet ibi delineabitur, ubi radius per centrum transiens retinam attingit. Hunc ergo si retroducas usque ad horopterem, ibi eundem secabit in A, ubi erat vertex Coni, per quem irradiatio in oculum fiebat. Videbitur ergo visibilis punctum in concursu horopteris AB & radii KA a puncto imaginis respondentis per centrum oculi retroducti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

345. Quoniam duo radii KA & LA ab eodem puncto imaginis per centra H & I oculorum E & D retroducti horopterem AB in eodem puncto A secant, utpote qui ab eodem irrefracti per centrum utriusque oculi ad retinam penetraverant; uterque oculus visibile in horoptere positum in eodem loco A videt, consequenter duobus oculis unicum apparet.

COROLLARIUM 2.

346. Quia radius KA ab inferiore imaginis puncto per centrum oculi H retroductus horopterem in loco superiori A secat; qui vero a superiori imaginis parte M per idem centrum H retroducitur MK, eidem horopteri AB in loco inferiori B occurrit, punctum imaginis inferius K videtur in loco superiori A; punctum vero superius M in loco inferiori B. Quare cum imago MGK in retina sit inversa (§. 61); objectum situ erecto apparet.

COROLLARIUM 3.

347. Quodsi ergo imago in retina MGK fuerit erecta; eodem modo constat, visibile videri debere situ inverso.

COROLLARIUM 4.

348. Si contingat, radios a puncto quocunque egressos ita disponi, ut oculum sub iis angulis ingrediantur, ac si coni optici vertex esset in A; visibile quoque in A videri debet (§. 43).

COROLLARIUM 5.

349. Quoniam aliam oculi conformationem requirunt objecta remota, alia vicina (§. 64), adeoque oculus uno obtutu diversis intervallis distantia distincte comprehendere nequit (§. 70); quæ extra horopterem posita confuse videt, ad horopterem referre debet. Videbitur itaque etiam punctum extra horopterem positum in concursu horopteris & radii a puncto imaginis respondente per centrum oculi ducti (§. 324).

THEOREMA 82.

Tab. VI. Fig. 69. 350. *Si visibile* G *extra horopterem* DE *sit constitutum; geminatum apparebit in* D & E.

DEMONSTRATIO.

Oculus enim A videt objectum G per radium AE in E; oculus vero B idem objectum videt in D, obtutu utriusque in C defixo (§. 349). Videtur igitur geminatum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

351. Quodsi oculus dexter B tegatur, disparebit objectum sinistrum D; si vero oculus sinister A tegatur, objectum E evanescet.

SCHOLION.

352. *Hæc experientiæ valde consona deprehenduntur. Statuatur enim objectum aliquod tenue, sed longum e regione nasi ad distantiam unius circiter pedis: obtutu ultra id directo in* C, *geminatum videbis, at confuse. Et quo longius obtutum diriges, eo majori intervallo distabunt imagines, altera quidem dexteram versus in* E, *altera vero sinistram versus recedente. Si autem obtutum versus objectum retrahis, imagines sensim sensimque coeunt, donec obtutu in eodem fixo non nisi unicum appareat* (§. 344). *Simile phænomenon est, si oculo uno infra alterum depresso aut supra alterum detorso objectum geminatum apparet; item cum ebrii & furiosi omnia conspiciunt geminata.*

COROLLARIUM 2.

353. Quoniam AB ipsi DE parallela (§. 343), erit $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Quare cum etiam verticales ad G sint æquales (§. 156. *Geom*); erit ut BG distantia objecti G ab oculo B ad GD distantiam ejusdem a loco horopteris in quo videtur, ita distantia oculorum AB ad distantiam locorum D & E, in quibus videtur.

CAPUT VIII.
DE
VISIONE MOTUS.

THEOREMA 83.

Tab. VI. Fig. 70. 354. *Si duo objecta* B *&* E *inæqualiter ab oculo* A *distantia æquali celeritate ferantur: remotius* E *tardius moveri videtur.*

DEMONSTRATIO.

Quia B & C æquali celeritate feruntur, *per hypoth.* eodem tempore æqualia spatia BD & EF percurrunt (*§. 27. Mechan.*). Sed quoniam EF e longinquiori intervallo videtur quam BD, *per hypoth.* apparebit EF minor quam BD (§. 211), consequenter remotius objectum E eodem tempore minus spatium confecisse, adeoque tardius moveri putatur (§. 15. *Mechan*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

355. Si ergo B & E a terminis oculo immoto A in directum sitis versus eandem plagam digrediantur; vicinum B præcedere, remotum E sequi videbitur.

COROLLARIUM 2.

356. Quodsi remotum E non nimis celerius moveatur, quam vicinum B, ut nempe sit $EN > BD$; motus ipsius B videbitur adhuc celerior.

THEOREMA 84.

357. *Si duo objecta* B *&* E *moveantur celeritatibus distantiis ab oculo immoto* AB *&* AE *proportionalibus; eadem celeritate moveri videntur & contra.* Tab. VI. Fig. 70.

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritates sunt ut spatia eodem tempore percursa BC & EF (§. 33. *Mechan*), illæ autem distantiis AB & AE proportionales *per hypoth.* hæc quoque iisdem proportionalia sunt (*§. 167. Arithm.*), consequenter sub eodem angulo videntur (§ 222) & hinc æqualia apparent (*§. 209*). Eadem igitur celeriaate moveri putantur (§ 29. *Mechan.*). *Quod erat unum.*

Quodsi eadem celeritate moveri videntur, spatia decursa BC & EF apparent æqualia (§. 29. *Mechan*), adeoque sub eodem angulo videntur (§. 209). Quare si spatia BC & EF ad distantias perpendiculariter applicentur (§. 225. *Geom.*); cum sit BC ad EF parallela (*§. 256. Geom.*), erit $AB : AE = BC : EF$ (*§. 268. Geom.*), consequenter ce-

leritates etiam ſunt ut AB ad AE (§. 33. *Mechan.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 85.

Tab. VI. Fig. 70. 358. *Si objectum remotum* E *tardius movetur quam vicinium* B; *motus vicinioris* B *multo celerior apparet, quam eſt.*

DEMONSTRATIO.

Sint ſpatia eodem tempore decurſa EG = BC & BD. Quodſi objecta æqualiter ab oculo immoto A diſtarent; ſpatium a tardiori decurſum BC tanquam pars ſpatii a celeriori deſcriptum ſub minori angulo BAC videretur, quam BD. Sed cum ex diſtantia AE videtur; ſub angulo adhuc minore EAG conſpicitur, adeoque multo minor pars apparet ipſius BD (§. 209). Quare cum ſpatia eodem tempore decurſa ſint ut celeritates (§. 33. *Mechan*); celeritas ipſius E multo minorem habere videbitur rationem ad celeritatem ipſius A, quam revera habet (§. 203. *Arithm.*) adeoque celeritas vicinioris A major apparebit quam eſt (§. 206. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 33.

Tab. VI. Fig. 70. 359. *Datis diſtantiis objectorum* AB *&* AE *ab oculo immoto* A, *una cum celeritatibus, quibus verſus eandem plagam tendunt; invenire rationem celeritatum, quibus moveri videntur.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam celeritates ſunt ut ſpatia EG & BD eodem tempore percurſa (§. 33. *Mechan.*), datis celeritatibus datur etiam ratio ſpatiorum EG & BD.
2. Quæratur itaque magnitudo, quæ in diſtantia 10 vel paucio-rum pedum appareat utrique ſpatio EG & BD æqualis.

Cum enim objecta hæc ſpatia deſcribentia eadem celeritate moveri videantur, qua B & E feruntur (§. 357); erunt utique celeritates apparentes objectorum B & E ut celeritates, quibus in diſtantia 10 pedum ſpatia inventa eodem tempore deſcribuntur.

E. gr. Sit AB : AE = 1 : 9, EG : BD = 1 : 3, AH = 10: erit HI = EG. AH : AE = $\frac{10}{9}$ & HK = BD. AH : AB = 30. Sunt adeo celeritates objectorum E & B apparentes ut $\frac{10}{9}$ ad 30, hoc eſt ut 1 ad 27 (§. 178. 181. *Arithm.*).

THEOREMA 86.

Tab. VI. Fig. 70. 360. *Si duo objecta* B *&* E *ab oculo* A *inæqualiter diſtantia diverſa celeritate verſus eandem plagam tendunt; celeritates apparentes ſunt in ratione compoſita ex directa celeri-

leritatum verarum & reciproca distantiarum ab oculo AB *&* AE.

DEMONSTRATIO.

Sit enim AB=*a*, AE=*b*, BD=*c*, EG=*d*, AH=*e*; erit HI=*de* : *b* & HK=*ce* : *a*, consequenter (§. 268. *Geom.*) celeritates apparentes sunt ut *de* : *b* ad *ce* : *a*, hoc est, ut *ad* ad *bc* (§. 178. 181. *Arithm.*), nempe in ratione composita ex directa celeritatum verarum EG & BD atque reciproca distantiarum AB & AE (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 87.

Tab. VI. Fig. 70. 361. *Objectum* E *quacunque celeritate motum quiescere videtur, si ratio spatii intervallo unius minuti secundi descripti* EG *ad distantiam ab oculo* EA *fuerit imperceptibilis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim GE sit ad AE ut tangens anguli EAG, sub quo videtur objectum E, ad sinum totum (§. 7. *Trigon.*) si ratio ipsius EG ad EA fuerit imperceptibilis, tangentis quoque ad sinum totum ratio evanescet, adeoque EG sub angulo insensibili, hoc est, plane non videtur. Quare objectum E, quacunque celeritate motum, in eodem loco permanere adeoque quiescere putatur (§. 2. *Mechan.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

362. Quoniam ratio spatii unius minuti secundi intervallo descripti ad distantiam imperceptibilis est, tum si objectum vicinum nimis tarde movetur (ut index horologii horas monstrans), tum si objectum celeriter motum valde remotum fuerit (§. 218): & celeriter mota videntur quiescere, si nimis longo intervallo ab oculo distiterint, & motus vicinorum non percipitur, si nimis tardus fuerit.

COROLLARIUM 2.

363. Cum motus indicis in horologio & motus siderum circa tellurem non percipiatur, intra minutum secundum autem arcus 15 secundorum percurratur; evidens est, spatium a mobili percursum esse imperceptibile, si sub angulo 15 secundorum videtur, adeoque multo magis, si sub minori conspicitur.

THEOREMA 88.

364. *Objectum* E *quacunque celeritate motum quiescere videtur, si spatium percursum intra minutum secundum* EG *fuerit ad distantiam* EA *ut* 1 *ad* 1400. Tab. VI. Fig. 70.

DEMONSTRATIO.

Est enim tangens anguli EAG ad sinum totum ut spatium percursum EG ad distantiam EA (§. 7. *Trigon.*), adeoque in casu præsenti ut 1 ad 1400 (§. 167. *Arithm.*). Sed tangens anguli 15 secun-

ſecundorum eſt ad ſinum totum ut 727 ad 10000000, *vi Canonis*, hoc eſt, fere ut 1 ad 1375 (§. 181. *Arithm*). Cum adeo motus ſit imperceptibilis, ſi EG fuerit ad EA ut 1 ad 1375 (§. 363); multo magis perceptibilis erit, ſi fuerit ut 1 ad 1400 (§. 204. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

365. *Immo non dubito imperceptibilem fore motum ſi* EG *fuerit ad* EA *ut* 1 *ad* 1300.

THEOREMA 89.

Tab. VI. Fig. 71. 366. *Si oculus recta progrediatur ex* G *in* O *&c. objectum remotum in* H *quieſcens in oppoſitam partem moveri apparet.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim oculus in G hæret, objectum H videt in F. Dum ex G venit in O: idem conſpiciet in I, adeoque H ex F in I motum fuiſſe apparet. Similiter liquet, dum oculus pervenit in E; objectum videri in K, conſequenter in plagam oppoſitam moveri apparet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

367. Dum ergo oculus regreditur ex E in G; objectum quoque H ex K in F regredi videtur.

THEOREMA 90.

368. *Si oculus* A *& objectum* B *moveantur verſus eandem plagam & oculus quidem* A *multo celerius quam objectum* B; *objectum retrogredi videtur.* Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Dum enim oculus in A & objectum in B hæret; videbitur objectum in C. Quodſi jam objectum progrediatur iu F interea, dum oculus pervenit in E; oculus a tergo reſpiciens videbit objectum F in G, adeoque ultra terminum C, in quo ex A conſtitutum apparebat. Videtur itaque objectum ex C in G retrogreſſum eſſe. *Q. e. d.*

THEOREMA 91.

369. *Si oculus* A *recta progreditur inter objecta* B, L, C, D *&* G, M, E, F *a lateribus poſita, hæc ipſi ſenſim ſenſimque recedere videntur.* Tab. V. Fig. 65.

DEMONSTRATIO.

Cum enim remota D & C appareant e longinquo ſiniſteriora vicinioribus B & L; remota vero F & E dexteriora vicinioribus M & G (§. 330); ſi propius ad ea accedas, D & C magis verſus dextram, F & E vero magis verſus ſiniſtram diſtabunt. Quoniam itaque diſtantia ſucceſſive augetur; ſenſim ſenſimque C & D verſus dextram,

F &

F & E vero versus sinistram recedere videntur. *Q. e. d.*

THEOREMA 92.

370. *Si ad objectum procul situm recta tendas; nunquam ad id pervenies.*

DEMONSTRATIO.

Objectum enim valde remotum oculo A in directum jacere videtur, etsi ad dextram vel sinistram satis longo intervallo distet (§. 331). Quodsi igitur ad id recta tendas; propius accedenti continuo fiet vel sinisterius, vel dexterius, adeoque ad ipsum hac via nunquam pervenies. *Q. e. d.*

THEOREMA 93.

371. *Si oculus ad rem visam accedit, ea augeri videtur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 69. n. 1. Dum enim oculus ex C in G transfertur, objectum AB videt sub majore angulo (§. 300. *Geom.*), adeoque majus apparet (§. 209). Quare cum angulus sensim sensimque augeatur, oculo in objectum defixo, ipsum quoque objectum AB augeri videatur necesse est. *Q. e. d.*

THEOREMA 94.

272. *Si oculus a re visa recedit, ea minui videtur.*

DEMONSTRATIO.

Mutatis mutandis, coincidit cum præcedente.

THEOREMA 95.

373. *Magnitudines auctæ propius accessisse putantur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim idem objectum in vicinia majus appareat, quam e longinquo (§. 211); si magnitudines augentur, minus quam antea distare videntur, adeoque propius accessisse putantur. *Q. e. d.*

THEOREMA 96.

374. *Si duo objecta* A & B *eadem celeritate moveantur*, C *vero quiescat; videbuntur* A & B *quiescere*, C *vero in plagam contrariam moveri.* Tab. VI. Fig. 73.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim A & B eadem celeritate moventur, *per hypoth.* distantia earum a se invicem non mutatur, adeoque unum respectu alterius quiescere videtur. Dum vero interea objectum C prætereunt & situm suum ejus respectu mutant; C in contrariam plagam moveri videbitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

375. *Exemplum habes in nubibus celerrime motis, quarum cum partes situm non mutant, Luna in plagam oppositam ferri videtur.*

THEO-

THEOREMA 97.

376. ***Si oculus celerrime movetur, objecta juxta latera posita & quiescentia in partem contrariam moveri videntur.***

DEMONSTRATIO.

Dum enim oculus celerrime movetur, ejus ad objecta juxta latera posita situs continuo mutatur, adeoque ejusdem objecti imago alias aliasque retinæ partes successive occupare debet. Videbitur adeo objectum istud moveri (§. 86). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

377. *Ita si in curru sedens per silvam velociter proveharis, arbores in oppositum currere & navigantibus celeriter littora moveri videntur.*

SCHOLION 2.

378. *Multa sunt phænomena alia, quæ eodem modo solvuntur. Motus enim percipitur ex motu imaginis in retina (§. 68): imago movetur, si oculi ad idem objectum situs continuo & celeriter mutetur.*

CAPUT IX.

DE

VARIIS ACCIDENTIBUS VISUS ET VISIONE DUORUM OCULORUM.

DEFINITIO 44.

379. *Oculis valere* dicitur, qui clare & distincte videt tam remota, quam vicina pro ratione anguli visorii.

SCHOLION.

380. *Fieri nimirum nequit, ut vicina & remota æque clare & distincte videantur: id quod & suo modo de sequentibus tenendum.*

DEFINITIO 45.

381. *Presbyta* est, qui vicina confuse, remota distincte videt.

SCHOLION.

382. *Hoc senum ut plurimum vitium est: Unde ratio denominationis intelligitur.*

COROLLARIUM.

383. Cum objecta talia videantur, quales sunt imagines in retina delineatæ (§. 70); imagines remotorum in

in presbytæ oculo distinctæ sunt, vicinorum confusæ.

DEFINITIO 46.

384. *Myops* est, qui remota confuse, vicina distincte videt.

SCHOLION.

385. *Hoc eorum vitium est, qui visu breviori utuntur & scripturam oculis prope admovent lecturi.*

COROLLARIUM.

386. In myopibus itaque imagines valde vicinorum distinctæ; remotiorum confusæ sunt (§. 70).

OBSERVATIO 14.

387. ***Si radiis per lentem vitream utrinque convexam transmissis imago in charta opposita delineatur; majorem a lente distantiam habet, si hæc fuerit majoris sphæræ segmentum; at minorem, si minoris extiterit.***

COROLLARIUM.

388. Cum humoris crystallini eædem sint vires in refringendis radiis, quæ vitrorum utrinque convexorum (§. 61); imago quoque ejusdem objecti distincta majori intervallo ab eo distabit, si majoris, quam si minoris fuerit sphæræ segmentum.

SCHOLION.

389. *Hæc infra in Dioptrica demonstrantur.*

OBSERVATIO 15.

390. ***Lux nimia visui officit; per radios tamen plures clarius videtur objectum, quam per pauciores.***

SCHOLION.

391. *Radii nimirum nimis fortiter in retinam agentes eam lædunt: plures vero fortius in eam agunt, quam pauciores.*

THEOREMA 98.

392. ***Si objectum per pupillam ampliatam in oculum radiat, per plures radios videtur, quam si radii per coarctatam ingrediuntur.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim quodlibet objecti punctum in oculum per conum radiet, cujus vertex in ipso puncto radiante, basis vero pupilla est (§. 326); coni autem æque alti sint ut bases (§. 573. *Geom.*); per pupillam ampliatam plures radii in oculum ab eodem puncto objecti immittuntnr, quam per coarctatam. Quoniam itaque radii ab uno objecti puncto egressi per refractionem in humore crystallino passam rursus in uno retinæ puncto uniuntur (§. 75); objectum videtur per plures radios, si per pupillam ampliatam in oculum radiat, quam si per coarctatam radios immittit (§. 76). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. In priore igitur casu, si lux debilis vel temperata fuerit, clarius

videtur quam in altero. Si vero lux fuerit nimia; visio est melior in casu posteriori (§. 390).

THEOREMA 99.

394. *Qui oculis valent, illorum pupilla sufficienter coarctari & ampliari potest.*

DEMONSTRATIO.

Qui oculis valent, objecta clare vident (§. 397) adeoque per radios plures, non tamen nimios (§. 390). Quare cum pupilla ampliata objectum clarius videatur in luce temperata vel debiliore (§. 393); pupilla sufficienter dilatari potest. Et quia in luce majore melius videtur per coarctatam (§. cit.); in hoc casu sufficienter coarctari potest. Qui adeo oculis valent, illorum pupilla sufficienter coarctari & ampliari potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 100.

395. *Quorum pupilla nimis ampliata, nec satis coarctari potest; ii in luce debiliori melius vident, quam in clariori.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam objectum per pupillam ampliatam radians per plures radios videtur, quam si radii per coarctatam ingrediuntur (§. 392), lux vero nimia visui officit (§. 390); in luce clariori non bene videbunt, quorum pupilla satis coarctari nequit. Quoniam tamen objectum clarius videtur, si lux temperata vel debilior radiet per pupillam ampliatam, quam per minus ampliatam (§. 393); in luce debiliori melius vident. *Q. e. d.*

THEOREMA 101.

396. *Quorum pupilla est nimis arcta, nec sufficienter ampliari potest; in luce clariori melius vident, quam in debiliori.*

DEMONSTRATIO.

Si lux debilis sit vel temperata, objectum melius videtur, quod radiat per pupillam ampliatam (§. 395). Quorum igitur pupilla sufficienter ampliari nequit; in luce debili non bene vident. Quoniam tamen per pupillam coarctatam melius videtur objectum, si lux fuerit clarior (§. 393); quorum pupilla est valde arcta, in luce clariori bene vident. *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Quemadmodum vero diversi dantur gradus claritatis & obscuritatis; ita quoque limites coarctationis & ampliationis pupillæ varii esse possunt, qui nimii vel sufficientes dicantur.*

THEOREMA 102.

398. ***Si distantia retinæ ab humore crystallino nimis exigua fuerit; homo erit presbyta.***

DE-

DEMONSTRATIO.

Si distantia retinæ ab humore crystallino nimis exigua fuerit; in retina distinctæ delineari nequeunt imagines vicinorum (§.64). Objecta igitur vicina distincte videri nequeunt (§.70). Quoniam tamen imagines remotorum distinctæ esse possunt (§.64); remota distincte videri possunt (§.70). Quamobrem ubi distantia retinæ ab humore crystallino nimis exigua fuerit; homo erit presbyta (§.381). *Q. e. d.*

THEOREMA 103.

399. *Si humor crystallinus fuerit non satis convexus; homo erit presbyta.*

DEMONSTRATIO.

Si enim humor crystallinus non satis convexus, hoc est, majoris sphæræ segmentum; imago majori intervallo ab eo distat, quam ubi fuerit magis convexus (§.388). Quare cum vicinorum imagines ab humore crystallino magis distent, quam remotorum (§.64); si is non satis fuerit convexus, imago magis distare debet, quam retina, consequenter nulla in retina imago distincta delineatur, adeoque nec objecta vicina distincte videntur (§.70). Quoniam tamen objectorum remotorum imagines a crystallino humore minori intervallo distant (§.64); ut remotorum imagines in retina distincte delineentur fieri potest. Ea igitur distincte videbuntur (§.70), consequenter homo presbyta est (§.381). *Q. e. d.*

SCHOLION.

400. *Cuinam causæ in casu quolibet dato presbytæ vitium tribuendum; nondum certo definire licet.*

THEOREMA 104.

401. ***Si retina ab humore crystallino nimis remota fuerit; homo myops erit.***

DEMONSTRATIO.

Si retina ab humore crystallino nimis remota fuerit, in ea distincte delineari nequeunt objecta remota (§.64). Remota igitur distincte non videntur (§.70). Quoniam tamen id non obstat, quo minus vicinorum imagines distinctæ esse possint (§.64); vicinia distincte videri possunt (§.70. Homo igitur myops est (§.384). *Q. e. d.*

THEOREMA 105.

402. ***Si humor crystallinus fuerit nimis convexus; homo myops erit.***

DEMONSTRATIO.

Si enim humor cryſtallinus fuerit nimis convexus, imago exiguo intervallo ab eo diſtat (§. 388). Quare cum objectorum remotorum imagines diſtinctæ humori cryſtallino etiam ſint viciniores (§.64); imago delineabitur, antequam radii ad retinam pertingant, adeoque in retina non erit imago diſtincta, objectum itaque remotum videtur confuſum (§.70). Quoniam tamen vicinorum imagines ab humore cryſtallino magis diſtant (§. 64); fieri poteſt ut eæ in retina ſint diſtinctæ. Videbitur adeo objectum vicinum diſtinctum (§.70). Homo itaque myops eſt (§.384). *Q.e.d.*

SCHOLION.

403. *Quoniam ſphæricitas non minus cryſtallini humoris, quam ejus a retina diſtantia gradus varios admittit; utrumque etiam vitium gradus varios habet.*

THEOREMA 106.

404. ***Si humoris cryſtallini convexitas facile mutari poſſit, eadem manente ejus a retina diſtantia; homo oculis valebit.***

DEMONSTRATIO.

Sit ea humoris cryſtallini a retina diſtantia, ut objectorum vicinorum imagines ſint diſtinctæ; in ea diſtantia imagines remotorum erunt confuſæ, cum in humore vitreo diſtinctæ apparere debeant (§. 64). Quodſi jam humor cryſtallinus fiat minus convexus ſeu pauliſper complanetur; imago diſtincta longius ab eo recedere debet (§. 388). Cum itaque in retinam incidit; objectum etiam remotum diſtincte videtur (§. 70).

Eodem modo oſtenditur, mutata figura humoris cryſtallini in magis convexam, vicina diſtincte videri debere, cum antea diſtincte viderentur remota.

Quare ſi convexitas humoris cryſtallini facile mutari poſſit; & remota, & vicina diſtincte videntur, conſequenter homo oculis valet (§.379). *Q.e.d.*

THEOREMA 107.

405. ***Si eadem manente humoris cryſtallini figura diſtantia inter eum & retinam facile mutetur; homo oculis valebit.***

DEMONSTRATIO.

Sit ea humoris cryſtallini a retina diſtantia, ut remotorum imagines in ea diſtincte delineentur. Remota itaque diſtincte videbuntur (§.70). Jam cum imago diſtincta vicinorum magis a cryſtallino diſtet (§.64); ſi diſtantia cryſtallini a retina facile mutari poſſit, vicinorum quoque imago diſtincta in retina delineabitur, adeoque vicina diſtincte videbuntur (§.70).

Eodem

Eodem modo oſtenditur, objectum remotum etiam diſtincte videri poſſe, ſi ab initio ea fuerit cryſtallini a retina diſtantia, ut imagines vicinorum ſint diſtinctæ.

Patet itaque, ſi eadem manente humoris cryſtallini figura diſtantia inter eum & retinam facile mutetur, & remota, & vicina diſtincte videri; adeoque hominem oculis valere (§.379). *Q. e. d.*

THEOREMA 108.

406. ***Si & humoris cryſtallini figura, & ejus a retina diſtantia facile mutetur, homo oculis valebit.***

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonſtrationibus theorematum 106 & 107 (§. 404. 405).

SCHOLION.

407. *Quæ de diverſis oculorum accidentibus huc uſque demonſtravimus, in oculo artificiali (§.78) clariſſime oſtenduntur.*

THEOREMA 109.

408. ***Myopes in luce minore legere poſſunt quam presbytæ.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim quodlibet objecti punctum radiet in oculum per radios divergentes (§.49); idem objectum per plures radios videbitur; ſi fuerit vicinius, quam ubi ab oculo magis removetur (§.87). Quare cum myopes, ut legant, ſcripturam oculis propius admoveant (§.385); litteras per plures radios vident, quam presbytæ, adeoque etiam clarius (§. 390). Quæ igitur presbytis non ſufficit ad legendum lux, myopibus tamen ſufficere poteſt. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

409. *Eadem eſt ratio, quod in luce minore ſcripturam oculo propius admoveant, etiam qui oculis valent, & hinc ſi quis quotidie ad lucem creperam aut candelam non probe emunctam ſcripturam minutam legit, facile fit myops.*

SCHOLION 2.

410. *Tam myopes, quam presbytæ per exiguum foramen acicula in charta efformatum diſtincte videre ſolent, quæ charta remota confuſe repræſentantur. Ejus rei ratio non eſt obſcura, ſi quis ea meditetur, quæ de cauſis confuſæ viſionis paulo ante & de ſpeciebus per exiguum foramen in cameram obſcuram transmiſſis ſuperius (§.119) dicta ſunt.*

THEOREMA 110.

411. *Si corpus opacum* HI *intra* Tab.
axes opticos AC *&* BC *comprehen-* VI.
datur; nullam objecti KL *partem* Fig.
teget utrique oculo ſimul, partem 69.
tamen aliquam DC *teget dextro* B,
aliam CE *ſiniſtro* A.

DEMONSTRATIO.

Cum enim HI non obſtet, quo minus ex ſingulis punctis KC ad oculum A rectæ duci poſſint; KC ab oculo A videri poteſt (§.60). Ex eadem ratione liquet, partem

CL videri ab oculo B. Utrique igitur oculo simul nihil objecti KL tegitur. *Quod erat unum.*

Enimvero quia HI est corpus opacum, *per hypoth.* radios a CE versus A propagandos intercipit (§. 12). Ab oculo igitur A non videtur CE. Eodem modo patet, non videri CD ab oculo B. Pars igitur CE tegitur oculo A: pars vero DC alteri B. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 111.

Tab. VI. Fig. 74. 412. *Si corpus opacum* KL *distantia axium opticorum* AC *&* BC *fuerit minor: pars media* HI *ab utroque oculo* A *&* B *videtur una cum extremis* DF *&* GE, *interjacentes autem* FH *&* IG *videntur ab alterutro.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim opacum KL impediat, quo minus ab FH ad B & ab IG ad A rectæ duci possint: FH ab oculo B non videbitur, neque IG ab oculo A (§. 60). Sed cum non obstet, quo minus a FH in oculum A & ab IG in oculum B radii emanent (§. *cit.*); FH in A & IG in B videbitur. Eodem modo constat, partem mediam HI cum extremis DF & GE videri in A & B simul. *Q. e. d.*

THEOREMA 112.

413. *Si corpus opacum* HI *axes opticos* AC *&* BC *excedat, pars media* FG *utrique oculo* A *&* B *tegetur, proxime adjacentes* GL *&* KF *tegentur tantum alterutri*, DK *&* LE *nulli.* Tab. VI. Fig. 75.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI intercipit radios ab FL versus A & a KG versus B propagandos (§. 12. 46); FG ab oculo nullo, KF tantum ab unico B, GL ab altero A videri potest (§. 42); reliquæ vero partes DK & LE videntur ab utroque. *Q. e. d.*

THEOREMA 113.

414. *Si corpus opacum* HI *intra axes opticos* AC *&* BC *comprehenditur; erit pars ab uno tantum oculo* B *visa* DC *ad oculorum distantiam* AB *ut distantia alterius extremi opaci* H *ab horoptere* HC *ad distantiam ejusdem ab oculo vicino* A. Tab. VI. Fig. 69. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB ipsi DC parallela (§. 341), erit $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Quare cum etiam verticales ad H æquales (§. 156. *Geom.*); erit DC : HC = AB : AH (§. 267. *Geom.*) consequenter DC : AB = HC : AH (§. 173. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse CE : AB = CI : IB. *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM.

415. Quodsi CI > HC (id quod contingit, si HI ad distantiam oculorum versus dexteram convergit); CI ad rectam ipsa IB minorem majorem rationem habet, quam CI ad IB (§. 205. *Arithm.*), consequenter ipsa CI major ad eandem minorem ipsa IB majorem rationem habet quam CI ad IB (§. 207. *Arithm.*). Quamobrem CE ad AB jam rationem majorem habet, quam ubi CI = CH (§. 414), consequenter pars CE ab oculo A visa major, quam ante (§. 204. *Arithm.*). Enimvero ubi CI = CH, etiam CE = DC. Quare ubi CI > IB, etiam CE > DC (§. 89. *Arithm.*).

THEOREMA 114.

Tab. VI. Fig. 74. 416. *Si corpus opacum* KL *fuerit minus intervallo axium opticorum* AC & BC; *erit pars media HI, quæ ab utroque oculo* A & B *videtur, ad distantiam oculorum* AB *ut segmenta radii ex oculo* A *per extremitatem ipsi vicinam* K *in horopterem ducti* MI & AM.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI ipsi AB parallela (§. 341), erit HIM = MAB (§. 233. *Geom.*). Quare cum etiam verticales ad M æquales sint (§. 156. *Geom.*); erit HI : IM = AB : AM (§. 267. *Geom.*), consequenter HI : AB = IM : AM (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

417. Quodsi KL oculis fuerit propius, segmentum MI fiet majus, AM vero minus: descendente enim corpore KL, ita ut secum rapiat rectam BH, punctum quoque M descendere evidens est. Quoniam itaque MI ad rectam ipsa AM minorem, majorem habet rationem quam MI ad AM (§. 205 *Arithm.*); recta quoque ipsa MI major ad eandem rectam ipsa AM minorem, multo magis majorem rationem habebit quam MI ad AM (§. 203. *Arithm.*), consequenter si KL oculo vicinius, HI ad AB majorem rationem habet, quam si remotius (§. 416), adeoque pars media HI ab utroque oculo visa major est (§. 204. *Arithm.*)

THEOREMA 115.

418. *Si corpus opacum* KL *fuerit distantiæ oculorum* AB *parallelum & intervallo axium opticorum minus; erit excessus partis oculo alterutri* B *tectæ* FH *supra latitudinem opaci* KL *ad eandem latitudinem* KL *ut distantia vicinioris extremi ab horoptere* HL *ad distantiam ejus ab oculo* BL. Tab. VI. Fig. 74.

DEMONSTRATIO.

Quia KL ipsi AB parallela *per hypoth.* AB vero ipsi FH (§. 341); erit quoque KL parallela ipsi FH (§. 232. *Geom.*); & hinc BH : BL = FH : KL (§. 268. *Geom.*), consequenter HL : BL = FH − KL : KL (§. 193. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

419. Quodsi KL oculo fuerit vicinius,

nius, BL fit minor, consequenter cum ratio ipsius BL ad BH decrescat (§. 203. *Arithm.*), decrescet etiam ratio ipsius KL ad FH (§.418). Quare cum KL sit constans, pars quoque tecta FH major fit necesse est (§.206. *Arithm.*)

THEOREMA 116.

Tab. VI. Fig. 75. 420. *Si latitudo corporis opaci* HI *fuerit distantiæ oculorum* AB *æqualis; pars utrique oculo tecta* FG *eidem æqualis erit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI = AB *per hypoth.* ac præterea supponitur eidem AB parallela (etsi enim corpus ipsum inclinetur ad distantiam oculorum AB, concipere tamen licet in omni casu rectam HI, quæ ex uno ejus extremo H ducta terminatur in radio BC per alterum extremum transeunte); erit quoque AH ipsi BI seu AF ipsi BG parallela (§. 257. *Geom.*). Quare cum FG sit parallela ipsi AB (§. 341); erit FG = AB (§. 257. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 117.

Tab. VI. Fig. 76. 421. *Si latitudo corporis opaci* GH *distantia oculorum* AB *fuerit minor, sed intervallo axium opticorum* AC & BC *major; minorem partem objecti* IK *teget, ubi oculis propius fuerit, majorem vero, si magis removetur: pars tamen tecta* IK *minor est latitudine opaci* GH, *quamdiu distantia ejus ab horoptere perceptibilis.*

DEMONSTRATIO.

Producatur GH in M, donec GM = AB. Quoniam GH supponitur ipsi AB parallela; erit quoque BM parallela ipsi GA (§. 257. *Geom.*). Est adeo summa angulorum *o* & *y* duobus rectis æqualis (§. 233. *Geom.*) Quare cum $x > y$ (§. 188. *Geom.*); erit summa duorum *o* & *x* major duobus rectis (§. 90. *Arithm.*), consequenter AG & BH versus oculos divergunt (§. 261. *Geom.*), adeoque convergunt versus F (§. 263. *Geom.*). Quoniam itaque IK ipsi AB parallela (§. 341); erit IK:GH = FI : FG (§. 268. *Geom.*) consequenter ob FI < GF etiam IK < GH. *Quod erat unum.*

Quodsi concipiamus opacum GH removeri ab oculis versus horopterem DE; lineæ AF & BF majori intervallo a se invicem recedent, consequenter major evadet punctorum I & K distantia (§. 192. *Geom.*), hoc est, pars tecta IK augetur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 118.

422. *Si latitudo opaci* FG *fuerit distantia oculorum* AB *major; eo majorem partem* IK *teget, quo oculis* A & B *propius fuerit: pars vero tecta* IK *semper major latitudine opaci* FG. Tab. VI. Fig. 77.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB eademque major, *per hypoth.* si fiat GH = AB, erit AH ipsi GB parallela (§. 257. *Geom.*) adeoque summa angulorum *o* & *x* duobus rectis æqualis (§. 233. *Geom.*). Quare cum *o* > *y* (§. 188. *Geom.*); erit summa angulorum *x* & *y* duobus rectis minor (§. 90. *Arithm.*), consequenter rectæ FA & GB versus L convergunt (§. 262. *Geom.*). Est itaque LF : LI = FG : IK (§. 268. *Geom.*) & hinc ob LI > LF etiam IK > FG. *Quod erat unum.*

Quodsi concipiamus opacum FG ad oculos A & B propius accedere; lineæ IL & LK magis a se invicem discedunt, consequenter pars tecta IK major evadit. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 119.

Tab. VI. Fig. 77. 423. *Si latitudo opaci* FG *fuerit distantia oculorum* AB *major: erit excessus partis tectæ* IK *supra latitudinem opaci* FG *ad excessum hujus supra distantiam oculorum* AB *ut distantia alterutrius extremi ab horoptere* FI *ad distantiam ejusdem ab oculo viciniore* FA.

DEMONSTRATIO.

Quoniam MK & FG parallelæ ipsi AB (*per hypoth.* & §. 341); ducta AM ipsi KB parallela, erit AB = HG = MK (§. 257. *Geom.*). Est igitur FH excessus ipsius FG supra AB & IM excessus ipsius IK supra eandem AB, adeoque IM − FH excessus ipsius IK supra FG. Quare cum sit AI : AF = IM : FH (§. 268. *Geom*); erit etiam FA : FI = FH : IM − FH (§. 193. *Arithm.*), adeoque etiam IM − FH : HI = FI : FA (§. 169. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 120.

424. *Si latitudo opaci* GH *fuerit minor distantia oculorum* AB; *sed major intervallo axium opticorum, erit excessus latitudinis opaci* GH *supra partem tectam* IK *ad excessum distantiæ oculorum* AB *supra latitudinem opaci* GH *ut distantia extremi alterutrius opaci ab horoptere* HK *ad distantiam ejusdem ab oculo vicino* BH. Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Quoniam IO (§. 341) & GH *per hypoth.* ipsi AB parallela; ductis BL & ON ipsi AI parallelis, erit OL = HM = NB & IO = GH = AN (§. 257. *Geom.*), adeoque HM excessus distantiæ oculorum AB supra latitu-

 dinem

dinem opaci GH & KO excessus hujus supra partem tectam IK. Quare cum sit BH:BK=HM:KL (§. 268. *Geom.*); erit etiam BH:KH=HM:KO (§. 193. *Arithm.*), adeoque etiam KO:HM=KH:BH (§. 169. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 121.

425. *Si humor crystallinus est minoris sphæræ segmentum, objectum valde minutum distinctius videtur, quam si majoris fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Qui enim habent humorem crystallinum valde convexum, sunt myopes (§. 402) adeoque objecta propius admovent oculo (§. 384). Sed cum propiora majora appareant remotioribus (§. 211); fieri potest, ut, quod presbyta ob parvitatem non bene distinguit, idem tamen distincte cernatur a myope, hoc est, ab eo, qui humorem crystallinum habet valde convexum (§. 42). *Q. e. d.*

SCHOLION.

426. *Hinc myopes legunt scripturam minutam; & oculis animantium, quæ minore cibo utuntur & ab objectis minutis facile læduntur, inest humor crystallinus valde convexus.*

THEOREMA 122.

427. *Si diameter sphæræ* CD *distantiæ oculorum* AB *æqualis fuerit, & recta ex centro sphæræ in medium distantiæ ducta* EF *sit perpendicularis ad* AB; *oculi* A *&* B *circa axem* EF *acti totum hemisphærium lustrabunt.* Tab. VI. Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex C & D super diametro CD perpendiculares CA & DB, itemque alia ex centro EF: quæ omnes cum inter se parallelæ existant (§. 256. *Geom.*), si ex B demittatur perpendicularis BA ad CA, erit eadem ad FE perpendicularis (§. 230. *Geom.*) & tam AB=CD, quam FB=ED (§. 226. *Geom.*). Quantocunque igitur intervallo a sphæra statuantur oculi A & B; semper in parallelis CA & DB centra eorum hærebunt, *vi hypoth.* Enimvero quoniam inter rectam BD & circulum non alia recta duci potest (§. 304. *Geom.*), punctum remotius quam D oculus B videre nequit (§. 47). Eodem modo ostenditur, oculum A non videre punctum remotius quam C. Est vero DEG rectus, *per superiora*, adeoque GD, itemque CG quadrans (§. 143. *Geom.*). Quodsi ergo

go rectangulum DBFE, itemque alterum EFAC circa axem EF rotari concipiamus, uterque quadrans hemisphærium describet (§. 470. *Geom.*). Quamobrem oculi circa axem sphæræ continuatum moti totum hemisphærium lustrabunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 123.

Tab. VI. Fig. 79. 428. *Si distantia oculorum* AB *fuerit major diametro sphæræ & recta ex centro sphæræ ad medium distantiæ ducta* EF *ad* AB *perpendicularis; oculi* A & B *circa axem* FE *ducti partem hemisphærio majorem successive spectabunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam FB > ED *per hypoth.* & DB circulum in D tangens ad ED perpendicularis (§. 308. *Geom.*); ED ad EF normalis esse nequit: foret enim alias DB parallela ipsi GF (§. 256. *Geom.*) & hinc porro DE = FB (§. 226. *Geom.*) *contra hypothesin.* Ducatur ergo DG ad FH perpendicularis (§. 216. *Geom.*); erit DG < DE (§. 220. *Geom.*), adeoque FB > DG. Distantiæ adeo rectæ BD a recta FG continuo decrescunt (§. 225. *Geom.*) & hinc BD cum FG versus H convergit (§. 83. *Geom.*). Quamobrem cum HDE sit rectus *per demonstrata*, & *x* minor recto (§. 219. *Geom.*); erit *o* major recto (§. 147. *Geom.*), atque DI quadrante major (§. 143. *Geom.*). Eodem modo ostenditur, esse CI quadrante majorem. Quodsi jam concipiamus trapezium CABD circa axem GF rotari; arcus DI partem hemisphærio majorem emetietur (§. 470. *Geom.*). Oculi igitur B & A circa eundem axem circumducti partem hemisphærio majorem spectabunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 124.

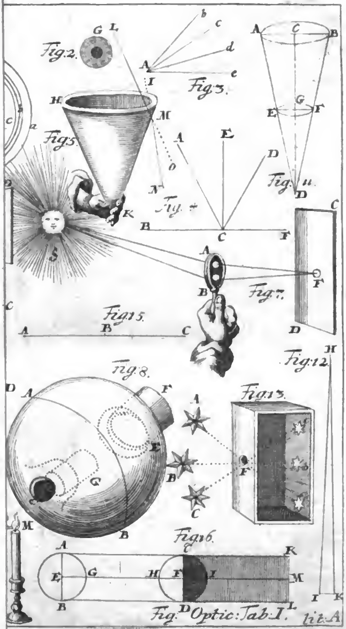
429. *Si distantia oculorum* AB *fuerit minor diametro sphæræ & recta* EF *ex centro sphæræ* E *ad medium distantiæ* F *ducta sit ad* AB *perpendicularis; oculi* A & B *circa axem* EF *circumducti minorem hemisphærio partem spectabunt.* Tab. VI. Fig. 80.

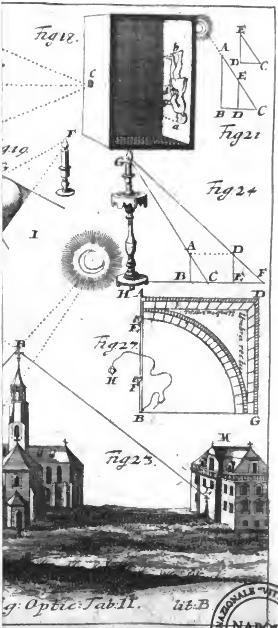
DEMONSTRATIO.

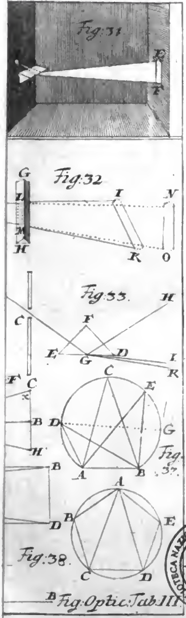
Quoniam radius extremus BD sphæram tangens in B ad DE perpendicularis (§. 308. *Geom.*) & FB < ED atque ad EF normalis *per hypoth.* ED ad EF normalis esse nequit: foret enim alias DB paral-

parallela ipsi EF (§. 256. *Geom.*) & hinc porro ED = FB (§. 226 *Geom.*) *contra hypothesin.* Ducatur ergo DL perpendicularis ad EF (§. 216. *Geom.*); erit DL ipsi FB parallela (§. 256. *Geom.*), adeoque LDB = FBH (§. 233. *Geom.*). Quare cum LDB sit recto minor, utpote pars recti EDB *per demonstrata*; erit quoque FBH recto minor, & quia F est rectus *per hypoth.* HFB & HBF junctim sumti duobus rectis minores. Lineæ igitur DB & EF versus H convergunt (§. 262. *Geom.*) & ob DLE rectum *per demonstrata* HED recto minor (§. 219. *Geom.*), consequenter arcus GD quadrante minor (§. 143. *Geom.*). Eodem modo ostenditur, arcum CG esse quadrante minorem. Quodsi ergo concipiamus, trapezium CDBA circa axem EF rotari; oculi A & B minorem hemisphærio partem spectabunt (§. 470. *Geom.*). *Q. e. d.*

FINIS OPTICÆ.


Fig:2.
Fig:3.
Fig:5.
Fig:11.
Fig:7.
Fig:15.
Fig:12.
Fig:8.
Fig:13.
Fig:16.
Optic: Tab: I.
lit: A


Fig.18.
Fig.21
Fig.24
Fig.27.
Fig.23.
g: Optic: Tab.II.
lit:B.


Fig:31
Fig:32
Fig:33.
Fig:38.
Fig:Optic:Tab:III

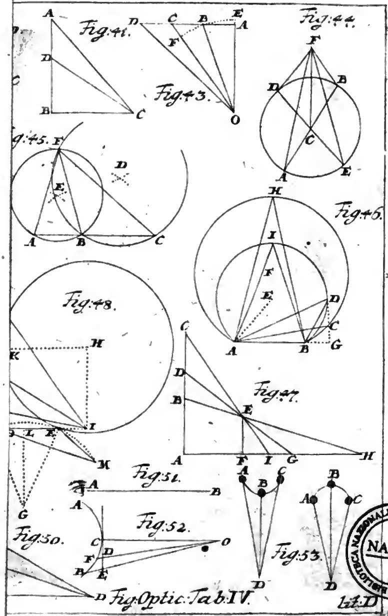


Fig. Optic. Tab. IV.

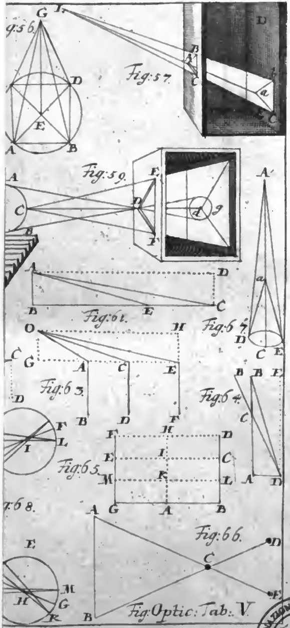


Fig: Optic: Tab: V.

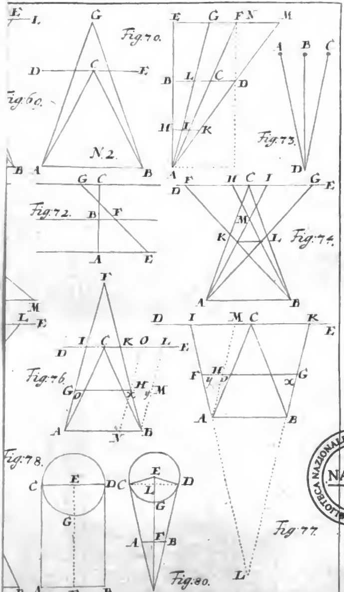


Fig: Optic: Tab: VI.

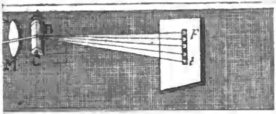


Fig. 82.

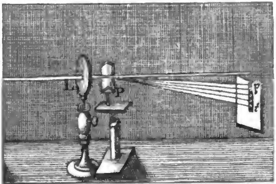


Fig. 83.

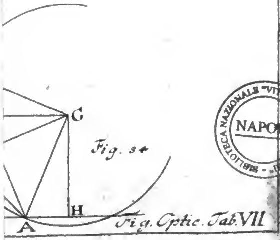


Fig. 84

Fig. Optic. Tab. VII

ELEMENTA PERSPECTIVÆ.

PRÆFATIO.

Quoniam inter artes ab humano ingenio inventas eminet pictoria; operam profecto non perdunt, qui in ea excolenda deſudant. Non igitur miramur, viros præclaris ingenii dotibus inſtructos in hac arte perficienda multum induſtriæ poſuiſſe, præſertim cum hoc labore fungi non poſſet, niſi in Geometria & Optica verſatus. Nata hinc eſt Perſpectiva, artis pictoriæ complementum, cujus ignarus ut omnes in picturis errores evitet fieri nequit. Cum adeo ſine ea nullum pictoris opus ſit conſummatum; optandum foret, ut nemo arti pictoriæ ſe traderet, niſi idem Perſpectivæ leges cognitas atque perſpectas ſibi reddere decreverit. Enimvero non modo pictoribus utilis eſt Perſpectiva; verum etiam Architectis & iis, qui practicas Matheſeos partes ad uſum indigentiæ humanæ transferunt. In machinarum præſertim ideis pulchre delineandis omne

fert

ELEMENTA PERSPECTIVÆ.

CAPUT I.

DE

FUNDAMENTIS PERSPECTIVÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Perspectiva* est scientia delineandi in tabula quodlibet objectum, quale ad datam distantiam & in data altitudine oculo apparet super tabula transparente inter ipsum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta.

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 1. 2. *Ponamus tabulam vitream* HI *super plano horizontali perpendiculariter erectam & spectatorem* S *oculum* O *dirigere in triangulum* ABC. *Quodsi concipiamus radios* AO, OB, OC *&c. in transitu per tabulam vestigia sui in* a, b, c *relinquere ; super ea comparebit triangulum* a b c , *quod cum per eosdem radios* aO, bO, cO *in oculum radiet, per quos species trianguli* ABC *ad eundem defertur, veram trianguli* ABC *apparentiam exhibere debet, etiam objecto* ACB *remoto, distantia tamen & altitudine oculi servata* (§. 43. *Optic.*). *In perspectiva igitur docetur, quomodo per certas regulas puncta* a, b, c *&c. geometrice investigentur. Hinc vero intelligitur praxis mechanica objectum datum accuratius delineandi, quam ob utilitatem ejus hic exponi fas est.*

PROBLEMA 1.

3. *Objectum quodcunque datum accurate delineare.* Tab. I. Fig. 1.

RESOLUTIO.

1. Ex quatuor subscudibus paretur quadratum DE per fila iisdem parallela in areolas quadratas inter se æquales divisum.
2. Super tabula FG eidem firmiter annexa erigatur perpendiculariter dioptra H, ut sit quadrato parallela.
3. Charta, in qua objectum delineandum, dividatur in totidem areolas quadratas, in quot quadratum DE divisum.
4. Per dioptram H oculo in objectum directo, quod ultra tabulam DE debito intervallo remotum,

tum, obſervetur, in quibus areolis tabulæ DE ſingulæ partes appareant & eædem delineentur in quadratulis, quæ ſuper charta iisdem reſpondent.

Ita artis delineandi peritus ſatis accurate apparentiam objecti exhibebit.

DEFINITIO 2.

Tab. I. Fig. 1. Fig. 6. 4. *Pyramis optica* ABCO eſt pyramis, cujus baſis eſt objectum viſibile ABC, vertex vero in oculo O, formata per radios a ſingulis perimetri punctis in oculum O ductos. Hinc ſimul patet, quid ſit *Triangulum opticum* AOB.

DEFINITIO 3.

Tab. I. Fig. 1. 5. *Radii Optici* vocantur, quibus terminatur pyramis optica vel triangulum opticum veluti OA, OC, OB.

DEFINITIO 4.

6. *Tabula* eſt ſuperficies plana & pellucida HI inter oculum O & objectum ABC ad horizontem perpendiculariter erecta, niſi expreſſe contrarium moneatur, radios opticos in *a*, *b*, *c* ſecans.

SCHOLION.

7. *Hinc nonnulli* Sectionem *appellant. Vocatur etiam* Planum perſpectivum, *quia in eo exhibetur apparentia objecti: item* Vitrum, *quia iſtius m... tabulæ pellucidæ ſunt vitreæ.*

DEFINITIO 5.

8. *Planum Geometricum* eſt planum LM horizonti parallelum, in quo concipimus ſitum objectum perſpective delineandum & cui planum perſpectivum, niſi contrarium moneatur, ad angulos rectos inſiſtit.

DEFINITIO 6.

9. *Planum horizontale* eſt planum horizonti parallelum & per oculos tranſiens, quod planum perſpectivum HI ſuper geometrico LM normaliter erectum ad angulos rectos ſecat.

DEFINITIO 7.

10. *Planum verticale* eſt, quod ad Geometricum LM perpendiculare per oculum O tranſit & perſpectiva HI ad angulos rectos ſecat.

DEFINITIO 8.

11. *Linea terræ* vel *fundamentalis* NI eſt interſectio plani Geometrici LM & perſpectivi HI. Tab. I. Fig. 3.

SCHOLION.

12. *Sunt etiam, qui* baſin tabulæ *appellant, quoniam linea terræ inſiſtit.*

DEFINITIO 9.

13. *Punctum viſus* ſeu *oculi* eſt punctum F in tabula HI, in quod cadit recta BF ex oculo O ad tabulam HI perpendicularis. Vocatur etiam *Punctum principale.*

CO-

COROLLARIUM.

14. Est adeo in intersectione plani horizontalis & verticalis (§. 9. 10).

DEFINITIO 10.

15. ***Linea distantiæ*** est recta OF, ab oculo O ad punctum principale F ducta.

COROLLARIUM.

16. Quoniam ad tabulam perpendicularis (§. 13), non est nisi distantia oculi a tabula (§. 225. *Geom.*).

DEFINITIO 11.

Tab. I. Fig. 3. 17. ***Linea horizontalis*** est recta PQ per punctum principale F ducta & horizonti parallela, seu intersectio plani horizontalis & perspectivi (§. 9).

COROLLARIUM.

18. Est itaque lineæ terræ parallela (§. 8. 11).

DEFINITIO 12.

19. ***Punctum distantiæ*** est punctum P vel Q in linea horizontali PQ, quod tanto intervallo distat a puncto principali F, quanto oculus O ab eodem removetur.

SCHOLION.

20. *Nempe si in linea horizontali* PQ *assumatur* FP = FO; *erit* P *punctum distantiæ.*

DEFINITIO 13.

21. ***Altitudo oculi*** OS est recta ex oculo ad planum Geometricum perpendicularis.

DEFINITIO 14.

22. ***Apparentia, repræsentatio, projectio*** puncti est punctum *a*, per quod transit radius opticus OA a puncto objecti A per tabulam HI ad oculum O ductus, seu punctum *a* in quo tabula HI radium opticum OA secat. Unde etiam patet, quid sit *projectio* vel *apparentia lineæ, plani atque solidi.* Tab. I. Fig. 1.

DEFINITIO 15.

23. ***Ichnographia geometrica*** est descriptio figuræ planæ in plano geometrico, cui tanquam basi corpus innititur, aut inniti fingitur.

SCHOLION.

24. *Insistat plano Geometrico prisma* ABCD: *hujus ergo basis, nempe triangulum* ABC, *si in plano Geometrico describitur*, ichnographia Geometrica *fieri dicitur. Ponamus idem prisma* AE *in libero aere suspendi, ita ut planum* CBEF *sit plano Geometrico parallelum. Quodsi ex singulis angulis* A, C, B, D, E, F *demittantur perpendiculares ad planum Geometricum; figura* HGIK *fingitur esse basis prismatis in hoc situ ejusque in plano Geometrico descriptio vocatur* Ichnographia Geometrica *prismatis.* Tab. I. Fig. 4. 5.

DEFINITIO 16.

25. ***Ichnographia projecta*** seu ***perspectiva*** est apparentia ichnographiæ geometricæ in tabula seu plano perspectivo.

DEFINITIO 17.

26. *Scenographia* est repræsentatio corporis in plano perspectivo.

DEFINITIO 18.

27. *Linea objectiva* est linea quæcunque in plano geometrico ducta, cujus repræsentatio in tabula desideratur. Unde etiam intelligitur, quid sit *planum objectivum*, item *punctum objectivum*.

THEOREMA 1.

28. *Apparentia lineæ rectæ objectivæ est linea recta.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 6. Cum a singulis punctis lineæ objectivæ AB in oculum O radii illabantur; linea recta in oculum radiat per triangulum AOB (§. 87. *Geom.*). Sed apparentia rectæ AB est intersectio communis tabulæ & trianguli optici AOB (§. 22). Ergo CD est linea recta (§. 482. *Geom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 1. 29. *Idem eodem modo patet, si linea* AC, *cujus apparentia* ac *sit in plano geometrico, videturque per triangulum opticum* AOC.

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 6. 30. Data igitur apparentia *a* & *b* duorum punctorum extremorum A & B, datur apparentia totius lineæ *ab*.

COROLLARIUM 2.

31. Similiter datis apparentiis *a*, *b* & *c* verticum angulorum A, B, C figuræ objectivæ ABC; datur apparentia *abc* figuræ ipsius objectivæ.

THEOREMA 2.

32. *Altitudo puncti apparentis in tabula est ad altitudinem oculi ut distantia objectivi a tabula ad aggregatum ex eadem distantia & distantia oculi.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam altitudo puncti apparentis G vel I est ad lineam terræ ED, altitudo oculi O & planum Geometricum perpendicularis (§. 227. *Geom.*); erit OM tam ad AM, quam ad BM perpendicularis (§. 454. *Geom.*) & cum GH, tum IK ipsi OM parallela (§. 256. *Geom.*). Quare AH : AM = HG : MO & BK : BM = KI : MO (§. 268. *Geom.*). Quodsi itaque AM sit ad lineam terræ perpendicularis; erit AH distantia puncti objectivi A a tabula CEDF & MH distantia oculi (§. 225. *Geom.*), adeoque propositum constat. Tab. I. Fig. 7.

Si BM non fuerit perpendicularis ad lineam terræ DE; erunt tamen verticales ad K æquales (§. 156. *Geom.*) &, demissis BL & MH perpendicularibus ad lineam terræ, BL : MH = BK : MK (§. 267. *Geom.*), adeoque BL : BL + MH = BK : BM (§. 190. *Arithm.*), consequenter KI : MO = BL : BL + MH (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT II.
DE
ICHNOGRAPHIA PERSPECTIVA.

PROBLEMA 2.

Tab. I. Fig. 8. 33. *Puncti objectivi* H *apparentiam* h *exhibere.*

RESOLUTIO.

1. A puncto dato H ducatur perpendicularis HI ad lineam terræ DE.
2. Ex linea terræ DE resecetur IK = IH.
3. Per punctum principale F, ex data altitudine oculi OS inveniendum (§. 13) ducatur linea horizontalis FP & fiat FP distantiæ oculi SL æqualis.
4. Ex puncto I ducatur ad punctum principale F recta FI & ex K ad punctum distantiæ P recta PK.

Dico, intersectionem *h* esse apparentiam puncti objectivi H.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FP ipsi DE parallela (§. 17); erit $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Quare cum etiam verticales ad *h* æquales (§. 156. *Geom.*); triangula F*h*P & K*h*I similia sunt (§. 267. *Geom.*), consequenter ducta NM ad utramque parallelarum FP & KE perpendiculari, cum *h*N & *h*M sint altitudines triangulorum (§. 227. *Geom.*), $FP : KI = Nh : hM$ (§. 396. *Geom.*) & hinc $FP + KI : KI = NM : hM$ (§. 190. *Arithm.*). Est vero $KI = HI$ & $FP = SL$, itemque $NM = OS$ *per constructionem*: ergo $SL + IH : IH = OS : Mh$, hoc est, ut aggregatum ex distantia oculi a tabula & distantia puncti objectivi ab eadem ad hanc puncti objectivi distantiam ita altitudo oculi ad altitudinem puncti *h* in tabula. Quare *h* est repræsentatio puncti objectivi H (§. 32). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

34. Cum datis apparentiis verticum angulorum figuræ rectilineæ detur apparentia integræ figuræ rectilineæ (§. 31), omnis figuræ rectilineæ projectio ichnographica hoc modo haberi potest.

COROLLARIUM 2.

35. Et quia quotlibet puncta lineæ

curvæ eodem modo in planum perspectivum projiciuntur; curvarum quoque projecto eadem methodo absolvitur.

COROLLARIUM 3.

36. Ergo hæc methodus quoque sufficit planis mixtilineis in tabulam projiciendis, consequenter universalis est.

SCHOLION.

37. *Dantur equidem aliæ quoque methodi passim ab Autoribus traditæ; sed cum nostrum non sit præter necessitatem multa congerere, sufficit eam exhibuisse & demonstrasse, quæ omnium usitatissima, etsi communiter absque demonstrationibus proposita. Ut autem ejus vim percipiant tyrones, aliquot exemplis eandem illustrare libet.*

PROBLEMA 3.

Tab. II. Fig. 9. 38. *Invenire apparentiam trianguli* ABC, *cujus basis* AB *lineæ terræ* DE *parallela.*

RESOLUTIO.

1. Cum linea terræ DE ducatur horizontalis HR parallela intervallo altitudini oculi æquali (§. 13. 17).
2. Assumatur punctum principale V oculo vel directe, vel oblique oppositum, prout casus datus requisiverit.
3. Ex V in K transferatur distantia oculi.
4. A trianguli ACB singulis angulis demittantur perpendiculares A1, C2, B3.
5. Hæ perpendiculares transferantur in lineam terræ DE ex opposito puncti distantiæ K.
6. Ex 1, 2, 3 ducantur rectæ ad punctum principale V1, V2, & V3.
7. Ex punctis A, B & C lineæ fundamentalis DE ducantur ad punctum distantiæ K rectæ aliæ AK, BK, CK.

Quoniam *a*, *b* & *c* sunt apparentiæ punctorum A, B & C (§. 33); ductis rectis *ca*, *ab* & *bc*, erit *acb* apparentia trianguli ACB (§. 34).

SCHOLION.

39. *Eodem modo in planum projicitur triangulum, si vertex* C *oculo objiciatur: neque enim alia re opus est, quam ut situs in plano Geometrico immutetur & vertex* C *lineæ fundamentali* DE *obvertatur, & perinde est, sive basis trianguli fuerit ad lineam terræ* DE *parallela, sive obliqua.*

PROBLEMA 4.

40. *Exhibere apparentiam quadrati oblique visi* ABDC, *cujus unum latus* AB *est in linea terræ.* Tab. II. Fig. 10.

RESOLUTIO.

1. Quoniam quadratum oblique videtur, punctum principale V ita assumatur in linea horizontali HR, ut perpendicularis ad line-

lineam terræ cadat extra latus quadrati AB, saltem id bifariam non secet, sitque VK distantia oculi.

2. Perpendiculares AC & BD transferantur in lineam terræ DE ex A in C sive B & B in D.

3. Ducantur rectæ KB, KD, itemque AV, VC.

Erunt A & B apparentiæ sui ipsius, *c* vero & *d* apparentiæ punctorum C & D (§. 33), consequenter A*cd*B apparentia quadrati ABDC (§. 34).

SCHOLION.

41. *Quodsi quadratum* ACBD *a linea terræ* DE *distaret, quod tamen raro in praxi supponitur, in lineam terræ transferendæ essent etiam distantiæ angulorum* A & B: *quod ex problemate præcedente abunde patet. Cum etiam oblique spectatorum rarior sit usus; in sequentibus, nisi contrarium moneatur, semper supponemus, figuram in plano projiciendam directe oculo objici.*

PROBLEMA 5.

Tab. II. Fig. 11. 42. *Quadratum* ABCD *repræsentare in tabula, cujus diagonalis* AC *ad lineam terræ perpendicularis.*

RESOLUTIO.

1. Continuentur latera DC & CB, donec lineæ terræ in 1 & 2 occurrant.

2. Ex puncto principali V transferatur in K & L distantia oculi.

3. Ex K ducantur ad A & 1 rectæ KA & K1; ex L vero ad A & 2 rectæ LA & L2.

Dico, intersectiones istarum rectarum exhibere apparentiam quadrati ABCD ex angulo visi.

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli ADC & ABC recti sunt, & AD = DC atque AB = BC (§. 98. *Geom.*) erunt DAC & CAB semirecti (§. 241. *Geom.*) & quia diagonalis AC lineæ terræ DE ad angulos rectos insistit, *per hypoth.* *o* & *x* sunt itidem semirecti, consequenter ob 1DA & 2BA rectos (§. 65. *Geom.*) etiam *y* & *u* semirecti (§. 240. *Geom.*) adeoque D1 = DA & B2 = BA (§. 253. *Geom.*) & hinc A1 = AC = A2 (§. 179. *Geom.*). Continuatis itaque lateribus DC & CB, donec lineæ terræ DE occurrant, perinde est, ac si perpendiculum AC in 1 & 2 ex A transferretur. Porro si ex D & B perpendicula DM & BN in lineam terræ DE demittantur; erunt *m* & *n* semirecti (§. 240. *Geom.*) & ideo DM = M1 & BN = N2 (§. 253. *Geom.*): ut adeo perpendiculares MD & NB in lineam terræ DE translatæ terminentur in 1 & 2. Concipiamus jam

jam ex puncto principali V ductas rectas VA, VM & VN & ex puncto distantiæ L rectas LA, L2: communis intersectio exhibebit apparentiam quadrati (§. 33). Concipiamus ex puncto distantiæ K ductas rectas K1 & KA, & ex puncto principali, ut ante, VM, VA, VN: communis intersectio denuo exhibebit apparentiam eandem ejusdem quadrati (§. *cit.*). Ergo AL, KA & L2, LA rectas VM, VA, VN in iisdem punctis intersecant, & ideo communes quoque intersectiones rectarum LA, L2 & KA, K1 apparentiam quadrati ABCD exhibere debent. *Q. e. d.*

SCHOLION.

43. *Ex demonstratione hujus problematis intelligitur, quomodo ope regulæ generalis in quibusdam casibus eruantur compendia particularia. Id enim habent omnes regulæ universales, quod in quibusdam casibus non evitent ambages. Qui secundum regulam universalem operatur, in compendia particularia sponte veluti sua incidit.*

PROBLEMA 6.

Tab. II. Fig. 21. 44. ***Apparentiam quadrati* ABDC *exhibere, cui aliud* IMGH *inscriptum est, latere majoris* AB *in linea terræ existente, diagonali vero posterioris ad lineam terræ perpendiculari.***

RESOLUTIO.

1. Ex puncto principali V transferantur utrinque in lineam horizontalem HR distantiæ VL & VK.
2. Ducantur VA & VB, itemque KA & LB; erit A*cd*B apparentia quadrati ACDB (§. 40).
3. Producatur latus quadrati inscripti IH, donec lineæ terræ in 1 occurrat, ducanturque rectæ K1 & KM; erit *ihg*M repræsentatio quadrati inscripti IHGM (§. 42).

SCHOLION.

45. *Ex resolutione hujus problematis intelligitur, quomodo fiat projectio earum figurarum, quibus alia inscripta sunt.*

PROBLEMA 7.

46. ***Pavimentum lapidibus quadratis directe positis stratum in tabulam projicere.*** Tab. II. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. Latus AB in lineam terræ DE translatum dividatur in tot partes æquales, quot sunt lapides quadrati in una serie.
2. Ex singulis divisionum punctis ducantur rectæ ad punctum principale V, & ex A ad punctum K distantiæ una AK, itemque ex B ad punctum distantiæ alterum L recta LB.
3. Per puncta intersectionum linea-

nearum respondentium agantur rectæ usque ad rectas AV & BV utrinque producendæ.

Erit AfgB apparentia pavimenti AFGB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=BG & BG ad AB perpendicularis (§. 98. 78. *Geom.*); si BG ex B in lineam fundamentalem DE transfertur, cadet G in A. Ductis adeo rectis VB & KA; erit g repræsentatio puncti G (§. 33). Eodem modo apparet, esse F apparentiam ipsius F, adeoque fg ipsius FG (§. 34). Quare cum de singulis non modo rectis integris, sed etiam earum partibus idem ostendatur; patet fgBA esse projectionem pavimenti AFGB. *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

Tab. II. Fig. 14. 47. *Circuli apparentiam exhibere.*

RESOLUTIO.

I. Si circulus fuerit minor

1. Circumscribatur eidem quadratum (§. 351 *Geom.*).
2. Ductis diagonalibus & diametris ha & de ad angulos rectos sese intersecantibus agantur rectæ fg & bc diametro de parallelæ.
3. Per b & f, itemque per c & g agantur rectæ lineæ terræ DE in punctis 3 & 4 occurrentes.
4. Ad punctum principale V ducantur rectæ V1, V3, V4, V2 & ad puncta distantiæ L & K rectæ L2 & K1.
5. Denique puncta intersectionum a, b, d, f, h, g, e, c connectantur arcubus ab, bd, df &c.

Erit $abdfhgeca$ apparentia circuli.

II. Si circulus fuerit major

1. Super medio lineæ terræ AB describatur semicirculus & ex quotlibet punctis peripheriæ C, F, G, H, I &c. demittantur ad lineam terræ perpendiculares C1, F2, G3, H4, I5 &c. Tab. III. Fig. 15.
2. Ex punctis A, 1, 2, 3, 4, 5 &c. B ducantur rectæ ad punctum principale V, item recta ex B ad punctum distantiæ L & alia ex A ad punctum distantiæ K.
3. Per communes intersectiones agantur rectæ ut in resolutione præcedente: ita nimirum habebuntur punctorum A, C, F, G, H, I, B repræsentationes in a, c, f, g, h, i, b (§. 46) adeoque

4. Tandem ut ante puncta ista arcubus connectantur, ut habeatur projectio circuli, *acf g h i b i h g f c a.*

SCHOLION.

48. *Hinc apparet non modo quomodo curvilinea figura quæcunque in tabulam projici possit; sed & qua ratione pavimentum lapidibus quibuscuncunque stratum perspective delineari debeat. Cæterum hinc quoque elucet, quanti sit usus quadratum in Perspectiva. Etenim in secundo quoque casu utimur revera quadrato in certas areolas diviso & circulo circumscripto, licet id (ne superfluum quidpiam fieret) in plano Geometrico non fuerit delineatum, quemadmodum etiam in eodem brevitatis gratia semicirculum loco circuli delineavimus in altero casu.*

PROBLEMA 9.

Tab. III. Fig. 16. 49. ***Pentagonum regulare in tabulam projicere, quod habet limbum latiorem lateribus parallelis terminatum.***

RESOLUTIO.

1. Ex singulis angulis Pentagoni exterioris A, B, C, D, E demittantur ad lineam terræ TS perpendiculares Ao, B1, C2, D3, E4, & ut in superioribus transferantur in lineam terræ, ex 1. 2. 3. 4 in B, C, D, E.
2. Puncta 1, 2, 3, 4 connectantur cum puncto principali V; puncta vero B, C, D, E cum puncto distantiæ K: ita communes intersectiones determinabunt apparentiam pentagoni exterioris (§. 33).
3. Quodsi jam ab angulis interioribus G, H, K, L, I similiter perpendiculares Go, H5, K6, I7, L8 demittantur & reliqua ut ante fiant; pentagonum quoque interius repræsentabitur (§. cit.).

Repræsentatur adeo pentagonum ABCDE cum suo limbo.

SCHOLION 1.

50. *Hoc problema ideo apposuimus, ne deesset exemplum, in quo figura projicienda limbo lato terminatur.*

SCHOLION 2.

51. *Cæterum in genere notandum, si objecti magnitudo quoad singulas partes una cum altitudine & distantia oculi in numeris detur; constructionem figuræ geometricæ juxta scalam geometricam fieri & ex eadem punctum principale una cum punctis distantiæ determinari.*

SCHOLION 3.

52. *Neque semper opus est, ut figura objectiva sub linea terræ delineetur. Sane ad quadratorum & pavimentorum projectionem eadem commode caremus. Si tamen necessaria fuerit, sed spatium desit, in quo delineari possit; seorsim delineatur cum linea terræ & divisiones inventæ in line-*

am terræ transferuntur, quæ in tabula ducta est.

SCHOLION 4.

53. *Si quis in puncto principali & puncto distantiæ fila alliget atque ad puncta divisionum lineæ terræ extendat; communis intersectio filorum citra confusionem, quæ ex multitudine linearum ducendarum sæpius metuenda, dabit projectionem puncti uniuscujusque. Sufficit quoque fila tantummodo applicari.*

CAPUT III.
DE
SCENOGRAPHIA.

Tab. III. Fig. 17.

THEOREMA 3.

54. *Altitudo objectiva* ML *est ad perspectivam* IK *ut aggregatum ex distantia illius & distantia oculi a tabula* MS *ad distantiam oculi* NS.

DEMONSTRATIO.

I. Si ML oculo directe objicitur, ita ut MS sit ad lineam terræ DE perpendicularis; erit MN distantia altitudinis objectivæ ML, & NS distantia oculi O a tabula (§. 225. *Geom.*). Jam cum KN & OS sint ad MS perpendiculares adeoque parallelæ inter se (§. 256. *Geom.*); erit MS:NS = MO:KO (§. 268. *Geom.*). Et quia LM etiam perpendicularis ad MS (§. 225. 484 *Geom.*), adeoque ipsi IK sive IN parallela (§. 256. *Geom.*); erit MO:KO = LM:KI (§. 268. *Geom*), consequenter MS:NS = LM:KI (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si altitudo PQ oculo oblique objicitur, ita ut QS tabulam secet ad angulos obliquos in H: eodem modo ostenditur, esse QS:HS = PQ:VR. Demittatur jam perpendicularis QT ad lineam terræ DE; erit ea distantia altitudinis a tabula (§. 225. *Geom.*) & ob angulos verticales ad H æquales (§. 156. *Geom.*) QT:QH = NS:HS (§. 267. *Geom.*). Cum adeo sit QT:NS = QH:HS (§. 173. *Arithm.*) & componendo QT + NS:NS = QS:HS (§. 190. *Arithm.*); erit etiam: QT + NS:NS = PQ:QR (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 10.

55. *Super puncto* C *in tabula dato erigere altitudinem perspectivam datæ* Tab. III. Fig. 18.

datæ altitudini objectivæ PQ *convenientem.*

RESOLUTIO.

1. In linea terræ erigatur perpendicularis PQ, quæ ſit altitudini objectivæ datæ æqualis.
2. Ex P & Q ducantur ad punctum quodvis, veluti T, rectæ PT & QT.
3. Ex puncto in tabula dato C agatur recta CK lineæ terræ DE parallela, occurrens rectæ QT in K.
4. Erigatur in K ſuper KC perpendicularis IK.

Dico IK eſſe altitudinem ſcenographicam quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Fiat SM æqualis compoſitæ ex diſtantia oculi SN & diſtantia altitudinis objectivæ a tabula NM ducaturque recta QS, & præterea NG ipſi QM parallela; erit SM : SN = SQ : SG (§. 268. *Geom.*) & ob parallelas KG & TS *per conſtruct.* SQ : SG = QT : KT (*§. cit.*), adeoque SM : SN = QT : KT (§. 167. *Arithm.*). Quare cum etiam ſit ob parallelas PQ & IK *per conſtruct.* QT : KT = PQ : IK (§. 268. *Geom.*); erit quoque SM : SN = PQ : IK (§. 167. *Arithm.*), conſequenter IK ſcenographia altitudinis objectivæ PQ (*§.* 54). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

56. *Scenographiam ſolidi cujuscunque exhibere.*

RESOLUTIO.

1. Baſis ſolidi inveſtigetur ichnographia perſpectiva (§. 33).
2. In ſingulis punctis erigantur altitudines perſpectivæ (§. 55).

Ita ſcenographia ſolidi erit abſoluta, niſi quod umbra conveniens per regulas capitis ſequentis adhuc ſit ſuperaddenda.

SCHOLION.

57. *Methodus hæc generalis eſt: ejus tamen applicatio in caſu quolibet non æque manifeſta. Conſultum igitur eſt, ut aliquot exemplis illuſtretur.*

PROBLEMA 12.

58. *Cubi ex angulo viſi ſcenographiam exhibere.* Tab. III. Fig. 19.

RESOLUTIO.

1. Quoniam cubi ex angulo viſi & plano Geometrico inſiſtentis baſis eſt quadratum ex angulo viſum (§. 459. *Geom.*); delineetur in tabula perſpectiva quadratum ex angulo viſum (*§.* 42).
2. Latus quadrati HI perpendiculariter erigatur in quocunque puncto lineæ terræ DE, ducanturque ad punctum quodlibet V lineæ horizontalis HR rectæ VI & VH.

3. Ex

3. Ex angulis *d*, *b* & *c* ducantur *c*1, *d*2 ad lineam terræ DE parallelæ.

4. Ex punctis 1 & 2 erigantur L1 & M2 ad easdem perpendiculares.

5. Denique cum HI sit altitudo in *a*, L1 in *c* & *b*, M2 in *d* erigenda (§. 55); excitentur in *a* ad *a*E perpendicularis *fa*, in *b* & *c* perpendiculares *bg* & *ce* ad *bc*1, & tandem *dh* ad *d*2 normalis, fiatque *af* = HI, *bg* = *ec* = L1 & *hd* = M2. Quodsi puncta *g*, *h*, *e*, *f* rectis connectantur; scenographia erit absoluta.

PROBLEMA 13.

Tab. III. Fig. 20.

59. *Prisma quinquangulare cavum scenographice delineare.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam prismatis quinquangularis cavi & plano Geometrico insistentis basis est pentagonum limbo instructum (§. 456 *Geom.*); investigetur apparentia hujus pantagoni super tabula (§. 49).

2. Erigatur ut in problemate præcedente ex quocunque puncto H lineæ terræ DE perpendicularis HI, quæ sit altitudini objectivæ æqualis & ducantur ad quodcunque punctum V lineæ horizontalis HR recta HV & IV.

3. Ex singulis angulis *a*, *b*, *d*, *e*, *c* ichnographiæ perspectivæ, tam interioribus, quam exterioribus, ducantur rectæ cum linea terræ parallelæ *a*1, *b*2, *d*3 & ex punctis 1, 2, 3 erigantur ad eas perpendiculares L1, M2, *m*2, N3, *n*3.

4. Quodsi hæ in punctis ichnographiæ respondentibus, ut in problemate præcedente, excitentur; scenographia erit perfecta.

PROBLEMA 14.

60. *Cylindrum scenographice repræsentare.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam basis cylindri, qua plano Geometrico insistit, circulus est (§. 466. *Geom.*); quæratur circuli apparentia (§. 47). Tab. II. Fig. 14.

2. In punctis *a*, *b*, *d*, *f*, *h*, *g*, *e*, *c* erigantur altitudines apparentes (§. 55): quod quia ex præcedentium problematum resolutione manifestum, denuo hic non repetimus.

3. Quodsi puncta sublimia earundem lineis curvis decenter connectantur, sicuti in basi *abdfhgec* factum est; scenographia cylindri erit absoluta.

SCHOLION.

61. *Illud per se patet, eas omittendas esse lineas tum in basi, tum in elevatione, quæ oculo non objiciuntur, licet a[l] initi[o]* Tab. III. Fig. 19.

initio ad inveniendas alias necessarias non sint negligendæ. E. gr. in scenographia cubi ex angulo visi conspectui subducuntur in basi rectæ bd *&* dc, *in elevatione recta* dh; *lineæ igitur istæ omittuntur. Quoniam tamen punctum sublime* h *inveniri nequit, nisi in ichnographia repertum fuerit punctum* d, *neque rectæ* gh *&* he *duci possunt, nisi altitudine* dh *decenter elevata; in ipsa operatione non minus apparentia puncti* d, *quam altitudinis* hd *determinanda.*

PROBLEMA 15.

Tab. IV. Fig. 21. 62. *Pyramidem delineare basi insistentem.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. delineanda pyramis quadrangularis ex angulo visa.

1. Quoniam pyramidis quadrangularis basi insistentis & ex angulo visæ basis est quadratum ex angulo visum (§. 472. *Geom.*) repræsentetur quadratum ex angulo visum (§. 42).
2. Ut habeatur vertex pyramidis, hoc est, perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 227. *Geom.*) ducantur diagonales se mutuo intersecantes in *e*. Porro
3. In quocunque puncto H lineæ terræ DE erigatur altitudo pyramidis HI, ductisque rectis HV & IV ad quodcunque lineæ horizontalis HR punctum.
4. Producatur diagonalis *db*, donec lineæ VH in *b* occurrat.
5. Ex *b* ducatur ipsi HI parallela *bi*, quæ ex puncto *e* decenter elevata dabit verticem pyramidis K, consequenter lineæ *dk*, *ka* & *kb* una determinantur.

DEMONSTRATIO.

Duo hic demonstranda sunt; nimirum 1. altitudinem pyramidis rectæ K*e* cadere in punctum *e*, in quo diagonales *ca* & *bd* se mutuo intersecant, hoc est, rectam *ke* esse ad utramque diagonalem, consequenter ad basin *acba* perpendicularem (§. 484. *Geom.*): 2. diagonalem *db* esse lineæ terræ DE parallelam (§. 55).

Quamvis prioris demonstratio non tam ad Perspectivam quam ad Geometriam pertineat (illa enim supponit, quæ de corporibus geometrice consideratis vera sunt); quoniam tamen in nostris Geometriæ elementis demonstrationem non dedimus, eam hic dari æquum est. Cum itaque *ab*=*cd per hypoth.* & ob parallelas *dc* & *ab* (§. 335. *Geom.*) *dce* = *eab* (§. 233. *Geom.*), præterea verticales ad *e* sint æquales (§. 156. *Geom.*); erit *de*=*eb* (§. 252. *Geom.*). Quoniam porro *ak*=*bk per hypoth.* & *ek*=*ek*; anguli ad *e* æquales sunt (§. 204. *Geom.*)

Geom.), consequenter *ke* ipsi *db* ad angulos rectos insistit (§. 65. *Geom.*), adeoque ad *db* perpendicularis (§.78. *Geom.*). *Quod erat unum.*

Porro quia puncta *d* & *b* in plano geometrico a linea terræ æqualiter distant (§. 42); eorum distantiæ a linea terræ in plano perspectivo eandem rationem habent ad altitudinem oculi (§. 32), adeoque æquales sunt (§. 177. *Geom.*). Est igitur *db* lineæ terræ DE parallela (§. 81. *Geom.*).

SCHOLION.

63. *Hinc apparet, ut in scenographia determinari possint puncta sublimia, in ichnographia geometrica notanda esse puncta, in quæ cadunt perpendicula ex angulis solidi in planum geometricum, cui insistere aut imminere supponitur, demissa.*

PROBLEMA 16.

64. ***Coni scenographiam perficere.***

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 14. 1. Quoniam basis coni circulus est (§. 467. *Geom.*); quæratur apparentia circuli (§. 47).

2. Quæratur porro, ut in problemate præcedente, altitudo in centro, si conus rectus fuerit, vel in diametro continuata erigenda, si fuerit obliquus, & inventa decenter elevetur.

3. Puncta denique curvæ cum sublimi altitudinis connectantur ut supra (§. 61).

PROBLEMA 17.

65. ***Pyramidem truncatam delineare.***

RESOLUTIO.

Sit e. gr. delineanda pyramis truncata quinquangularis.

1. Quodsi a singulis angulis in basi superiori concipiantur demissa perpendicula in inferiorem; prodibit pentagonum inscriptum pentagono basi, cujus latera eidem parallela: id quod revera coincidit cum pentagono, quod limbo latiore instructum, adeoque per probl. 9. delineari potest (§. 49).

2. Erecta altitudine pyramidis truncatæ IH determinentur altitudines scenographicæ in punctis *a, b, c, d, e* elevandæ. Quodsi Tab. IV. Fig. 22.

3. Puncta sublimia *f, g, h, i, k* rectis connectantur, tandemque

4. Rectæ *lk, fm, gn* ducantur; scenographia pyramidis truncatæ erit perfecta.

COROLLARIUM.

66. Quodsi in plano geometrico delineentur duo circuli concentrici & reliqua deinde fiant ut in problematis resolutione; scenographia coni truncati perficietur.

SCHO-

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 24. 67. *Quodsi pyramis truncata esset concava, sed plana interiora sub eodem vel alio angulo ad basin inclinarentur, quam exteriora; demissis perpendicularibus ex singulis angulis tam exterioribus, quam interioribus, ichnographia Geometrica x constabit ex quatuor figuris inter se similibus, quarum latera sunt parallela. Facile autem parabitur ichnographia Geometrica ex supposita solidi sectione* CFHA *in qua demissis perpendicularibus* CE & FG, *habentur distantiæ parallelorum laterum* AE, EG, GH.

PROBLEMA 18.

Tab. IV. Fig. 25. 68. *Tetraëdri super angulo solido ita constituti, ut basis sit plano geometrico parallela, scenographiam perficere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam basis tetraëdri triangulum æquilaterum est (§. 475. *Geom.*); demissis perpendicularibus ichnographia geometrica constabit triangulo æquilatero ACB, cujus punctum medium E una notandum, ut inveniri possit in scenographia punctum *e*, cui tetraëdri vertex insistere debet.
2. Quæratur apparentia *a c b* (§. 38) &
3. Determinentur altitudines *b d* vel *ag* & *ch* (§. 55): quibus datis, reliqua facile perficiuntur.

SCHOLION.

69. *Quodsi octaëdrum super uno angulo solido in plano geometrico constituatur; demissis ex reliquis perpendicularibus ad idem planum, quadratum prodibit ex angulo visum: quod cum facile delineari possit* (§. 42), *nec difficilis erit scenographia octaëdri in dato situ.*

PROBLEMA 19.

70. *Prisma cavum delineare, quod super uno planorum lateralium consistat.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABDEC sectio prismatis. Quodsi HI ducatur ipsi AB intervallo latitudinis plani, cui insistit, parallela & ex singulis angulis tam internis, quam externis demittantur perpendiculares: parallelogrammum sic divisum erit ichnographia geometrica, quæ lineæ terræ DE ita subjecta, ut latus AB sit ipsi parallelum, facile in tabulam projicitur (§. 46). Tab. IV. Fig. 26. n. 1.
2. Ut habeantur altitudines angulorum tam externorum, quam internorum scenographicæ; in H erigatur more consueto perpendicularis HI & in eam transferantur altitudines veræ H1, H2, H3, H4, H5. n. 2.
3. Quodsi jam ex puncto quocunque lineæ horizontalis V ducan-

cantur rectæ VH, V1, V2, V3, V4, V5 sive VI & reliqua fiant more consueto; reperientur altitudines anguli interni 1 = *aa*, interni 2 = *bb*, externi 3 = *cc* interni 4 = *dd*, externi denique 5 = *ee*: quæ si suis locis decenter eleventur, scenographia sine difficultate perficietur.

PROBLEMA 20.

Tab. V. Fig. 27. 71. ***Super pavimento erigere parietes, item pilas atque columnas.***

RESOLUTIO.

1. Repræsentetur pavimentum A FH; in tabula, una cum basibus columnarum atque pilarum, si quæ adfuerint (§. 46).
2. In lineam terræ transferatur crassities muri BA, & 1. 3.
3. Ex A & B, itemque ex 3 & 1 erigantur perpendiculares AD & BC, item 3. 6 & 1. 7.
4. Puncta D & 6 connectantur cum principali V rectis DV & 6V.
5. Ex F & H erigantur perpendiculares HG & EF.

Ita parietes omnes ADEF, EGHF & G6. 3 H erunt delineati (§. 55).

6. Quodsi pilæ aut columnæ erigendæ, non alia re opus est, quam ut ex earum basibus vel quadratis, vel circularibus in planum perspectivæ (§. 46. 47) projectis excitentur perpendiculares indefinitæ & in linea fundamentali, ad quam pertingit radius FA per basin transiens, erigatur altitudo vera AD, ducta enim ut ante DV, altitudines scenographicæ determinabuntur.

SCHOLION.

72. *Quæ de pilarum & columnarum elevatione dicuntur, multo clariora evadent, ubi per regulas architectonicas suo loco inferius tradendas paretur ichnographia pavimenti geometrica & per generalem regulam Perspectivæ in planum perspectivum projiciatur. Sed cum hæc non difficilia sint ei, qui regulas architectonicas cognitas atque perspectas habet (eas enim in hisce delineationibus supponit* Perspectiva *ad ichnographiam pavimenti geometricam rite conjiciendam) & methodum Perspectivæ generalem sibi familiarem reddidit; præter necessitatem figurarum numerum non multiplicamus.*

PROBLEMA 21.

73. ***Januam in pariete scenographice repræsentare.*** Tab. V. Fig. 27.

RESOLUTIO.

I. Sit janua delineanda in pariete DEFA.

1. In lineam fundamentalem transferatur ejus ab angulo A distantia

tia AN̄, una cum latitudinibus postium NI & LM atque latitudine ipsius januæ LI.

2. Ad punctum distantiæ K ex singulis punctis N, I, L, M ducantur rectæ KN, KI, KL, KM, quæ latitudinem januæ *li*, atque postium latitudines *in* & *lm* determinabunt.

3. Ex A in O tranferatur altitudo januæ AO & ex A in P altitudo postium AP.

4. Jungantur O & P cum puncto principali V rectis PV & OV.

5. Tandem ex *n*, *i*, *l* & *m* erigantur perpendiculares, quarum mediæ *io* a recta OV in *o*, extremæ autem a recta VP in *p* secantur.

Et hac ratione janua cum suis postibus erit delineata.

II. Si janua delineanda sit in pariete EFHG, eodem fere modo singula peragenda. Nam

1. In lineam terræ tranferatur AR distantia januæ ab angulo in plano geometrico & inde ulterius latitudo januæ RT.

2. Ex R & T ducantur rectæ ad punctum principale V, ut habeatur latitudo *rt* in plano perspectivo.

3. Ex *r* & *t* erigantur perpendiculares indefinitæ ad FH.

4. Ex A in O transferatur ut ante altitudo AO vera.

5. Denique ex O ducatur ad punctum principale V recta OV intersecans EF in Z & fiant *rr* atque *tt* ipsi FZ æquales.

Ita janua *rr tt* erit delineata: nec difficulter adduntur postes.

SCHOLION.

74. *Nihil in his contineri, nisi applicationem methodi generalis Perspectivæ, experietur qui, ichnographia ædificii geometrica juxta regulas Architecturæ parata, scenographiam juxta illam exhibere tentaverit. Unde peculiaribus demonstrationibus opus non est.*

PROBLEMA 22.

75. ***In parietum scenographia fenestras rite repræsentare.*** Tab. V. Fig. 27.

RESOLUTIO.

Qui januas repræsentare noverit; fenestras quoque facile addet, neque enim alia re præterea opus est, quam ut altitudo inferior seu ejus a pavimento distantia accedat. Ne tamen quicquam prætermisisse videamur; integram delineationem hic apponimus.

1. Ex 1 in 2 transferatur crassities muri ad fenestram, ex 3 in 4 ejus ab angulo 3 distantia & ex 4 in 5 ejus latitudo.

2. Ex 4 & 5 ducantur ad punctum distantiæ L rectæ L5 & L4, quæ lati-

latitudinem fenestræ perspectivam 10.9 designabunt.

3. Ex 10 & 9 erigantur ad pavimentum perpendiculares, hoc est, ducantur ipsi 6. 3 parallelæ indefinitæ.

4. Ex 3 in 11 transferatur distantia fenestræ a pavimento 3. 11, & ex 11 in 12 ejus altitudo 11. 12.

5. Denique ex 11 & 12 ducantur ad punctum principale rectæ V. 11 & V. 12, quæ perpendiculares 10. 13 & 9. 14 in 13 & 14, itemque in 15 & 16 intersecantes apparentiam fenestræ exhibebunt.

SCHOLION.

76. *Hinc satis intelligunt attenti, quid facto opus sit, si res quæcunque super pavimento utcunque elevatæ repræsentandæ.*

PROBLEMA 23.

77. *Fores apertas scenographice repræsentare.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 28. Quoniam fores, dum aperiuntur, semicirculum describunt; janua delineata (§. 73).

1. Repræsentetur in tabula semicirculus *ecd*, cujus centrum *a* (§. 47).

2. In eo notetur punctum *c* & inde erigatur perpendicularis indefinita *cf*.

3. Per *c* & *a* agatur recta *ca*, quæ continuata horizontalem in O secat.

4. Denique ex puncto O per *b* ducatur recta *bf*.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION 1.

78. *Ne semicirculi descriptio tædiosa sit, ichnographiam pariter ac pavimentum in areolas quadratas dividi consultum est. Quodsi enim observes, per quænam quadratula transeat semicirculus in plano geometrico, facile in quadratis respondentibus plani perspectivi delineabitur. Immo si notetur, in quonam quadrato & quonam hujus loco sit punctum* C *in plano geometrico; idem punctum sine projectione semicirculi invenietur in perspectivo.*

SCHOLION 2.

79. *Dum fenestræ aperiuntur, semicirculus in libero aere describitur. Fingitur itaque super fenestra planum horizontale, in quod projicitur semicirculus, & ne imaginatio turbetur, planum invertitur.*

SCHOLION 3.

80. *Puncta illa, quale est* O, *in linea horizontali, quæ ad res irregulariter per planum perspectivum dispersas repræsentandum loco puncti principalis adhibentur, dicuntur* puncta accidentalia.

PROBLEMA 24.

81. *Scenographiam objecti cujuscunque mechanice perficere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. 1. Tabula vitrea quadrata subscudibus inclusa oblinatur aqua, in qua nonnihil gummi solutum.

2. Ubi rursus arefacta fuerit, objecto delineando ita objiciatur, ut per dioptram EH integrum conspiciatur.

3. Quæcunque in tabula vitrea comparent, atramento ibi delineentur, ubi comparent.

4. Denique delineatione absoluta tabulæ apprimatur charta madefacta.

Ita enim futurum, ut, quæ super vitro delineata sunt, chartæ imprimantur.

SCHOLION.

82. *Hæc praxis non contemnenda adminicula affert iis, qui arti pictoriæ student: multa enim observant ad rem attenti, quæ alias non facile succurrerent.*

CAPUT IV.

DE

APPARENTIA UMBRÆ.

PROBLEMA 25.

83. ***Data apparentia corporis opaci & luminosi per radios divergentes radiantis, e. gr. lampadis, candelæ aut facis accensæ, invenire apparentiam umbræ.***

RESOLUTIO.

1. A luminoso, quod instar puncti consideratur, adeoque ex ejus medio demittatur perpendicularis ad tabulam, hoc est, quæratur apparentia puncti, in quod cadit perpendicularis ex medio luminis in planum geometricum ducta.

2. A singulis angulis corporis seu punctis sublimibus demittantur itidem perpendiculares ad planum: quod revera jam factum est, ubi scenographia corporis quæsita vi capitis præcedentis.

3. Puncta, in quæ incidunt hæ perpendiculares, connectantur lineis rectis cum puncto, in quod cadit perpendiculum ex luminoso demissum, in plagam luminoso oppositam continuandæ.

4. Denique per puncta sublimia ex

ex centro luminosi ducantur rectæ priores intersecantes.

Dico in punctis intersectionum finiri umbram.

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 30. Quoniam AB & CD ad planum perpendiculares *per hypoth.* erunt etiam ad rectam DE perpendiculares (*§*.484. *Geom.*). Quare cum CD > AB *per hypoth.* recta CE cum DE convergit (*§*.83. *Geom.*). Hinc quia umbra in plano ibi terminatur, ubi radius extremus CE id attingit (*§*. 46. 125. *Optic.*); intersectio rectarum CE & DE definiet longitudinem umbræ, quam projicit recta AB. *Q. e. d.*

SCHOLION.

84. *Ut methodi universalis vis rectius percipiatur, non inconsultum esse ducimus, uno alteroque exemplo eandem illustrare.*

PROBLEMA 26.

85. *Dato luminoso* L *prismatis* ABCFED *scenographice delineati umbram projicere.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 31. 1. Cum AD, BE & CF sint ad planum perpendiculares & LM itidem ad idem perpendicularis *per hypoth.* (datur enim lumen, si detur ejus altitudo LM); ducantur rectæ GM & HM per puncta D & E.

2. Per puncta sublimia A & B ducantur rectæ GL & HL priores in G & H intersecantes.

Quoniam in G terminatur umbra rectæ AD & in H umbra rectæ BE (§. 83), umbræ vero rectarum omnium reliquarum, quæ in dato prismate concipere licet, intra hos terminos coercentur; erit GDEH apparentia umbræ a prismate projectæ.

SCHOLION 1.

86. *Eodem prorsus modo determinatur umbra omnium prismatum & cylindrorum ad planum perspectivum rectorum.*

SCHOLION 2.

87. *Umbra recta* CF *omittitur, quia cadit intra basin solidi: id quod & in similibus casibus observandum.*

PROBLEMA 27.

88. *Pyramidis triangularis basi insistentis & scenographice repræsentatæ umbram projicere dato lumine* L.

RESOLUTIO.

1. Per apparentiam puncti E in quod cadit perpendiculum ex vertice D in basin demissum, per scenographiam dati ducatur ad punctum N, in quo terminatur perpendicularis LN ex lumine demissa, recta NM. Tab. V. Fig. 32.

2. Ex L per D ducatur alia recta LM; erit in M terminus umbræ, quam vertex D projicit (§. 83).

3. Quodsi ulterius a puncto M ducantur rectæ BM & CM; quoniam omnes radii latus DB stringentes in BM terminantur, & qui per latus DC appellunt, in recta CM desinunt: erit triangulum BMC apparentia umbræ a pyramide DABC projectæ.

PROBLEMA 28.

Tab. V. Fig. 33. 89. *Determinare umbram Tetraëdri vertici insistentis & scenographice delineati.*

RESOLUTIO.

1. Cum per scenographiam in tabula dentur puncta E, F, G, quibus puncta sublimia A, B, C perpendiculariter imminent; ob lumen datum vero punctum I; per singula puncta E, F & G ducantur ad I rectæ IK, IL & IM.

2. Porro ex H ducantur per A, B & C rectæ HK, HL & HM.

Erit LKGM umbra quæsita.

PROBLEMA 29.

Tab. V. Fig. 32. 90. *Determinare umbram pyramidis* ACDB *scenographice repræsentatæ in aliud opacum super tabula erectum* RSQP *projectam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur umbra in pavimentum projecta BMC (§. 88).

2. Ex puncto T, ubi recta EM opacum RQ secat, erigatur perpendicularis TO secans LM in O.

3. Denique ducantur ex *c* & *b* rectæ *c*O & *b*O.

Erit *b*O*c* pars umbræ in opacum PRSQ projecta.

SCHOLION.

91. *Hinc simul intelligitur, quid facto opus sit, si opacum fuerit humilius radio* DM: *erit enim pars umbræ* bOc, *e. gr. trapezium* bdec.

PROBLEMA 30.

92. *Determinare umbram prismatis* ACBFED *in aere penduli.* Tab. VI. Fig. 34.

RESOLUTIO.

1. Demittantur ex angulis F, E & D perpendiculares ad pavimentum DN, EH, FI.

2. Ex punctis N, H & I ad punctum M, quod ob lumen datum L datur, ducantur rectæ OM, IM & KM.

3. Porro ex L per A & B ducantur rectæ OL & KL, itemque ex L per F & E rectæ PL & QL.

Erit OKQP apparentia umbræ (§. 83).

SCHOLION.

93. *Quoniam Sol per radios ad sensum*

ſum parallelos radiat (§.94. Optic.); *quæ de umbræ projectione hactenus dicta ſunt, ad ſolarem applicari nequeunt. Cum tamen umbrarum ſolarium uſus ſit frequentior, quam cæterarum, de earum quoque projectione regulæ nonnullæ ſunt tradendæ & ne prolixiores eſſe cogamur, ad caſum ſuperiorem reducendæ.*

PROBLEMA 31.

Tab. V. Fig. 35. 94. ***Data altitudine Solis ſupra horizontem, determinare umbram cubi* ABCD *ſcenographice delineati & tabulæ inſiſtentis, Solis radiis eidem tabulæ parallelis incidentibus.***

RESOLUTIO.

1. Quoniam Sol radiat per radios parallelos (§. 94. *Optic.*), radii autem plano tabulæ paralleli exiſtunt; *per hypoth.* per angulos ſolidi ſingulos agantur rectæ inter ſe & cum tabula ſeu linea terræ parallelæ HL, EK & FG.
2. Per angulos ſuperiores aut puncta ſublimia A, B, C agantur rectæ BL, AK, DI cum perpendicularibus BH, AG, DF conſtituentibus angulos complemento altitudinis Solis ſeu ejus a vertice diſtantiis æquales LBH, KAG & IDF æquales.

Cum enim anguli L, K & I ſint altitudini Solis æquales (§.241. *Geom.*); erunt L, K & I termini umbræ a cubo projectæ.

SCHOLION.

95. *Caſus hic facillimus eſt: in quo ſupponitur, ſolem eſſe in plano tabulæ. Facilior tamen adhuc erit operatio, ſi ſuppoſueris Solem* 45 *gradibus ſupra Horizontem eſſe elevatum: tum enim umbræ longitudinem* FI *altitudini* DF *æqualem eſſe conſtat* (§.148. Optic.).

THEOREMA 4.

96. ***Si recta* CD *ex oculo* D *in tabulam ducta ſit lineæ objectivæ* AB *parallela; hujus apparentia* FE *in tabula producta tranſibit per punctum* C.** Tab. VI. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD utpote ipſi AB parallela cum ea in eodem plano eſt; omnes rectæ a punctis ſingulis rectæ objectivæ AB ad punctum quodcunque rectæ CD ductæ erunt in eodem plano ACDB. Lineæ igitur AB apparentia FE eſt in interſectione tabulæ & plani CDBA (§. 22). Ergo EF in tabula producta neceſſario rectæ DC occurit in puncto C, ubi tabulam ſecat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

97. Quoniam CD eſt parallela omnibus lineis objectivis, quæ in plano geometrico ipſi AB parallelæ ſunt (§.495. *Geom.*); apparentiæ paral-

rallelarum productæ omnes in eodem puncto C concurrere debent.

PROBLEMA 32.

Tab. VI. Fig. 37. n. 1. 98. *Sole ultra tabulam constituto, data ejus distantia a plano verticali & altitudine super plano geometrico, in quo corpus constituitur, exhibere apparentiam umbræ ejusdem corporis scenographice repræsentati.*

RESOLUTIO.

1. Ex puncto principali V erigatur VA ad lineam horizontalem HR perpendicularis & distantiæ oculi VL æqualis.
2. Fiat in A angulis VAB distantiæ Solis a plano verticali æqualis.
3. In B erigatur perpendicularis indefinita factaque BC = BA fiat angulus C altitudini Solis æqualis, ut habeatur punctum D.
4. Quodsi jam quæratur apparentia umbræ, quam projicit punctum sublime H; demissa perpendiculari HI, ad planum perspectivum, ducatur per I recta KB & per H recta KD.

Dico IK esse apparentiam umbræ quæsitam, adeoque umbram corporis cujuscunque reperiri ut in problematibus superioribus, si puncto D utamur tanquam medio puncto candelæ & B tanquam puncto, cui illud perpendiculariter imminet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AV ad HR perpendicularis & angulus VAB distantiæ Solis a plano verticali, VA vero distantiæ oculi a tabula æqualis *per construct.* si triangulum BAV concipiatur elevari, donec plano geometrico sit parallelum, erit VA in plano verticali (§. 10) adeoque radius BA ex oculo A versus Solis plagam tendens in eodem plano, in quo hæret centrum Solis. Quare cum radius Solis IK per punctum I transiens & ab opaco in plano geometrico interceptus sit in eodem plano (§. 125. *Optic.*) & triangulum BAV parallelum plano geometrico, *per hypoth.* erit BA radio isti parallela adeoque hujus apparentia IK in tabula in puncto B cum linea horizontali HR concurrit (§. 96). Jam cum omnes radii intercepti seu umbram puncti sublimis terminantes in plano geometrico sint inter se paralleli (§. 94. *Optic.*), adeoque etiam paralleli rectæ AB triangulo AVB ut ante elevato (§. 405. *Geom.*); omnes illorum radiorum apparentiæ in puncto B concurrere debent. Exhibet adeo punctum B in tabula pun-

la pun-

la punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro Solis demissa. *Quod erat unum.*

Quodsi triangulum DCB con-
n. 1. cipiamus normaliter erectum super triangulo BAV, quia BC=BA & angulus C altitudini Solis æqualis *per construct.* radius CD ad centrum Solis dirigitur & triangulum ipsum DBC in eodem plano est, in quo centrum Solis hæret, *per demonstrata.* Quare cum radius transiens per punctum sublime H sit in eodem plano & cum recta ipsi AB parallelum angulum ipsi C, hoc est, altitudini Solis æqualem efficiat; erit etiam DC parallela
n. 2. eidem radio. Sit enim AB ipsi KI parallela & $o=x$. Ducta perpendiculari GK, erit $y=u$ (§. 78. 241. *Geom.*), adeoque AD ipsi HK parallela (§. 255. *Geom.*). Ergo apparentia rectæ HK in tabula continuata per punctum D transit (§. 96).
n. 1. Quoniam vero radii solares per puncta sublimia transeuntes & in planum geometricum incidentes sunt paralleli (§. 94. *Optic.*), adeoque & paralleli rectæ DC triangulo, prouti dictum est, elevato; omnes illorum radiorum apparentiæ in puncto D concurrere debent. Exhibet adeo punctum D centrum Solis in tabula. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

99. *Ne imaginatio in concipienda demonstratione negotium facessat; planum geometricum &, perspectivum inter se probe distinguenda vi imaginationis, quoties fieri debet.*

PROBLEMA 33.

100. ***Sole ante tabulam constituto, data ejus distantia a plano verticali & altitudine super Horizonte seu plano geometrico, in quo corpus constituitur, exhibere apparentiam umbræ ejusdem corporis scenographice repræsentati.*** Tab. VI. Fig. 38.

RESOLUTIO.

1. Ex puncto principali V erigatur VA ad lineam horizontalem HR perpendicularis & distantiæ oculi æqualis.
2. Fiat in A angulus distantiæ Solis a plano verticali æqualis, nempe versus dexteram intuentis, si Sol versus lævam consistat.
3. In B erigatur perpendicularis indefinita factaque BC = BA fiat angulus C altitudini Solis æqualis, ut habeatur punctum D.

Erit B punctum, in quo concurrunt rectæ per puncta ductæ, in quæ cadunt perpendicula ex sublimibus demissa, & D punctum, in

quo concurrunt, quæ per sublimia ducuntur: adeoque his datis reliqua peraguntur ut in superioribus problematibus.

DEMONSTRATIO.

Quemadmodum constructio, ita etiam demonstratio eadem est, quæ problematis præcedentis, nisi quod radius per solem & oculum ductus CD infra lineam horizontalem HR cum tabula concurrere debet, quia ante eam adeoque a tergo spectatoris positus supponitur. Quamobrem cum centrum Solis in tabula exhiberi non possit, ejus loco exhibetur punctum D in meridiano inferiori eidem oppositum & punctum B exhibet locum, in quem cadit perpendiculum ex puncto centro Solis opposito demissum. Unde & si Sol a tergo intuentis tabulam constituatur, triangula, quibus puncta ista determinantur, describuntur versus dexteram, Sole versus sinistram constituto.

SCHOLION.

101. *Exempla non addimus, quia datis punctis* B *&* D, *reliqua ex superioribus satis manifesta sunt. Id tamen moneri non inconsultum ducimus, quantitates rectarum* VB *&* BD *extra tabulam investigari & inventas in eam transferri posse, ne multitudo linearum operationem confundat.*

PROBLEMA 34.

102. ***Data scenographia fenestræ atque corporis, umbræ apparentiam exhibere, quam projicit ad lumen fenestræ.*** Tab. VI. Fig. 40.

RESOLUTIO.

1. Ex medio fenestræ E, itemque ex angulis A & B demittantur perpendiculares EF, AC, BG, & EF continuetur in D, ut habeatur altitudo fenestræ ED.
2. Ex tribus punctis C, F & G ducantur rectæ per singula puncta inferiora, in quæ nempe cadunt perpendicula ex punctis sublimibus demissa, ut in superioribus.
3. Per puncta sublimia ducantur rectæ ex E & D.

Ita nimirum per rectas ex E ductas determinabitur umbra plena, hoc est, nullo lumine per fenestram directe radiante perfusa, & per rectas ex D ductas umbra diminuta, lumine nempe aliquo diluta: prout ex superioribus satis intelligitur.

SCHOLION 1.

103. *Si quæ lineæ caderent intra ambitum aliarum, eæ omittuntur.*

SCHOLION 2.

104. *Posset quoque umbra in plano geometrico delineari & instar figurarum aliarum per regulas capite secundo traditas in tabulam projici: Sed cum ea methodus præter necessitatem prolixitate molesta accideret, peculiares ea de re regulas exhibere debuimus.*

CAPUT V.

DE ANAMORPHOSIBUS SEU PROJECTIONIBUS MONSTROSIS.

DEFINITIO 19.

105. *Anamorphosis seu projectio monstrosa* est deformatio imaginis in plano aut superficie alicujus corporis, quæ ex certo intervallo visa formosa apparet.

PROBLEMA 35.

Tab. VI. Fig. 40. 106. *Anamorphosin in plano perficere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur quadratum ABCD arbitrariæ magnitudinis, & latere AB in partes quotcunque æquales diviso, in areolas quadratas minores resolvatur. Quadratum hoc *Craticulam Prototypi* appellant. (n. 1.)

2. In hoc quadrato delineetur Prototypon seu imago deformanda; in his enim praxibus supponitur ars delineandi communis.

3. Ducatur linea *ab* in tot partes æquales divisa, in quot divisum est latus prototypi AB, eidemque lateri æqualis. (n. 1.)

4. In medio E erigatur perpendicularis EV eo longior, quo deformior apparere debet imago.

5. Ad EV ducatur perpendicularis VS eo minor, quo deformior imago apparere debet.

6. A singulis divisionum punctis ducantur ad V lineæ rectæ & puncta *a* atque S jungantur itidem recta *a*S.

7. Per puncta *c*, *e*, *f*, *g* agantur rectæ ipsi *ab* parallelæ; erit *abcd* *Craticula ectypi.*

8. Per singulas areolas craticulæ ectypi disperge, quæ in respondentibus areolis craticulæ prototypi delineata conspiciuntur.

Ita obtinebis imaginem difformem, quæ oculo intervallo EV ab ea distanti & per altitudinem VS supra eam elevato formosa apparebit (§. 109. *Optic.*)

SCHOLION 1.

207. *Jucundius accidit spectaculum, si imago deformata non merum chaos, sed aliam imaginem ab ea diversam, quæ hoc artificio deformata fuit, exhibeat: id quod majorem artificis peritiam*

am requirit, nec regulis commode comprehendi potest. Necesse est, ut quis multiplici experientia edoctus didicerit, quam formam induant objecta distincte percepta, ubi partes quædam minores in unum confusæ non amplius conspiciuntur.

SCHOLION 2.

108. *Neque vero opus est, ut quadratum deformatum sit craticulæ æquale; sufficit in areolis homologis fieri projectionem.*

SCHOLION 3.

109. *Mechanice anamorphosin perficies, si prototypon acu hinc inde perforatum candelæ aut lampadi accensæ opponas, & puncta, in quæ radii per foramina delapsi incidunt, in plana vel curva superficie imaginem deformatam exceptura notes. Errant autem, qui radiis solaribus ad hoc artificium utuntur, quia hi sunt paralleli* (§. 94. Optic.) *adeoque nullibi concurrunt: quod tamen fieri necesse est eo in loco, ubi oculus collocandus.*

SCHOLION 4.

110. *Lumine tamen solari commode utimur ad imaginem formosam prototypo dato similem in superficie quacunque delineandam. In tabula scilicet, super qua prototypon expansum aut erectum, duo infiguntur styli ejusdem altitudinis, si ectypon prototypo æquale esse debet, vel diversæ, si unum altero majus desideratur: quo facto, tabula soli ita objicitur ut situ ejus lente mutato umbra styli unius per singula lineamenta prototypi oberret. Dum enim umbra styli alterius per similes vias in superficie quacunque eidem opposita incedit; notatis vestigiis, ectypon prototypo simile delineabitur. Si umbra displicet, apici styli affige orbiculum exiguo foramine pertusum, ut radius lucidus penicilli vices sustineat.*

PROBLEMA 36.

111. ***In superficie coni convexa anamorphosin perficere.*** Tab. VI. Fig. 41.

RESOLUTIO.

Ex problemate præcedente satis apparet, non alia re opus esse, quam ut craticula ectypi paretur in superficie coni, quæ oculo vertici ejus in debita distantia admoto appareat craticulæ prototypi æqualis. Igitur.

1. Basis coni ABCD per diametros dividatur in sectores quotcunque æquales, peripheria nempe in partes quotcunque æquales divisa. n. 1.
2. Radius unus dividatur quoque in aliquot partes æquales & ex centro per singula divisionum puncta ducantur circuli concentrici. Ita craticula prototypi erit perfecta.
3. Dupla diametro AB tanquam radio describatur quadrans EFG, ut arcus EG sit integræ peripheriæ æqualis (§. 412. *Geom.*) & quadrans ipse complicatus superficiem Coni exhibeat, cujus basis est circulus ACBD. n. 1. & 2.
4. Arcus EG dividatur in tot partes

tes æquales, in quot peripheria craticulæ prototypi divisa, & ex centro F ad singula divisionum puncta ducantur radii.

5. Producatur GF in I, donec FI = FG, quia Oculus tanto intervallo super verticem coni elevari debet, quanto intervallo vertex a centro basi abest, dum imago in superficie coni deformata formosa spectari debet: ex centro I radio IF ducatur quadrans FKH, ex I vero ad E recta IE, ut habeatur angulus, sub quo videtur latus coni, radium basis exhibiturum oculo super vertice coni rite elevato.

6. Arcus KF dividatur in tot partes æquales, in quot radius craticulæ prototypi divisus, & per singula divisionum puncta ducantur radii ex centro I ipsi EF in 1. 2. 3 &c. occurrentes.

7. Denique ex centro F radiis F1, F2, F3 &c. describantur arcus concentrici. Ita habebis craticulam ectypi, cujus singulæ areolæ videbuntur inter se æquales (§. 209. *Optic.*).

8. Quodsi igitur ea, quæ in singulis areolis craticulæ prototypi delineata sunt, in areolas craticulæ ectypi transferas; imago deformabitur: oculo autem super vertice coni ita elevato, ut centrum ejus sit in axe coni, distet autem tanto intervallo a vertice coni, quanto intervallo hic a centro basis abest, formosa apparebit.

COROLLARIUM 1.

112. Quodsi in craticula prototypi subtensas quadrantum & in craticula ectypi subtensas quartarum partium ducas, reliquis omnibus manentibus iisdem; habebis craticulas ad anamorphosin in pyramide quadrangulari perficiendas. Hinc vero ulterius intelligitur, quomodo imago deformari possit in pyramide quacunque alia, cujus basis est polygonum quoddam regulare.

COROLLARIUM 2.

113. Si quadrantem HFI invertas, ita ut radius sit in E ad FE perpendicularis, reliqua vero omnia fiant ut ante; craticula prodibit imaginis in superficie concava coni deformandæ: spectatur enim, oculo basi opposito. Tab. VI. Fig. 41. n. 2.

SCHOLION.

114. *Quia oculus magis hallucinatur, si ex objectis contiguis de distantia partium in imagine deformata judicare nesciverit, imagines istiusmodi deformatæ per exiguum foramen adspici debent, ut solæ in intuentis oculum incurrant.*

SCHOLION 2.

115. *Notandum vero, eodem artificio, quo imaginem ope luminis solaris delineari posse in plano docuimus* (§. 110), *nos quoque uti posse in deformandis imaginibus in superficie alicujus coni vel pyramidis. Etenim ad tabulam, cui duo styli infiguntur, verticaliter erigitur tabula alia, & in ejus parte una describitur prototypon, cui opponitur stylus unus; in parte altera ad planum tabulæ ejusdem verticaliter affigitur corpus, in cujus superficie imago deformata dispergenda. Cetera deinde fiunt, ut paulo ante præcepimus. Schemata nec hic apponimus, nec superius dedimus, quia facile absque schematis intelliguntur, quæ hic præcipiuntur. Non igitur opus est, ut figuras præter necessitatem multiplicentur.*

FINIS PERSPECTIVÆ.

ELE-

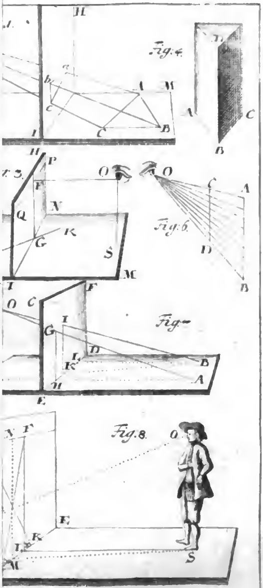
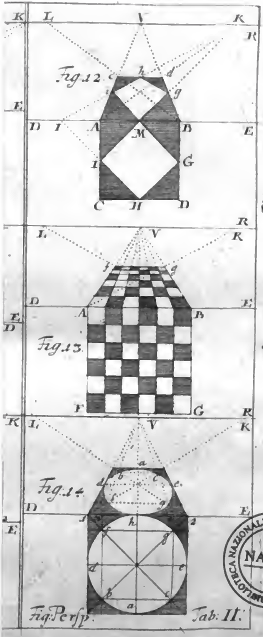


Fig: Perspect: Tab: I. Lit. H


Fig.12.
Fig.13.
Fig.14.
Fig. Persp.
Tab: II.



rspect. Tab. III.
Lit. K.

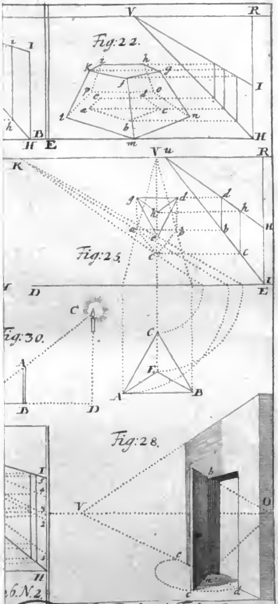


Fig Persp: Tab: IV. Lit. L.

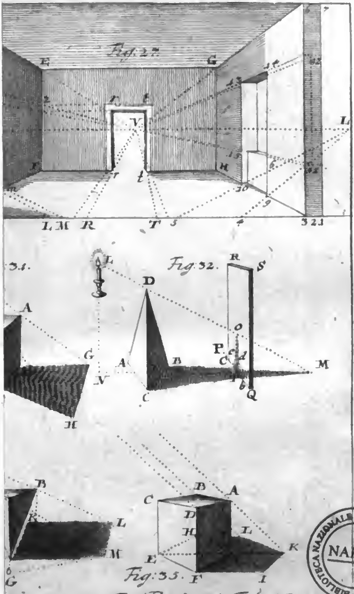


Fig: Perspect: Tab: V — *Lit. M.*

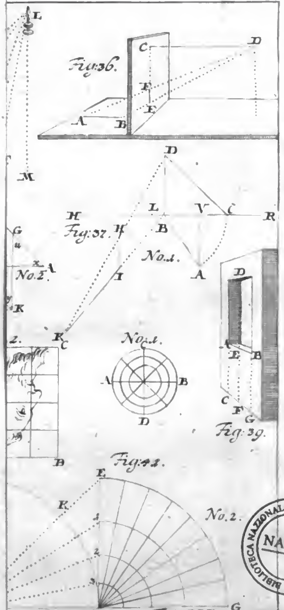


Fig: Perspect: Tab: VI. lit: N

ELEMENTA
CATOPTRICÆ.

PRÆFATIO.

Singularia prorſus ſunt ſpeculorum phænomena: quorum alia, quia quotidiana, vileſcunt, alia vero, quia in vulgus minus nota, in admirationem rapiunt ſpectatores. Neque ſine ratione mirum videtur, multitudinem objectorum per ingens ſpatium diffuſam videre, ubi ſpatium nullum eſt; videre item objecta in libero aëre pendentia, ubi nihil prorſus adeſſe tactu experimur; immo videre objecta nunc juſto majora, nunc minora, nunc formoſa, nunc difformia. Qui Opticæ principia cognita atque perſpecta habent, phænomenorum iſtorum rationes generales haud difficulter perſpiciunt. Radii ſcilicet a ſpeculis reflexi ſpeciem objecti ad oculum ferunt, quia per reflexionem cum aliis non confunduntur (a): tale autem objectum ſpectandum exhibent, quale foret, ſi per eosdem radios in oculum ra-

(a) Optic. §. 76.

ELEMENTA CATOPTRICÆ.

CAPUT I.

DE FUNDAMENTIS CATOPTRICÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Catoptrica* seu *specularia* est scientia visionis reflexæ.

DEFINITIO 2.

2. *Visio reflexa* est, quam efficit radius reflexus a speculo.

DEFINITIO 3.

3. *Speculum* est omne corpus politum & lumini impervium.

SCHOLION.

4. *Ita aqua in puteis & fluminibus profundis in speculorum numero habetur & metalla polita, quæ præsertim obscuriorem habent colorem, in specula abeunt.*

DEFINITIO 4.

5. *Speculum planum* est, quod planam habet superficiem.

DEFINITIO 5.

6. *Speculum convexum* est, quod convexam habet superficiem. Per speculum convexum Autores ordinarie intelligunt sphærice convexum.

DEFINITIO 6.

7. *Speculum concavum* est, quod concavam habet superficiem. Per speculum concavum Autores ordinarie intelligunt sphærice concavum.

DEFINITIO 7.

8. *Speculum sphæricum* est, quod superficiem habet sphæricam. Estque vel *convexum*, vel *concavum*.

DEFINITIO 8.

9. *Speculum cylindricum* est, quod habet superficiem cylindricam. Estque vel *convexum*, vel *concavum*.

DEFINITIO 9.

10. *Speculum conicum* est, quod habet supeficiem conicam.

DEFINITIO 10.

11. *Speculum parabolicum* est, quod

quod habet ſuperficiem conoidis parabolici; *hyperbolicum* vero, quod ſuperficiem conoidis hyperbolici habet.

DEFINITIO 11.

12. *Speculum ellipticum* eſt, quod habet ſuperficiem ſphæroidis elliptici.

DEFINITIO 12.

Tab. I. Fig. 1. 13. *Punctum incidentiæ* eſt punctum ſpeculi B, in quod incidit radius BA a puncto radiante A emanans. Vocatur idem *punctum reflexionis* reſpectu radii BC, qui inde reflectitur.

DEFINITIO 13.

14. *Radius incidens* vel *Linea incidentiæ* eſt recta AB puncto radiante A ad punctum incideutiæ B ducta, per quam lumen ad ſpeculum propagatur.

DEFINITIO 14.

15. *Radius reflexus* vel *Linea reflexionis* eſt recta BC, per quam lumen a puncto reflexionis reverberatur.

DEFINITIO 15.

16. *Cathetus incidentiæ* eſt recta AF a puncto radiante A ad ſpeculum DE perpendicularis.

DEFINITIO 16.

17. *Cathetus reflexionis* eſt recta CG a quocunque radii reflexi BC puncto C ad ſpeculum DE perpendicularis. Vocatur etiam *Cathetus oculi.*

DEFINITIO 17.

18. *Cathetus obliquationis* eſt recta HB ad ſpeculum DE in puncto incidentiæ vel reflexionis B perpendicularis.

DEFINITIO 18.

19. *Angulus incidentiæ* ABD eſt angulus minimus, quem efficit radius incidens cum ſpeculo, vel, ſi ſpeculum convexum aut concavum, cum tangente in puncto incidentiæ.

SCHOLION.

20. *Nimirum radius incidens* AB *duos efficit cum ſpeculo angulos, alterum acutum* ABD, *alterum obtuſum* ABE; *interdum utrumque rectum. Angulus minor* ABD *dicitur angulus incidentiæ.*

DEFINITIO 19.

21. *Angulus reflexionis* CBE eſt angulus minimus, quem efficit radius reflexus CB cum ſpeculo, vel, ſi id convexum aut concavum, cum tangente in puncto reflexionis. Tab. I. Fig. 1.

DEFINITIO 20.

22. *Inclinatio incidentis radii* eſt angulus ABH, quem efficit radius incidens AB cum catheto obliquationis HB.

DE-

DEFINITIO 21.

23. *Inclinatio radii reflexi* est angulus CBH, quem efficit radius reflexus CB cum catheto obliquationis HB.

THEOREMA 1.

24. ***Si lumen a speculo quocunque reflectitur, angulus incidentiæ est æqualis angulo reflexionis.***

DEMONSTRATIO.

Cum in omni motu reflexo angulus incidentiæ sit æqualis angulo reflexionis (§. 557. *Mechan.*); etiam in motu reflexo luminis angulus incidentiæ angulo reflexionis æqualis sit necesse est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 1. 25. Radius igitur luminis HB perpendiculariter incidens in superficiem speculi DE in seipsum reflectitur (§. 79. *Geom.*).

SCHOLION 1.

26. *Veritatem theorematis experientia clarissime loquitur. Quodsi enim speculo quocunque radius solaris per exiguum foramen in locum obscurum intromissus excipiatur, non sine jucunditate videbis ipsum ita resilientem, ut angulo incidentiæ angulus reflexionis æqualis sit. Idem multis adhuc aliis modis experiri poteris. E. gr. Si super speculo* DE *collocetur semicirculus* FiG, Tab. I. Fig. 1. *ita ut centrum ejus sit in* B *& superficies ad speculum perpendicularis; sumtisque arcubus æqualibus* Fa *&* Gc *in* A *collocetur objectum, in* C *vero oculus; objectum per radium reflexum a puncto* B *videbitur. Quod si punctum* B *tegatur, non amplius videri poterit.*

SCHOLION 2.

27. *Poterat igitur hæc lex reflexionis sine probatione axiomatis instar assumi. Quemadmodum vulgo ab Opticis fieri solet.*

COROLLARIUM 2.

28. Ab uno speculi puncto non possunt reflecti plures radii ad unum punctum: forent enim omnes anguli incidentiæ eidem angulo reflexionis CBG (§. 24), adeoque etiam inter se æquales (§. 87. *Arithm.*): quod est absurdum (§. 84. *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

29. Radius unus AB in duo vel plura puncta reflecti nequit: forent enim omnes anguli reflexionis eidem angulo incidentiæ ABF æquales (§. 24). Quod esse absurdum, patet ut ante.

THEOREMA 2.

30. ***A quolibet puncto speculi reflectuntur radii a qualibet objecti parte incidentes.***

DEMONSTRATIO.

A quolibet objecti puncto in speculi punctum quodlibet radius incidit (§. 60. *Optic.*). Quare cum radii incidentes reflectantur (§. 51. *Optic.*); a quolibet puncto speculi reflectuntur radii a qualibet objecti parte incidentes. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

31. Cum ab uno puncto speculi radii a diversis objecti radiantis punctis incidentes in unum punctum reflecti nequeant (§. 28); radii, qui a diversis objecti radiantis punctis emanarunt, per reflexionem rursus separantur. Quilibet igitur punctum, unde emanavit, videre facit (§. 76. *Optic.*).

SCHOLION.

32. *En rationem, cur radii a speculo reflexi spectanda exhibeant objecta. Unde simul intelligitur, corpora aspera ita reflectere debere lumen, ut radii a diversis objectorum punctis illapsi confundantur: id quod ob diversimode alternantes eminentias & cavitates* (§. 935. Mechan.) *accidere necesse est.*

COROLLARIUM 2.

33. In singulis speculi punctis duæ fiunt pyramides, altera incidens, altera reflexa, quarum communis vertex est in puncto incidentiæ & reflexionis, basis incidentis in objecto, basis vero reflexæ continuo fit major.

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. 1. 34. *Si oculus* C *& punctum radians* A *loca permutent, punctum in oculum eodem, quo ante, tramite radiabit.*

DEMONSTRATIO.

Si enim objectum ex A in C transfertur: in punctum reflexionis pristinum B adhuc radiabit (§. 60. *Optic.*). Quare cum inter duo puncta C & B nonnisi unica recta esse possit (§. 170. *Geom.*) & radii per lineas rectas repræsententur (§. 46. *Optic.*); qui ante erat reflexionis, nunc incidentiæ erit radius CB (§. 14. 15). Quoniam itaque sub eodem angulo reflectitur, quo incidit (§. 24); qui ante erat incidentiæ radius, nunc erit radius reflexionis (§. 19. 21). Objectum igitur in C translatum in oculum in A constitutum adhuc radiat per rectas CB & BA. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

35. Objectum igitur per radium reflexum AB perinde videtur ab oculo in A constituto, ac si ipse in C, objectum in A ponitur.

SCHOLION.

36. *Cum theorematis veritas experientia facillime confirmari possit; quidam id instar principii cum* Euclide *assumunt & inde legem reflexionis hunc in modum demonstrant. Sit angulus incidentiæ angulo reflexionis major, erit* ABF > CBE. *Facta igitur translatione oculi & objecti, angulus* CBE *fiet angulus incidentiæ, adeoque* CBE > ABF per hypoth. *Idem adeo angulus* ABF *& major, & minor est altero* CBE. *Quod cum sit absurdum,* ABF *ipso* CBE *major esse nequit. Idem absurdum sequitur, si ponamus angulum incidentiæ minorem esse angulo reflexionis. Quoniam itaque angulus incidentiæ nec major, nec minor esse potest angulo reflexionis, eidem utique æqualis erit.*

OB-

OBSERVATIO 1.

37. *Si ad ſpeculum quodcunque applicetur planum aliquod ad angulos rectos & dioptra, cujus foramen in eo exiſtit, Soli obvertatur; videbis radium reflexum eſſe in eodem plano. Similiter ſi in loco obſcuro radium ſolarem per exiguum foramen transmiſſum ſpeculo immoto excipias & planum ad punctum incidentiæ ita applices, ut radius incidentiæ non minus, quam reflexionis in plano iſto exiſtat; re examinata deprehendes, planum illud eſſe ad ſpeculum rectum. Concordat cum his experientiis ea, quam ſupra* (§.26.) *alium in finem attulimus.*

COROLLARIUM 1.

38. Apparet adeo, planum reflexionis, in quo nempe radius incidens & reflexus exiſtit, eſſe ad ſuperficiem ſpeculi perpendiculare & in ſpeculis ſphæricis tranſire per centrum.

COROLLARIUM 2.

39. Cathetus adeo tam incidentiæ, quam reflexionis eſt in plano reflexionis (§.16.17).

SCHOLION.

40. *Quod planum reflexionis ſit ad ſpeculum perpendiculare, exemplo* Euclidis *atque* Alhazeni *tanquam experientia ſatis clarum ſine demonſtratione aſſumere malumus, quam rationibus non ſatis evidentibus ſtabilire.*

OBSERVATIO 2.

41. *Si ad ſpeculum ſive planum, ſive ſphæricum erigatur ſtylus ad angulos rectos; imagini ſuæ in directum jacet, etiam cum extra ſpeculum concavum in aere apparet. Quod ſi ſtylus punctum aliquod objecti extremitate ſua attingat, ejusdem puncti imago videbitur in imagine extremitatis ſtyli.*

SCHOLION.

42. *Hac experientia permoti veteres principii inſtar aſſumſerunt, imaginem objecti in ſpeculo viſi eſſe in catheto incidentiæ. Quare cum certum ſit, eandem eſſe in radio reflexo* (§. 326. Optic.); *tandem intulerunt, eam apparere in concurſu radii reflexi & catheti incidentiæ. Neque vero negandum eſt, id verum eſſe univerſaliter in ſpeculis planis & ſphæricis convexis, nec non ut plurimum in ſpeculis ſphæricis concavis; pauci tamen dantur caſus, in quibus regula fallit; quemadmodum dudum monſtravit* Keplerus (a). *Sed videntur veteres ob caſum illum rariorem, ubi exceptionem patitur, non deſerere voluiſſe principium, per quod reliqua Catoptricæ phænomena demonſtrantur. Ne tamen aliquid aſſumſiſſe videamur; quod veritati conſentaneum non ſit, de ſingulis ſpeculorum generibus ſigillatim demonſtrabimus, an & quibus conditionibus poſitis principium verum ſit.*

CA-

(a) in Paralipon. ad Vitellionem prop. 18. p. 70.

CAPUT II.

DE SPECULIS PLANIS.

PROBLEMA I.

43. *Tabulam vitream polire, unde speculum planum confici possit.*

RESOLUTIO.

1. Tabula vitrea gypso agglutinetur tabulæ ligneæ, horizontaliter positæ, quæ loco suo dimoveri nequit.
2. Tabulæ ligneæ minori agglutinetur tabula vitrea alia. Huic in parte postica affixa sit cista, ut tabula lapidibus allisque ponderibus onerari possit.
3. Tabula vitrea prior arena per cribrum trajecta, ne inæqualia nimis sint grana, & aqua conspergatur, quantum ad extritionem sufficere judicatur.
4. Tabula vitrea posterior sive minor majori superimponatur & huc illucque agitetur, donec una alteram complanaverit.
5. Cum aliqualis planities apparet, arena adhibeatur subtilior, & ubi hæc in pultem conversa, tabulæ solæ aqua tantum affusa cum pulvere smyridis contriti crassiori se invicem fricent.
6. Quando ad polituram aptæ, ab omnibus impuritatibus aqua affusa purgentur, ne ullus arenæ aut smyridis pulvisculus remaneat, polituram depravaturus.
7. Parallelepipedum ligneum, cujus longitudo aliquoties latitudinem excedit, inferius materia piliari obducatur & eidem materia, qua ad poliendum uteris (e. gr. terra tripolitana vel stannum ustum) aqua contemperata inducatur.
8. Tandem parallelepipedum tabulæ appressum huc illucque agitetur, donec ea perfectam politiem nacta fuerit.

SCHOLION I.

44. *Smyride si uti volueris, in pulverem contritus aquæ immittendus & cum palo ligneo agitandus. Postquam crassiores particulæ ad lævigandum ineptæ fundum petierunt; aqua in aliud vas transfunditur, in quo subtiliores subsidant: quo facto in tertium decantatur, ut adhuc subtiliorem pulverem nanciscaris. Immo in quartum ex tertio*

tio effundi debet, donec etiam omnium subtilissimi pulvisculi in fundo collecti conspiciantur. Ita nimirum diversæ subtilitatis smyridem adipisci licet, quo ad lævigandum successive utendum.

SCHOLION 2.

45. *Specula minora super tabula plana ferrea primum exteruntur & deinde eodem modo, quo majora, læviganter.*

SCHOLION 3.

46. *Difficillimum vero est tabulis vitreis perfectam planitiem inducere: quod experientia edocti non diffitentur, qui vitris planis expoliendis operam dedere, ita ut* Hevelius (b) *majus artificium judicet superficiem vitri exacte planam, quam cavam reddere. Et hinc raro reperiuntur specula perfecta planitie prædita, ut adeo exacte imagines objectorum non repræsentent.*

SCHOLION 4.

47. *Ad poliendas tabulas majores artifices specularii utuntur machina politoria, cujus descriptionem problemate sequente tradimus.*

PROBLEMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 48. ***Machinam politoriam construere.***

RESOLUTIO.

1. Cylindro AB rota radiata C instructo & verticaliter erigendo infigatur axis curvatus ferreus DE.

2. Axi DE immittatur annulus ferreus F & huic quatuor hastæ ferreæ FG applicentur, utrinque in uncum desinentes.
3. Construantur quatuor quadrangula HI ex tribus regulis ligneis HL, LI & IK & cylindro HK atque regulis transversis KL & HI; sitque quadrangulum circa axem cylindri HK mobilis.
4. In medio regulæ LI infigatur uncus M, cui inseratur uncus hastæ FG, ita ut cylindro AB circumacto quadrangulum LI nunc protrudatur, nunc retrahatur.
5. Eidem regulæ LI in superficie exteriori affigantur duo annuli & iis inserantur unci hastarum ferrearum NO, ad quas applicandum est lignum politorium PQ.
6. Baculi RS extremum alterum R instrumento politorio, alterum vero S trabi infigatur.
7. Denique ad machinam agitandam utendum est rotis dentata *ab*, stellata *cd*, radiata *de* & aquaria *fg*, vel aliis modis structura varianda pro diversa potentiæ applicatione, uti docuimus in Mechanicis cap. 14.

Quodsi enim tabulam vitream li-

(b) in Prolegom. Selenogr. f. 14.

gneæ TV gypso agglutinatam & ad polituram dispositam ligno politorio subjicias; machina lignum politorium huc illucque trahendo tabulam expoliet.

PROBLEMA 3.

49. *Ex tabulis vitreis lævigatis specula plana conficere.*

RESOLUTIO.

1. Super tabula lignea expandatur charta bibula & pulvere cretaceo conspergatur: quo facto, bractea stannea super charta exactissime explicetur.
2. Affundatur Mercurius pede leporino aut gossypio per bracteam æqualiter distribuendus.
3. Bracteæ penna purgatæ imponatur charta munda & huic tabula vitrea linteo mundo abstersa.
4. Manu sinistra tabula vitrea apprimatur & dextra charta lente extrahatur: quo facto tabula charta crassiori tecta pondere oneretur, ut superfluum Mercurii arceatur & stannum speculo certius adhæreat.
5. Ubi exsiccatum fuerit, pondus removeatur: eritque speculum planum confectum.

SCHOLION.

50. *Aliqui Mercurii unciam unam admiscent unciæ dimidiæ marchasitæ ad ignem liquefactæ &, ne Mercurius in fumum abeat, in aquam frigidam infundunt, frigefactam per linteum triplicatum aut per corium, ex quibus caligæ fieri solent, urgent. Sunt etiam qui quartam unciæ partem plumbi, itemque stanni, marchasitæ addunt, ut specula celerius exsiccentur.*

THEOREMA 4.

51. *In speculo plano quodlibet objecti punctum A videtur in concursu B catheti incidentiæ AB & radii reflexi CB.* Tab. 1. Fig. 3.

DEMONSTRATIO.

Sint duo radii reflexi CD & FE, quos supponamus in eundem oculum illabi: vel, si distantia oculorum tanta fuerit, quanta radiorum in F & C, DC in oculum dextrum, FE in sinistrum radiet. Quoniam angulus CDG = EDB (§. 156. *Geom.*) & CDH = ADG (§. 24); erit quoque ADH = CDG (§. 88. *Arithm.*) = EDB (§. 87. *Arithm.*). Porro HEF = DEB (§. 156. *Geom.*) & HEF = AEG (§. 24): ergo BED = AEG (§. 87. *Arithm.*). Quoniam igitur AEG & ADH duobus rectis minores, (§. 240. *Geom.*), etiam BED & EDB duobus rectis minores, consequenter radii reflexi FE & CD concurrunt in B (§. 262. *Geo.*), estq; DB = DA (§. 251. *Geo.*). Quare cum etiam sit angulus BDG = CDH (§. 156. *Geom.*), & ADG = CDH

= CDH (§. 24), adeoque BDG = ADG (§. 87. *Arithm.*). Erunt quoque anguli ad G æquales (§. 179. *Geom.*), adeoque AB ad HG perpendicularis (§. 79. *Geom.*), hoc est, AB est cathetus incidentiæ (§. 16). Concurrunt itaque radii reflexi FE & CD cum catheto incidentiæ AB in eodem puncto B. Ita ergo in oculum radiat punctum A, ac si coni optici vertex esset in B (§. 336. *Optic.*). Quamobrem punctum radians A videtur in B, hoc est, in concursu catheti incidentiæ cum radio reflexo (§. 348. *Optic.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

52. Quoniam ex demonstratione liquet, omnes radios reflexos cum catheto incidentiæ uniri in B; per quemcunque radium reflexum punctum radians A videatur, in eodem semper loco videtur. Quotquot igitur idem objectum in eodem speculo contuentur, in eodem quoque loco post speculum illud vident, sicque unius objecti unica tantum est imago, neque duobus oculis geminatum apparere potest.

COROLLARIUM 2.

53. Quia vi ejusdem demonstrationis BD = DA; distantia imaginis B ab oculo C componitur ex radio incidente AD & reflexo CD.

COROLLARIUM 3.

54. Immo quia per demonstrationem manifestum est, omnes radios reflexos cum catheto incidentiæ uniri in B; objectum A reflexe eodem modo radiat, quo radiaret directe, si in locum imaginis transferretur.

COROLLARIUM 4.

55. Si igitur lumen Solis a speculo plano reflectitur, eodem modo propagatur, quo per foramen transmissum, adeoque luminis reflexi figura erit rotunda & crescente distantia a speculo crescet, hoc est, imaginem Solis majorem exhibet (§. 294. *Optic.*).

THEOREMA 5.

56. *Imago puncti radiantis* B *tanto intervallo post speculum planum apparet, quanto ipsum punctum radians* A *ante speculum distat.* Tab. I. Fig. 3.

DEMONSTRATIO.

Quoniam imago B videtur in concursu catheti incidentiæ & radii reflexi CB; erunt anguli ad G recti (§. 16) adeoque æquales (§. 245. *Geom.*). Est vero etiam CDH = BDG (§. 156. *Geom.*) & CDH = ADG (§. 24), adeoque anguli ADG & GDB æquales, sunt (§. 88. *Arithm.*) & DG = DG. Ergo AG = GB (§. 251. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

57. Si ergo speculum HG fuerit horizontaliter collocatum; punctum

A tanto intervallo infra ſpeculum demerſum videbitur, quanto ſupra ipſum elevatur. Erecta igitur ſitu inverſo in eodem apparent, adeoque homines capite deorſum, pedibus ſurſum videntur.

COROLLARIUM 2.

58. Quare ſi ad parietem, in quem per exiguum foramen projiciuntur ſpecies objectorum inverſæ (§. 119. *Optic.*), ſpeculum horizontaliter colloces; videbis in eo imagines ſitu erectas.

COROLLARIUM 3.

59. Quodſi ſpeculum HG ad laquear conclavis applicetur, ita ut horizonti parallelum exiſtat; objectum tanto intervallo ultra laquear elevatum apparet, quanto infra id depresſum, videnturque erecta denuo inverſa, adeoque homines capite deorſum, pedibus ſurſum.

THEOREMA 6.

60. *In ſpeculo plano imago eſt objecto ſimilis & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 4. Quodlibet enim objecti punctum 1. 2. 3. 4 &c. videtur in catheto incidentiæ (§. 51) ſecatque ſpeculum catheti incidentiæ partem inter punctum radians & ejus imaginem interceptam bifariam (§. 56). Quodſi ergo a ſingulis punctis objecti 1. 2. 3. 4 &c. demittantur ad ſpeculum BC perpendiculares ultra id continuandæ, donec fiat 1.*a*=I.*a*, 2.*b*=II.*b*, 3.*d*=III.*d*, 4.*c*=IV.*c* &c. quotlibet imaginis puncta I. II. III. IV. &c. determinantur. Quodſi ergo concipiamus perpendiculares 1.*a*, 2.*b*, 3.*c*, 4.*d* &c. ita convolvi, ut ſecum rapiant ſua puncta objectiva 1. 2. 3. 4 &c. eaque deferant in plani partes oppoſitas; tum quidem 1 in I, 2 in II, 3 in III, 4 in IV cadere intelligitur, adeoque objectum imagini ſuæ congruit (§. 1. *Geom.*), conſequenter imago objecto & ſimilis, & æqualis eſt (§. 161. *Geom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

61. *Hinc ſpeculorum planorum uſus eſt in contemplanda facie.*

THEOREMA 7.

62. *In ſpeculo plano dextra apparent ſiniſtra & ſiniſtra contra videntur dextra.* Tab. I. Fig. 4.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim punctum 1 videtur in catheto incidentiæ ſuæ, nempe in I, & 4 in catheto incidentiæ ſuæ, nempe in IV (§. 51); dextra videntur e regione dextrorum & ſiniſtra e regione ſiniſtrorum. Sed ſi alterius faciem extra ſpeculum contuearis, ejus dextra tuæ ſiniſtræ & ejus ſiniſtra dextræ tuæ reſpondet. Quare in ſpeculo dextra apparent ſiniſtra & contra ſiniſtra videntur dextra. *Q. e. d.*

PROBLEMA 4.

Tab. I. Fig. 5. 63. *Datis puncto radiante* A *&* *loco oculi* C, *invenire punctum reflexionis* D.

RESOLUTIO.

Demissis ex C & A perpendicularibus CE & AG, hoc est, ductis cathetis incidentiæ & reflexionis (§. 16. 17), fiat: ut summa cathetorum incidentiæ & reflexionis AG & CE ad cathetum reflexionis CE; ita distantia cathetorum EG ad distantiam catheti reflexionis a puncto reflexionis ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli E & G recti sunt (§. 16. 17) & $x = o$ (§. 24); erit AG : EC = DG : ED (§. 267. *Geom*), consequenter AG + EC : EC = EG : ED (§. 190. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 5.

Tab. I. Fig. 6. 64. *Mediante speculo plano* C *altitudinem accessibilem* e. gr. *arboris* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

1. Speculo in C horizontaliter collocato tamdiu ab eo recede donec apicem A in speculo contuearis.
2. Metire altitudinem oculi DE, distantiam tuam a puncto reflexionis EC & distantiam arboris ab eadem.
3. Quæratur ad EC, CB & ED quarta proportionalis AB.

Dico, hanc esse altitudinem arboris quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE & AB ad EB perpendiculares (§. 227. *Geom.*); anguli B & E recti sunt (§. 78. *Geom.*) adeoque æquales (§. 145. *Geom.*). Quare cum etiam sit angulus ACB = DCE (§. 24); erit EC : ED = CB : AB (§. 267. *Geom.*), consequenter EC : CB = ED : AB (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

65. *A diversis speculi plani* AB *punctis non reflectuntur in idem punctum* D *radii ab eodem puncto* G *illapsi.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Est enim $o = y$ (§. 24) & $o > x$ (§. 239. *Geom.*), adeoque $y > x$ (§. 89. *Arithm.*). Porro $x = u$ (§. 24) & $y < u$ (§. 239. *Geom.*). Ergo $y < x$ (§. 89. *Arithm.*). Quod cum sit absurdum, a speculo plano AB in idem punctum D radii ab eodem puncto G illapsi non reflectuntur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

66. Radii igitur per reflexionem a speculo plano factam minime densiores fiunt, adeoque nec calorem Solis intendunt.

THEOREMA 9.

Tab. I. Fig. 8. 67. *Si puncta extrema objecti* F *&* H *a punctis* C *&* D *in oculum* O *reflectantur; puncta omnia intermedia a linea* CD *reflectuntur.*

DEMONSTRATIO.

Reflectatur enim, si fieri potest, punctum I a puncto E in oculum O. Quoniam IE radium DH in K secat: punctum K a punctis E & D ad idem punctum O reflectitur. Quod cum sit absurdum (§. 65), & idem absurdum sequatur, si punctum I a G in O reflecti ponamus; totum objectum FH a linea CD reflectitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

68. Quodsi ergo determinentur puncta C & D, unde extrema objecta F & H reflectuntur (§. 63); integra linea CD habetur, unde objectum integrum FH a speculo in oculum O reflectitur.

COROLLARIUM 2.

69. Punctum remotius F reflectitur a puncto C oculo viciniore, quam punctum speculo vicinius I: si enim I reflecteretur a puncto viciniore G, non reflecteretur a linea CD: quod tamen fieri necesse est (§. 67).

THEOREMA 10.

Tab. I. Fig. 9. 70. *Si speculum planum* AE *ad horizontem* EH *inclinetur sub angulo* 45 *graduum; objectum verticale* CB *horizontale apparet in* IK.

DEMONSTRATIO.

Continuetur BC, donec speculo in A occurrat. Quoniam H est rectus & E 45 graduum *per hypoth.* erit etiam A 45° (*§.* 241. *Geom.*). Quare si ex B ducatur perpendicularis BG ad speculum AB; erit B itidem 45° (§. *cit.*) & AG = GB (§. 253. *Geom.*). Fiat GB = GK: erit in K imago ipsius B (§. 56). Ducatur KA: quia KG=GA & G rectus *per demonstr.* erit K semirectus (*§.* 241. *Geom.*), consequenter KA ipsi EH parallela (§. 255. *Geom.*). Quare cum eodem modo ostendatur, punctum C apparere in puncto I ejusdem parallelæ; evidens est, imaginem IK horizonti EH parallelam esse. *Q. e. d.*

THEOREMA 11.

71. *Si speculum planum* AE *inclinetur ad horizontem* EH *sub angulo* 45 *graduum, objectum horizontale* LB *apparebit verticale in* MK.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum demonstratione theorematis præcedentis.

COROLLARIUM.

72. Hinc oculo infra speculum constituto in hoc situ terra videtur perpendiculariter erecta; collocato vero

vero supra speculum deorsum perpendiculariter depressa apparet.

SCHOLION.

73. *Hinc globus in plano parumper inclinato descendens mediante speculo exhiberi potest tanquam ascendens in plano verticali: quod artificium si tegatur, in admirationem rapiet Catoptrices ignaros.*

PROBLEMA 6.

74. *Efficere, ut te in speculo volantem contuearris.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam specula sub angulo semirecto ad horizontem inclinata imagines verticales ut horizontales exhibent (§. 70); speculum planum majus, inclinandum est ad horizontem sub angulo semirecto.
2. Quodsi ergo versus speculum progrediaris; horizonti parallelum moveri videbitur corpus, adeoque si brachia extensa eum in modum agitentur, quo aves alas agitare solent, per aërem volare tibi videberis.
3. Quoniam tamen pavimentum, cui insistis, simul attollitur (§. 71) & in eo incessus pedum observatur; quasi in plano verticali sursum contingeret (§. 73); ut oculus hallucinetur, in brachia & caput totus dirigendus & a pedibus, quantum fieri potest, avertendus.

THEOREMA 12.

75. *Si objectum AB fuerit speculo CD parallelum; etiam imago GH eidem parallela est.* Tab. I. Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Quodlibet punctum imaginis GH tanto intervallo post speculum distat, quanto punctum unumquodque objecti ante speculum (§. 56). Sed quia objectum AB speculo CD parallelum *per hypoth.* singula ejus puncta a speculo æqualiter distant (§. 81. *Geom.*). Ergo etiam singula imaginis GH puncta ab eodem æqualiter distant, consequenter imago GH speculo CD parallela (§. *cit. Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

76. *Si objectum AB speculo CD fuerit parallelum & cum oculo æqualiter ab eo distet, : linea reflectens CD est objecti AB dimidia.* Tab. I. Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Sit oculus O in ipso objecto AB, hoc est, ponamus spectatorem seipsum contemplari in speculo. Quoniam spectator AB speculo CD parallelus, *per hypoth.* etiam imago GH eidem parallela erit (§. 75). Demittatur ex O perpendicularis OL ad CD, quæ continuata in I erit etiam ad GH perpendicu-

dicularis (§. 230. *Geom.*); estque adeo OL altitudo trianguli OCD, OI vero altitudo trianguli GOH (§. 227. *Geom.*). Quare cum ob parallelismum imaginis GH & speculi CD, sit $o = x$ & $y = u$ (§. 233. *Geom.*); triangula COD & GOH similia sunt (§. 267. *Geom.*) & hinc CD : GH = OL : OI (§. 396. *Geom.*). Cum itaque sit OL = $\frac{1}{2}$OI (§. 56); etiam CD = $\frac{1}{2}$GH. Est vero GH = AB (§. 60). Ergo CD = $\frac{1}{2}$AB (§. 168. *Arithm.*) *Q. e. d.*

Eodem prorsus modo succedit demonstratio, si oculum O extra objectum assumas, hoc est, si non teipsum, sed objectum aliud in speculo contempleris, quod tamen æqualiter cum oculo ab eo distet.

COROLLARIUM 1.

77. Ut igitur in speculo te totum contueri possis; ejus altitudo altitudinis tuæ & latitudo latitudinis pariter tuæ dimidia esse debet.

COROLLARIUM 2.

78. Data altitudine & latitudine objecti per speculum videndi, datur quoque altitudo & latitudo speculi, in quo integrum apparet in eadem cum oculo distantia: Sunt nempe dimensiones speculi dimensionum objecti dimidiæ (§. 76).

COROLLARIUM 3.

79. Cum latitudo atque longitudo portionis specularis reflectentis sit subdupla latitudinis & longitudinis superficiei, quæ reflectitur (§. 76) & ob parallelismum speculi & superficiei reflexæ portio reflectens speculi huic similis existat; erit portio speculi reflectens ad superficiem, quæ reflectitur, in ratione subquadrupla (§. 406. *Geom.*).

COROLLARIUM 4.

80. Quoniam portio reflectens constans est (§. 79); te semper totum videbis in speculo plano, sive accedas, sive recedas, si aliquo in loco te totum videre potes: quod idem valere de objectis æqualiter cum oculo a speculo dissitis, satis patet.

THEOREMA 14.

81. *Si objectum* AB *speculo* IF *fuerit parallelum; longitudo lineæ reflexæ* AB *est ad reflectentem* CD *ut via reflexionis* BD + DO *ad radium reflexum* OD, *vel ut composita ex distantia oculi & objecti a speculo* OI + BF *ad distantiam oculi* OI. Tab. I. Fig. 11.

DEMONSTRATIO.

Quoniam objectum AB speculo FI parallelum *per hypoth.* erit etiam imago GE eidem parallela (§. 75), adeoque GE : CD = OE : OD (§. 268. *Geom.*), hoc est, quia GE = AB (§. 60) & DE = DB (§. 51), AB : CD = OD + DB : OD. *Quod erat unum.*

Est vero etiam OE : OD = OK : OI

OI (§. 267. *Geom.*), adeoque GE : CD = OK : OI (§. 167. *Arithm.*). Quare cum IK = FE (226. *Geom.*) = BF (§. 56) & GE = AB (§. 60); erit AB : CD = OI + BF : OI. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 15.

82. *Radii* AC & DB, *qui a speculo plano* CD *ad idem punctum* O *reflectuntur, cum catheto reflexionis* OK *tanto intervallo* IK *post speculum concurrunt, quanto punctum* O *ante id distat.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis 5 (§. 56).

THEOREMA 16.

Tab. I. Fig. 11. 83. *Si objectum* AB, *quod est cum oculo* O *in eodem plano, & speculo parallelum, ab eo totum videtur in speculo* CD; *oculus in* O *immotus eo minorem ejus partem videbit, quo id propius ad speculum* CD *accedit; semper tamen dimidia longitudinis itemque quarta superficiei majorem; idem vero juxta objectum* AB *adhuc alia in speculo conspiciet, si id longius ab eo recedat.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur PQ ipsi AB parallela; erunt PC & DQ radii extremi, qui a speculo CD in oculum O reflectuntur, adeoque oculus O præter PQ in speculo nihil videbit secundum longitudinem. Sed quia AC & BD cum catheto reflexionis OK in K concurrunt (§. 82); erit PQ : AB = KP : KA (§. 268. *Geom.*). Quare cum KP < KA *per hypoth.* erit etiam PQ < AB. *Quod erat unum.*

Porro ex eadem ratione PQ : CD = KP : KC. Est vero KP > KC (§. 84. *Arithm.*). Ergo PQ > CD. Quare cum CD = ½ AB (§. 84); erit quoque PQ > ½ AB (§. 87 *Arithm.*) & hinc superficies partis, quæ, objecto ex AB in PQ translato, videtur, major quarta parte superficiei totius (§. 79). *Quod erat alterum.*

Simili modo ostenditur, quod præter objectum adhuc alia in speculo videantur, si ex AB in MN transferatur. *Quod erat tertium.*

PROBLEMA 7.

84. *Datis oculo* O, *longitudine speculi* CD & *longitudine objecti* AB, *determinare locum, ubi statuendum est objectum, ut totum in speculo videri queat, nec quicquam aliud præter ipsum secundum longitudinem.* Tab. I. Fig. 11.

RESOLUTIO.

Dato oculo O, datur etiam radius reflexus OC. Itaque

1. Fiat: ut CD longitudo ſpeculi ad AB longitudinem objecti, ita OC radius reflexus ad viam reflexionis OC + AC (81).

2. Subtrahatur inde radius reflexus OC; reſiduus erit radius incidens AC.

3. Ducta igitur OC fiat angulus ACD=OCI (§. 24) & AC radio incidenti æqualis.

4. Denique objectum AB ſtatuatur in A ſpeculo CD parallelum.

Sic factum eſt, quod petebatur.

THEOREMA 17.

Tab. II. Fig. 12. 85. *Si ſpeculi* AB *inclinatio ad horizontem dato angulo* ACa *mutetur, radius vero incidens* DC *maneat in ſuo incidentiæ puncto* C; *radius reflexus* Ce *duplo angulo* eCE *variatur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ACD= ECB (§. 24) & ACa = BCb (§. 156. *Geom.*) & ECb=ECB+BCb (§. 86. *Arithm.*); erit ECb = DCA + aCA (§. 87 *Arithm.*) = DCa + 2 ACa (§§. *cit.*), conſequenter ECb − 2ACa = DCa = bCe (§. 24). Eſt igitur ECb = bCe + 2 ACa (§. 88. *Arithm.*). Quare cum ſit ECb − bCe = ECe & ECb − bCe = 2 ACa (§. 91. *Arithm.*); erit etiam ECe = 2aCA (87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

86. Radius igitur reflexus movetur duplo celerius ſpeculo.

SCHOLION.

87. *Hæc experiri datur in radio per foramen exiguum in cameram obſcuram intromiſſo.*

THEOREMA 18.

88. *In ſpeculo plano vitreo, (præſertim ſi objectum fuerit lucidum, aut lumen peregrinum a ſpeculo arceatur) poſt imaginem claram videtur adhuc alia aliquanto obſcurior.*

DEMONSTRATIO.

Reflexio enim non modo fit a ſuperficie ſuperiori ſpeculi; verum etiam ab interiori, quæ ſtanno terminata. Eſt igitur cathetus incidentiæ ad interiorem ſpeculi ſuperficiem tanta parte longior, quanta eſt craſſities ſpeculi. Quamobrem cum imago objecti videatur tanto intervallo poſt ſpeculum, quanto ante ipſum abeſt (§. 56) & quidem in catheto incidentiæ (§. 51); vi reflexionis primæ minori intervallo poſt ſpeculum videtur, quam vi ſecundæ: utraque tamen imago in eadem linea, adeoque altera pone primam videbitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

89. *Hoc incommodo carent specula plana ex metallo parata, quorum tamen rarior est usus, quia vitrea & clariora, & durabiliora sunt metallicis. Hinc mirifice sese commendabant specula chalybea Swarzenbergæ in Sudetibus Misniæ parata* (c).

COROLLARIUM.

90. Quoniam cathetus incidentiæ in casu superiori differt a catheto incidentiæ in priori tanta parte, quanta est crassities vitri, distantia autem objecti & imaginis est ejus duplo æqualis (§. 56); distantia imaginis obscurioris a clariore est dupla crassitiei vitri.

THEOREMA 19.

91. *Si speculi plani fragmenta ita collocentur, ut omnia sint in eodem plano; unum objectum nonnisi semel videtur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim omnia fragmenta sunt in eodem plano, *per hypoth.* una tantum est cathetus incidentiæ (§. 489. *Geom.*). Quare cum objectum videatur in catheto incidentiæ (§. 51) objectum unum nonnisi semel videtur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

92. Cum perinde sit, utrum fragmenta unius speculi, vel plura specula integra in eodem plano collocentur; in his quoque objectum nonnisi semel videri potest.

PROBLEMA 8.

93. *Plura specula ita statuere, ut in singulis imaginem tui videas.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro O describatur arcus circuli ABCDE. Tab. II. Fig. 13.
2. Specula AB, BC, CD, DE ita statuantur, ut latitudines ipsorum fiant arcuum subtensæ, seu ut anguli B, C, D, sub quibus junguntur, sint in peripheria; longitudines autem ad horizontem perpendiculares.

Dico, si oculus sit in O, quod imaginem tui in singulis speculis sis visurus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex O ad singula plana AB perpendiculares duci possint (§. 291. *Geom.*), radius vero perpendicularis in seipsum reflectatur (§. 25); oculus in speculis singulis seipsum videbit, & quia corpus tuum speculis parallelum, si speculi longitudo non minor fuerit subdupla longitudinis tuæ, te totum contueberis (§ 77); in reliquo casu partem corporis dimidia majorem (§. 83). *Q. e. d.*

(c) Vid. Acta Erudit. A. 1714. p. 203. & seqq.

SCHOLION.

94. *Hoc artificio multiplicatur fonticulus in crypta saliens.*

THEOREMA 20.

Tab. I. Fig. 14. 95. *Si objectum in linea* DE *ad speculum* AC *perpendiculari movetur; ipso recedente ante speculum, imago etiam recedit post speculum, eodem autem accedente imago etiam accedit.*

DEMONSTRATIO.

Si enim objectum in recta DE ad speculum AC perpendiculari recedit; ejus a speculo distantia continuo crescit (§. 225. *Geom.*), adeoque etiam imaginis distantia post speculum continuo fit major (§. 56), consequenter imago etiam recedit. *Quod erat unum.*

Si vero objectum in linea DE ad speculum AC perpendiculari accedit; ejus a speculo distantia continuo decrescit (§. 225. *Geom.*), adeoque etiam imaginis distantia post speculum continuo fit minor (§. 56), consequenter imago etiam accedit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

96. Accedente igitur ad speculum objecto imago post speculum obviam ire videtur: recedente autem objecto, imago in contrariam plagam tendit.

THEOREMA 21.

97. *Si objectum in linea* DE *cum speculo plano* AB *parallela movetur; imago in speculo cum ipso eadem celeritate versus eandem plagam progreditur.* Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Si enim recta DE ad speculum AB parallela; objecti a speculo distantia semper eadem manet (§ 81. *Geom.*), adeoque etiam imago eodem constanter intervallo a speculo distat (§. 56). Quare cum objecto in directum jaceat (§. 51); una cum objecto progredi videtur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

98. Objectum igitur imago tanquam individua comes comitatur sive ad dextram, sive ad sinistram, prout speculum vel ad dexteram, vel sinistram constitutum est.

PROBLEMA 9.

99. *Duo specula plana ita statuere, ut objectum in oppositas plagas eodem instanti moveri videatur.* Tab. I. Fig. 14.

RESOLUTIO.

1. Jungantur duo specula AB & AC ad angulos rectos.
2. Ducatur ad alterutrum AC perpendicularis DE, quæ erit alteri speculo AB parallela (§. 256. *Geom.*).

Quodsi

Quodsi itaque objectum moveatur per rectam DE, imago in speculo AB una cum ipso progredietur (§.97); altera vero in speculo AC in oppositam plagam tendet (§.96). Eodem adeo tempore objectum in oppositas plagas moveri videtur. *Q.e.d.*

PROBLEMA 10.

Tab. II, Fig. 15. 100. *Speculis planis quotcunque* BC, CD, DE *quomodocunque dispositis, & puncto radiante* A *itemque oculo* P *positione datis, invenire omnia puncta reflexionis* N, M *&* O, *& locum imaginis, quam videt oculus in ultimo.*

RESOLUTIO.

1. Ex A ducatur ad CB cathetus incidentiæ AF & producatur in G, donec AF = FG.
2. Ex G in DC productam demittatur perpendicularis GH continuanda in I, donec IH = HG.
3. Ex I demittatur in ED productam perpendicularis IK, continuanda donec KL = KI.
4. Denique ex L ducatur in P recta, LP ex puncto intersectionis O ad I recta OI, ex puncto intersectionis M ad G recta MG & denique ex puncto intersectionis N recta AN.

Dico, radium incidentem ex A in N reflecti ad M & inde ulterius ad O, tandemque ex O in oculum P; objectumque videri in L.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AF = FG angulique ad F recti *per construct.* erit $o = x$ (§.179. *Geom.*), adeoque cum sit $x = y$ (§.156. *Geom.*), $o = y$ (§.87. *Arithm.*). Radius igitur AN ex N reflectitur in M (§.24). Eodem modo ob HG = HI & angulos ad I rectos ostenditur radium NM ex M reflecti in O, & ob KI = KL & angulos ad K rectos radium MO ex O in P reflecti. Via igitur reflexionis est ANMOP, & puncta reflexionum sunt N, M & O. *Quod erat unum.*

Porro quia AF = FG & anguli ad F recti *per construct.* in G est imago ipsius A per radium reflexum MN videnda (§.51). Objectum igitur A in speculum DC non aliter radiat, ac si in puncto G constitueretur, adeoque GH est cathetus incidentiæ (§.16) & ob GH = HI imago imaginis G hoc est, objecti A videtur in I (§.51). Objectum ergo A in speculum DE eodem modo radiat, ac si in I constitueretur & hinc IK est cathetus incidentiæ (§.16) & ob IK = KL imago imaginis I, hoc est objecti A, videtur per radium refle-

reflexum PO in L (§. 51). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

101. Quoniam ob KL = KI, & IH = HG, AF = FG, angulosque ad K, H & F, rectos *per construct.* LO = OI, MI = MG, NG = NA (§. 179. *Geom.*); erit etiam LO = OM + MG = OM + MN + NA, consequenter distantia imaginis ab oculo PL viæ reflexionis AN + NM + MO + OP prorsus ut in unico speculo (§. 53) æqualis.

THEOREMA 22.

Tab. II. Fig. 16. 102. *Si duo specula plana* AB *&* AC *ad angulum rectum* A *constituantur; idem radius* GD *nonnisi bis reflecti potest.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = o$ (§. 24), adeoque acutus (§. 20), A vero rectus *per hypoth.* radius reflexus DE cum speculo AC concurrit (§. 262. *Geom.*). Quoniam vero y est acutus (§. 241. *Geom.*); erit etiam u acutus (§. 24), consequenter $y + n$ obtusus (§. 147. *Geom.*). Quare cum m sit rectus *per hypoth.* adeoque m & $y + n$ simul sumti duobus rectis majores; radius reflexus EF a speculo AB divergit (§ 261. *Geom.*), consequenter cum eo concurrere nequit (§. 84. *Geom.*). Radius itaque GD a speculis BA & AC nonnisi bis reflecti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

103. *Si duo specula plana ad angulum obtusum constituantur; idem radius nonnisi bis reflecti potest.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis præcedentis.

THEOREMA 24.

104. *Si duo specula plana* AB *&* BC *jungantur ad angulum rectum & oculus* O *fuerit constitutus extra rectam* BL, *quæ per punctum radians* D *in angulum rectum* B *ducitur; imaginem ipsius* D *triplicem videbit: quodsi autem extiterit in recta* BL, *imagines cernet tantum duas.* Tab. II. Fig. 17.

DEMONSTRATIO.

Illud satis manifestum est, in quolibet speculo per simplicem reflexionem videri imaginem unam adeoque in duobus speculis AB & BC simul duas. Quod vero in primo casu etiam tertia videri debeat, sic demonstratur.

I. Ducta catheto incidentiæ DF, fiat DG = FG & in F erigatur perpendicularis FI occurrens speculo BC continuato in H. Fiat porro HI = HF & jungatur punctum I oculo

oculo O recta OI; erit I imago tertia ab oculo O per duplicem reflexionem DEKO videnda (§. 100). Quod enim IO speculum BC secet, hoc modo patet: ducatur recta ID secans speculum AB in P; quoniam BG & IF ad FG perpendiculares *per construct.* erunt inter se parallelæ (§. 156. *Geom.*) & hinc DG:DF=PG:FI (§. 268. *Geom.*), consequenter ob DF=2DG *per construct.* FI est ipsius PG dupla. Quare cum etiam sit IF ipsius BG dupla, *per construct.* puncta P & B coincidunt. Cum adeo ID transeat per punctum B; recta OI ultra eam ducta speculum BC secare debet in K. *Quod erat unum.*

II. Quodsi vero oculus fuerit in L; reflexio duplex impossibilis est, cum radius reflexus a speculo BC ex puncto I ductus per ea, quæ numero primo demonstrata sunt, secare debeat BC ultra punctum B. Tertia igitur imago videri nequit. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 25.

Tab. II. Fig. 18. 105. *Si duo vel plura specula plana* AB *&* AC *jungantur sub angulo quocunque, ita ut respectu oculi secundum convexitatem disponantur; una tantum objecti* H *videbitur imago.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim oculum esse in O. Ducatur cathetus incidentiæ HG fiatque HD=DG: erit in G imago, quam per radium reflexum FO oculus O videt (§. 96). Quoniam vero radii non reflectuntur versus eam plagam, unde incidunt (§. 24): a speculo altero AB nullus radius in oculum O reflecti potest, & hinc in eo objectum videri nequit. Unica igitur tantum imago videtur. *Q. e. d.*

THEOREMA 26.

106. *Si duo specula plana* XY *&* XZ *jungantur sub angulo* X, *oculus* O *intra angulum constitutus objecti* A *intra eundem collocati imaginem toties videt, quot catheti vi §.* 100 *loca imaginum determinantes & extra angulum* YXZ *terminatæ duci possunt.* Tab. II. Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Ducantur enim catheti AC ex A ad XZ, CE ex C ad Xy, EG ex E ad XZ, GI ex G ad Xy & IL ex I ad XZ, ita ut sit AB=BC, CD=DE, EF=FG, GH=HI, IK=KL. Quoniam catheti AC, CE, EG & GI extra angulum terminantur; dico ab oculo O videri quatuor imagines objecti A in C, E, G & I.

Quoniam AB=CB, BT=BT & anguli

anguli ad B recti *per construct.* erit CTB=BTA (§.179. *Geom.*). Quare cum etiam verticales CTB & VTO æquales sint (§.156. *Geom.*); erit BTA=VTO (§.87. *Arithm.*), adeoque radius AT reflectitur ex T in O (§. 24), sicque oculus O videt imaginem objecti A in C.

Porro ob AB=BC & angulos ad B rectos, erit etiam VR reflexus ipsius VA & ob CD=DE angulosque ad D rectos OR reflexus incidentis VR (§. 51), consequenter oculus O per radium OR videt imaginem objecti A in E.

Nec absimili modo ostenditur, eundem oculum O per radium reflexum OS videre imaginem objecti A in G & per radium reflexum OQ in I.

Et quoniam demissa catheto ex A in *a* factaque *ab*=A*a* eodem, quo ante modo, plures catheti ad utrumque speculum duci possunt, quas confusionis evitandæ gratia omittimus, eadem ratione ostendi posse apparet, quod oculus etiam videat imagines per illas determinatas.

Tot itaque oculus O intra angulum constitutus imagines videt, quot catheti imaginum loca determinantes & extra angulum terminatæ alternatim in specula vi §. 100. duci possunt. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

107. Quoniam loca imaginis prorsus determinantur ut in problemate 10 (§. 100); distantia quoque imaginis ab oculo viæ reflexionis æqualis est (§. 101).

COROLLARIUM 2.

108. Qualibet imago per tot reflexiones videtur, quota est in ordine, seu per quot cathetos determinatur. Ita imago C videtur per unam reflexionem in T; imago E per duplicem in V & R; imago quarta I per quatuor in M, N, P & Q.

COROLLARIUM 3.

109. Quoniam objecti A dextra radiant in speculum XY, sinistra in alterum XZ, imagines ex radiatione in speculum XY ortæ objecti partem dextram repræsentant; quæ vero ex radiatione in speculum XZ resultant, sinistram objecti partem spectandam exhibent. Unde si quis seipsum contuetur, faciem & tergum una videbit.

COROLLARIUM 4.

110. Quoniam plures catheti, quæ extra angulum terminantur, duci possunt, si angulus fuerit acutior; sub acutiori angulo plures videntur imagines ejusdem objecti.

SCHOLION 1.

111. *Quoniam ex demonstratione theorematis præsentis abunde intelligitur, quomodo in dato quolibet casu non modo*

modo numerus imaginum, verum etiam earum loca & puncta insuper atque via reflexionum determinari possint: supervacaneum fore arbitror, si ad varios casus speciales descenderem. Consultum autem videtur, ut problemata circa casus speciales constructurus, in peculiari schemate determinet imagines cum punctis reflexionum & via totius reflexionis, quæ ab irradiatione dextra oriuntur; in alio vero eas, quæ a sinistra resultant, ne linearum multitudo facile pariat confusionem. Ut experimenta sub quocunque angulo facile capere possis; duo specula ita compingi debent, ut instar libri ad arbitrium aperiri atque claudi possint. Specialia prolixe persequitur Zacharias Traber (d) *inter alia ostendens, ad tertiam circuli partem objecti imaginem videri posse vel semel, vel bis, aut etiam ter, vel nunquam; ad quartam ad summum ter; ad quintam quinquies, ordinarie quater aut rarius; ad sextam ad summum quinquies; ad duodecimam undecies.*

COROLLARIUM 5.

112. Quodsi specula verticaliter erecta ita contrahas aut ab iis tantisper recedas, vel ad angulum accedas, donec imagines prope angulum reflexæ coalescant, nec, si ita visum fuerit, amplius integræ compareant; imagines monstrosas prodire debere facile apparet.

SCHOLION 2.

113. *Ita specula ad angulum recto paulo majorem inclinata faciem intuenti monoculam sistunt; tres contra in eadem facie videbis oculos, nasos & ora duo, si angulus fuerit recto paulo minor. Sub minori angulo corpus tuum videbis biceps; sub angulo, qui recto paulo major ad distantiam 4 pedum capite truncatum, in majori distantia manus sine corpore.*

COROLLARIUM 6.

114. Quodsi ergo ulterius specula ita ad se invicem inclinata, ut imagines prope angulum coalescant; sic colloces, ut unum sit horizonti parallelum, alterum ad eam inclinatum; quoniam in horizontali imagines apparent eversæ (§. 57) & in inclinato horizontalium verticales, verticalium horizontales (§. 70. 71); plurimas adhuc alias anamorphoses fieri posse manifestum est. Immo monstrosæ quoque appareant necesse est imagines, si speculorum unum ad horizontem, alterum vero ad alterum inclinetur.

SCHOLION 3.

115. *Ita si speculum unum ad horizontem sub angulo obtusiore, e.gr. 144 graduum inclinetur, superius vero fuerit ad horizontem parallelum; videbis te capite ad pedes alterius stantis jacentem.*

SCHOLION 4.

116. *Hinc vero abunde patet, quomodo in cryptis hortensibus specula sint collocanda, ut ingredientis imaginem multis modis monstrosam exhibeant.*

(d) in Nervo Optico lib. 2. c. 4. & 5. f. 90. & seqq.

COROLLARIUM 7.

117. Quia ſpecula vitrea objecti lucidi imaginem bis reflectunt (§. 88), immo ſi crasſiora fuerint, pluries; ingens videbitur objecti multiplicatio, ſi intra angulum, quem duo ſpecula plana intercipiunt, candela accenſa collocetur.

PROBLEMA 11.

Tab. II. Fig. 20. 118. *Machinam catopricam conſtrucre, qua non modo ejusdem objecti imago varie multiplicari, verum etiam deformari poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Duo circuli AC & ND ita jungantur mediante axe EK, per centra utriusque tranſeunte, & fulcro quodam alio, ut ſint invicem paralleli atque figuram cylindri referant, cujus altitudo EK ſit altitudini, ſemidiameter KG vero latitudini ſpeculorum duorum æqualium æqualis.
2. Specula EFGK & EHIK ad axem EK ita aptentur, ut inſtar libri aperiri ac claudi posſint.
3. In baſi inferiori cylindri ND deſcriptus ſit circulus in 360 gradus diviſus, ut ſpecula ad angulum datum aperiri posſint.
4. Lateribus ſpeculorum anterioribus FG & HI afferruminentur laminæ orichalceæ tenuiores, ſi baſes ABC & ND orichalceæ fuerint, in formam ſuperficierum ſemicylindricarum efformatæ, aut ex charta ſpisſiore vel alia materia ſimile quid fiat, ut machina nonniſi anterius pateat, ubi ſpecula conſtituuntur.
5. Denique in M & L defigantur clavi aut annuli affigantur, ut ſpecula FG & HI commode a ſe invicem diduci posſint.

Ope hujus machinæ pro diverſa ſpeculorum apertura objectum varie multiplicari ac deformari posſe, ex ſuperioribus manifeſtum eſt (§. 106. 112. 114).

PROBLEMA 12.

119. *Ciſtulam catoptricam conſtruere, quam alia objecta replere videntur, ſi per aliud foramen inſpexeris.* Tab. II. Fig. 21.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex ligno vel alia materia ciſtula polygona, figuram prismatis multilateri habens, ABCDEF, & interius ſpatium per plana diagonalia EB, FC & DA in centro G ſe mutuo ſecantia dividatur in tot loculamenta triangularia, quot ciſtula habet latera.

2. Pla-

2. Plana diagonalia vestiantur speculis planis: in planis vero lateralibus fiant foramina rotunda per quæ in cistulæ loculamenta introspicere datur. Munienda autem sunt foramina vitris planis, intus quidem detritis, sed non lævigatis, ne in loculamentis posita distincte distingui possint.
3. In singulis loculamentis collocentur objecta diversa, quorum imagines a speculis sunt exhibendæ.
4. Operiatur denique cistula membrana tenui pellucida, ut lumini in eam aditus pateat.

Quoniam imagines objectorum intra angulos speculorum positorum multiplicantur & aliæ aliis remotiores apparent (§. 106): quæ unum loculamentum occupant, majus spatium replere videntur, quam integra cistula comprehendit. Quodsi igitur per unum foramen introspicias; nonnisi objecta in uno loculamento posita in speculis conspicies, sed quasi integram cistulam replentia. Per aliud vevo foramen introspiciens objecta in alio loculamento posita & ab illis diversa *per constructionem* denuo quasi per cistulam integram diffusa videbis. Et ita porro.

SCHOLION 1.

120. *Charta pergamena, qua teguntur istiusmodi machinæ catoptricæ, pellucida redditur, si aliquoties in lixivio valde claro semperque mutato & ultima tandem vice in aqua fontana eluatur, clavisque tabulæ ligneæ aut regulis ligneis affixa aeri exponatur, ut rursus exsiccetur. Quodsi colorem inducere volueris,* R. P. Zahn (e) *pro viridi commendat æruginem, addito pauxillo viridis saturi, aceto contritam; pro rubeo decoctum ligni Brasiliani; pro cæruleo succum myrtillorum; pro flavo decoctum ex baccis Rhamni mense Augusto collectis. Observat etiam, membranam super machinis expansam vernice aliquoties illini debere, ut splendida evadat. Utuntur etiam charta oleo illita.*

SCHOLION 2.

121. *Quodsi in cistula imagines monstrosæ apparere debent; facile id efficies* per corollaria 5. 6. 7 theorem. 26 (§. 112. & seqq.).

THEOREMA 27.

122. *Si duo specula* BC *&* DE *fuerint parallela & objectum in* A, *oculus in* O; *duæ videbuntur series imaginum in infinitum excurrentes.* Tab. III. Fig. 22.

DEMONSTRATIO.

Ducatur KH ad speculum ED

X 2 per-

(e) in Oculo artificiali fundam. 3. syntagm. 5. c. 4. technasm. 3. annot. 3. f. m. 723.

perpendicularis; erit eadem ad CB perpendicularis (§. 230. *Geom.*). Fiat DF = AD, & ex F in H indeque porro in infinitum transferatur duplum intervallum distantiæ speculorum BD, itemque ex A in G & inde porro in infinitum. Similiter fiat BI = BA & ex B in K transferatur ut ante dupla distantia speculorum BD & inde porro in infinitum, itemque ex A in L & inde porro in infinitum. Dico in speculo ED imaginem objecti A visum iri in F per reflexionem simplicem, in G per duplicem, in H per triplicem & ita porro: similiterque in altero speculo eandem apparituram in I per reflexionem simplicem, in L per duplicem, in K per triplicem, & quidem imagines, quarum distantia determinatur ex loco objecti A, exhibituras partem a speculo aversam, quæ vero ex punctis, cui specula insistunt, D & B determinantur, referre debere partem objecti speculo oppositam, nempe in F & H videbuntur anteriora, in G posteriora; contra in I & K posteriora, in L anteriora.

Quoniam AD = DF & anguli ad D recti *per construct.* erunt quoque *o* & *x* æquales (§. 179. *Geom.*), consequenter ob *x* = *y* (§. 156. *Geom.*) *o* = *y* (§. 87. *Arithm.*). Est igitur MO reflexus incidentis AM (§. 24), adeoque oculus per simplicem reflexionem videt objectum A in F (§. 51) & quidem eam partem, quæ speculo ED obvertitur, quia radius AM inde illabitur.

Ducatur ex G ad O recta OG & ex I ad P recta IP, junganturque puncta N & A recta NA. Quia BA = BI & anguli ad B recti *per constructionem*; patet ut ante, NP esse reflexum incidentis NA. Et quia AG = 2BD = 2BA + 2AD *per construct.* adeoque DG = 2BA + AD, & DI = AB + BI + AD = 2AB + AD, consequenter ID = DG (§. 87. *Arithm.*); eodem modo liquet esse OP reflexum incidentis PN. Videtur adeo objectum A per duplicem reflexionem N & P in O (§. 51) & quidem pars speculo CB opposita, quia radius AN inde illabitur.

Ducatur ex H ad O recta HO & ex L ad S recta LS, itemque ex R ad F recta RF, junganturque puncta A & Q recta QA. Quia AD = FD & anguli ad D recti *per construct.* patet ut supra, QR esse reflexum incidentis AQ. Et quia LA = 2BD = 2BA + 2AD, adeoque BL = BA + 2AD, & BF = BA + AD

+ AD + DF = BA + 2AD, consequenter BL = BF; erit quoque RS reflexus incidentis QR. Similiter quia DL = BL + BD = 2BD + AD & DH = HF + FD = 2BD + AD *per construct.* adeoque DL = DH; erit quoque SO reflexus incidentis SR. Videt itaque oculus O objectum A per triplicem reflexionem Q, R, S in H (§. 100) & quidem partem, quam speculo ED obvertit, quia radius AQ inde in speculum incidit.

Eodem prorsus modo ostenditur, quod in infinitis aliis punctis, quæ eodem modo determinantur in utroque speculo objectum A videri debeat. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

123. *Equidem cum per repetitas reflexiones lumen continuo minuatur atque altitudo speculi ad distantiam imaginum tandem evanescat; numerus imaginum infinitus non est: sufficit tamen, quod sit admodum ingens, ipsa experientia teste.*

COROLLARIUM 1.

124. Quoniam lumen per repetitas reflexiones minuitur, imagines vero remotiores videntur per plures reflexiones, quam viciniores (§. 122); imagines quoque remotiores sunt obscuriores vicinioribus.

COROLLARIUM 2.

125. Quodsi cistula construatur quadrata sub forma parallelepipedi & planis lateralibus agglutinentur specula plana, reliqua fiant ut superius in cistula polygona (§. 119); per foramen inspicienti objectum intus constitutum per amplissimum spatium multiplicatum apparebit.

SCHOLION 2.

126. *Jucundum imprimis spectaculum præbent objecta, quæ multiplicata unum continuum exhibent, e. gr. munimenta, hortos, campos aut silvas amplissimas, item res pretiosas, veluti poculum deauratum, gemmas, automata.*

SCHOLION 3.

127. *Potest quoque ex quinque speculis planis sub forma cubi construi machina Catoptrica, quæ objectum mire multiplicat, & qui theorias hactenus demonstratas animo comprehendit, haud difficulter variarum machinarum Catoptricarum constructiones excogitabit. Immo quia nunc etiam in Germania nostra specula 10 pedes alta & 5 pedes lata confici possunt, integrum aliquod conclave speculis vestire licet: quod ob mirificas reflexiones opus erit vere augustum.*

COROLLARIUM 3.

128. Quia imago F exhibet objecti A partem speculo ED oppositam, imago vero G alteram ab eodem aversam; si tergum speculo BC obvertas alterumque speculum ED, quod manu tenes, ita a latere illi obvertas, ut sit eidem parallelum; faciem & tergum in speculo ED una videbis.

SCHOLION 4.

129. *Quoniam objectorum quoad utramque superficiem, anteriorem & posteriorem, reflexio etiam contingit, si speculum unum ad alterum fuerit inclinatum; faciem & tergum simul in eodem speculo visurus uti potest speculis, quorum alterum ad horizontem inclinatur sub angulo acuto, alterum vero ad id rectum. Sed cum hujus rei demonstratio eodem prorsus modo fiat, quo huc usque alia similia demonstrata dedimus; eidem non immorabor.*

THEOREMA 29.

130. *Si plura specula* BC, DC, DE *&* EA *super peripheria alicujus polygoni regularis erigantur & ex medio* F *lateris* AB *incidat radius* FG *in medium* G *lateris* BC; *idem ab omnibus punctis mediis* H, I, K *laterum reliquorum* CD, DE, EA *reflexus redibit in* F, *viaque reflexionis* FGHIKF *est polygonum regulare alteri* ABCDEA *simile.*

Tab. II. Fig. 23.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BG = GC *per hypoth.* & $o = x$ (§. 24), atque B=C (§. 104. *Geom.*); erit △ HCG simile & æquale △ GBF (§. 251. *Geom.*). Sed FBG est triangulum æquicrurum *per hypoth.* Ergo etiam HCG est triangulum æquicrurum, consequenter GC=HC (§. 89. *Geom.*) & $y = x$ (§. 184. *Geom.*). Radius ergo FG ex G reflectitur in H punctum medium ipsius DC. Eodem prorsus modo ostenditur, GH ex H in I reflecti debere & ita porro. *Quod erat unum.*

Porro quia △ HCG & GBF æqualia & similia *per demonst.* adeoque sibi mutuo congruunt (§. 162. *Geom.*); erit FG=GH (§. 177. *Geom.*) & eodem modo constat esse etiam HI = IK = KF. Via igitur reflexionis est figura, cujus latera singula sunt inter se æqualia & numero totidem, quot figura ABCDEA habet latera. Quoniam vero $u + x + y = 180°$ (§. 140. *Geom.*) & $m + x + o = 180°$ (§. 148. *Geom.*), sed $o = y$ *per demonstr.* etiam $u = m$ (§. 91. *Arithm.*). Quare cum eodem modo ostendatur, angulos reliquos viæ reflexionis esse angulis D, E, A æquales; via reflexionis FGHIKF est polygonum alteri ABCDEA simile (§. 175. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

131. Quodsi objectum in quocunque puncto viæ reflexionis collocetur; videbitur ab oculo F in speculo AE.

COROLLARIUM 2.

132. Patet igitur, quomodo effici possit, ut muro aut alio quocunque objecto alio inter oculum & objectum in speculo spectandum interposi-

posito, idem videatur per reflexionem.

COROLLARIUM 3.

133. Si oculus fuerit in F, videbit seipsum per tot reflexiones, quot sunt latera polygoni, demto uno, in speculo AE.

PROBLEMA 13.

Tab. II. Fig. 23. 134. *Efficere, ut objectum positione datum videas in speculo ab oculo distare intervallo, quod sit multiplum desideratum distantiæ ab oculo extra speculum.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. objectum G distans ab oculo F intervallo duorum pedum: quæritur quot speculis opus sit & quomodo collocanda sint, ut oculus F videat ejus imaginem 8 pedum intervallo distantem.

1. Exponens rationis distantiæ objecti ab oculo ad distantiam imaginis 4 augeatur unitate.
2. Construatur super distantia objecti ab oculo FG polygonum regulare tot angulorum, quot numerus modo inventus habet unitates, nempe in nostro casu pentagonum FGHIK.
3. Circa hoc pentagonum describatur aliud ABCDE.
4. Collocentur specula in H, I & K.

Dico, objectum G visum iri ab oculo F in speculo AE distans intervallo 8 pedum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam radius GH ex H in I, ex I in K, ex K tandem in F reflectitur (§. 130); objectum G per radium FK ab oculo F videbitur in speculo AE (§. 131). Et quia viæ reflexionis HG + HI + IK + KF æquatur distantia imaginis ab oculo (§. 101); erit ea ad distantiam objecti ab oculo FG ut numerus angulorum polygoni regularis FGHIK unitate mulctatus ad unitatem, adeoque in dicta ratione. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

135. Quodsi ergo desideres, ut speculum planum intuens imaginem tuam post id distare videas intervallo desiderato; intervallum istud dividendum est in partes quotcunque æquales, e. gr. in quinque & super uno FG construendum polygonum regulare tot laterum, quot intervallo assignavisti partes, nempe in nostro casu pentagonum. Reliqua fiant ut in resolutione problematis.

COROLLARIUM 2.

136. Construi potest cistula catoptrica, in quam introspiciens videat objectum ad desideratam distantiam remotum.

PROBLEMA 14.

137. *Cistulam catoptricam construere,*

struere, in quam introspicienti objecta intus collocata appareant mire multiplicata & per vasta spatia diffusa.

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 21. 1. Construatur cistula polygona, prorsus ut in problemate 12 (§. 119), nisi quod interior cavitas in nulla loculamenta dividenda.

2. Plana lateralia CBHI, BHLA, ALMF, &c. vestiantur speculis planis & ad foramina abradatur stannum cum argento vivo, ut introspicere liceat.

3. In fundo MI collocentur objecta quæcunque, e.gr. avicula caveæ inclusa, quæ huc illucque volitans suaviter moduletur.

Dico per foramen *hi* introspicienti objectum quodcunque in fundo collocatum multiplicatum & inæqualibus ab oculo intervallis remotum visum iri.

DEMONSTRATIO.

Quodsi per problema 10 (§. 100) ex dato oculi & objecti situ in figura polygona, qualis est basis cistulæ, loca imaginum viamque reflexionis pro unaqualibet determines; omnia statim manifesta erunt: ut supervacaneum foret, demonstrationem superius jam sæpius repetitam denuo repetere.

SCHOLION 1.

138. *Quodsi conclave aliquod Principis figura multangularis construatur & parietes speculis majoribus vestiantur, super quibus vitra plana pellucida aptantur, ut lux intrare possit; eadem via, antequam construatur, phænomena ejus addiscere ac prædicere licet.*

SCHOLION 2.

139. *Quia specula parallela omnium maxime multiplicant objecta* (§. 130); *huic scopo tale polygonum omnium maxime convenit, quod planis terminatur parallelis, quale est prisma sexangulare. Quamobrem ut sint parallela, ad libellam & normam parietibus sunt affigenda* (§. 492. Geom.). *Quoniam vero specula plana objectum referunt tale, quale est* (§. 60); *speculorum quoque superficies exactam habere debet planitiem. Si enim a planitie recedit, figuram ejus deformat: id quod etsi in uncia reflexione parum nocet, iteratis tamen reflexionibus vitium formæ conspicuum efficit. Speculum quoque affixum esse debet januæ clausæ ut nullibi terminetur visus intra conclave stantis. Tectum tamen speculis vestiendum non est* (§. 95): *præstat fornicem cavum picturis exornari. Fenestrarum loco sunt aperturæ* Tab. II. Fig. 21. *oblongæ, vitriis planis munitæ, qualis in cistula catoptrica* hi. *Noctu si illuminetur conclave candelabro in medio suspenso & pluribus candelis instructo, magnifica prodeunt spectacula.*

CAPUT III.
DE
SPECULIS CONVEXIS SPHÆRICIS.

PROBLEMA 15.

140. *Specula vitrea convexa conficere.*

RESOLUTIO.

1. Stanni pars una & marchasitæ itidem pars una liquentur & masſæ liquefactæ addantur Mercurii partes duæ.
2. Quamprimum Mercurius (quod ſtatim accidit) in fumum abire parat; materia tota in aquam fontanam præcipitetur &, ubi frigefacta fuerit, aqua decantetur.
3. Tum masſa per linteum triplicatum aut duplicatum urgeatur &
4. Quod hac ratione a reliqua ſecernitur in ſphæræ vitreæ cavitatem infundatur.
5. Sphæra denique circa axem ſuum lente vertatur, donec integra ſuperficies obducta fuerit. Reliquum effuſum in futuros uſus ſervatur.

COROLLARIUM 1.

141. Quodſi ſphæræ fuerint coloratæ; ſpecula colorata habebis.

COROLLARIUM 2.

142. Eodem artificio ſpecula conica & cylindrica, itemque prismatica & pyramidalia formari posſe, manifeſtum eſt.

SCHOLION.

143. *Quomodo ex metallo ſpecula iſtiusmodi fiant, docemus in capite* 4 *de ſpeculis concavis.*

THEOREMA 30.

144. *In omni ſpeculo ſive plano, ſive curvo quomodocunque, cathetus obliquationis* FC *efficit inclinationem radii incidentis & reflexi* DCF *&* FCE *æqualem.* Tab. III. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Sit ſpeculum AB planum. Quoniam FC ad AB perpendicularis (§. 18); erit $o+y=u+x$ (§. 145. *Geom.*). Sed $o=x$ (§. 24). Ergo $y=u$ (§. 91. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Sit ſpeculum HCI curvum, ſive convexum, ſive concavum. Quoniam

niam punctum contactus C est in recta AB; reflexio eodem modo fieri debet tum in convexa, tum in concava superficie, ac si in recta AB contingeret. Sed si a speculo plano AB reflectitur, *y* & *u* sunt æquales *per demonstr.* Ergo æquales etiam sunt, si reflexio fit in speculo convexo, aut concavo. Quoniam vero recta FC ad tangentem perpendicularis etiam ad curvam normalis censetur; FC est cathetus obliquationis speculi curvi tum convexi, tum concavi (§.18). In utroque igitur efficit inclinationem incidentis & reflexi *y* & *u* æqualem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

145. Quoniam perpendicularis ad peripheriam circuli per centrum transit (§. 308. *Geom.*); in speculo sphærico sive cavo, sive convexo radius reflexus CE incidenti DC assignari potest, si ducta ex centro L per punctum incidentiæ C recta LF angulus FCE æqualis fiat ipsi FCD (§. 208. *Geom.*).

THEOREMA 31.

Tab. III. Fig. 24. 146. *In omni speculo sphærico catheti incidentiæ* DP, *obliquationis* FC *& reflexionis* EQ *per centrum* L *transeunt.*

DEMONSTRATIO.

Perpendicularis enim ad peripheriam circuli per centrum L transit (§. 308. *Geom.*). Sed catheti incidentiæ, obliquationis & reflexionis sunt ad eam perpendiculares (§. 16. 17. 18). Transeunt itaque per centrum L. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Catheti adeo incidentiæ DP, obliquationis FC & reflexionis EQ in centro L concurrunt.

THEOREMA 32.

148. *In speculo sphærico convexo* HCI *radius reflexus* EM *concurrit cum catheto incidentiæ* DL *& radius incidens* DN *cum catheto reflexionis* EL *inter tangentem* AB *& centrum* L. Tab. III. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Catheti incidentiæ, obliquationis & reflexionis sunt in plano reflexionis (§. 39) adeoque in plano, quod in puncto incidentiæ C speculum tangit (§. 38). Tangens AC cum catheto obliquationis FC rectum efficit (§. 308. *Geom.* & §. 146. *Catoptr.*), reflexus vero EC seu CM acutum *u*, adeoque inter tangentem AC & cathetum obliquationis CL cadit. Quare cum cathetus obliquationis CL & cathetus incidentiæ DL in centro L concurrant (§. 147); radius reflexus EM inter tangentem & centrum cathetum incidentiæ DL secare debet. Eodem modo ostenditur,

ditur, radium incidentem DN inter tangentem & centrum cum catheto reflexionis concurrere debere. *Q. e. d.*

THEOREMA 33.

Tab. III. Fig. 24. 149. *In speculis sphæricis angulus reflexionis mixtilencus* ECS *æqualis est angulo incidentiæ mixtilineo* DCR.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta AB arcum HCI tangens in C: erit ACD = ECB (§. 24). Concipiamus arcus RC & CS infinite parvos eosque æquales: erunt triangula PCR & QCS rectilinea æqualiumque arcuum tangentes PC & QC, itemque secantes PL & QL æquales (§. 12. 26. *Trig.*), consequenter ob RL = SL (§. 40. *Geom.*) PR = QS (§ 91. *Arithm.*). Ergo angulus PCR = QCS (§. 204. *Geom.*), consequenter DCR = ECS (§. 88. *Arithm.*). In speculis adeo sphæricis convexis angulus reflexionis mixtilineus &c. *Quod erat unum.*

Porro quoniam ACM = BCN (§. 24) & PCR = QCS *per demonstrata*: erit etiam SCN = RCM (§. 91. *Arithm.*). In speculis itaque sphæricis concavis angulus reflexionis mixtileneus &c. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 34.

150. *A diversis speculi convexi sphærici* AB *punctis non reflectuntur in idem punctum* D *radii ab eodem puncto* G *illapsi.* Tab. III. Fig. 25.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta FH per puncta F & E; erit DEH > DFH (§. 188. *Geom.*), adeoque multo magis DEB > DFE. Quare cum sit GEF = DEB (§. 149); erit quoque GEF > DFE (§. 89. *Arithm.*). Non absimili modo ostenditur, esse DFE > GEF: quod cum sit absurdum, a speculi sphærici convexi AB punctis diversis F & E in idem punctum D radii ab eodem puncto G illapsi reflecti nequeunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 35.

151. *Si oculi* G & H *fuerint in diversis planis: objecti imago videtur in concursu catheti incidentiæ* AF & *radii reflexi* GC *vel* HC. Tab. III. Fig. 26.

DEMONSTRATIO.

Imago objecti videtur, ubi radii reflexi ad utrumque oculum GC & HC concurrunt (§. 344. 345. *Optic.*). Quoniam vero radii HE & GD a diversis planis reflectuntur *per hypoth.* punctum concursus esse debet in communi sectio-

ne planorum. Cum itaque communis sectio sit cathetus incidentiæ (§.147); punctum concursus est in catheto incidentiæ, adeoque imago videtur in concursu catheti incidentiæ & radii reflexi. *Q. e. d.*

SCHOLION.

152. *Quoniam ordinarie puncti* D *&* E, *a quibus in utrumque oculum vel ejusdem oculi diversas pupillæ partes radii* DG *&* EH *reflectuntur, in diversis planis existunt; ideo tuto assumere licet, locum imaginis in speculis sphæricis convexis esse in catheto incidentiæ, ad demonstranda phænomena eorundem. Hoc adeo principio utentes constanter supponemus oculos esse in diversis planis reflexionis. Ubi vero esse debeat locus imaginis, si extraordinarie oculi in eodem plano existunt, deinceps disquiremus.*

THEOREMA 36.

153. ***In speculis sphæricis convexis una tantum videtur unius puncti imago.***

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 26. Imago videtur in concursu radii reflexi GC & catheti incidentiæ AC (§.151). Radiorum vero ab uno puncto A in speculum sphæricum convexum incidentium nonnisi unus AD ad idem punctum G reflecti potest (§.150). Ergo imago nonnisi unica videtur. *Q. e. d.*

THEOREMA 37.

154. ***In speculo sphærico convexo imago puncti radiantis apparet inter centrum & tangentem.***

DEMONSTRATIO.

Apparet enim in concursu radii reflexi & catheti incidentiæ (§.151). Sed radius reflexus cum catheto incidentiæ inter centrum & tangentem concurrit (§.148). Ergo inter centrum & tangentem imago apparet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Catheti ergo DR quantumvis magnæ imago est portio radii RM. Tab. III. Fig. 24.

PROBLEMA 15.

156. ***Data distantia puncti reflexionis a catheto seu arcu*** CR ***una cum angulo incidentiæ*** o ***&*** ***speculi sphærici convexi semidiametro*** CL, ***invenire distantiam imaginis a centro*** LM, ***itemque a superficie speculi*** MR ***&*** ***a tangente*** MP.

RESOLUTIO.

Ob datum arcum RC angulus MLC datur (§.57. *Geom.*). Et quia angulus incidentiæ *o* datur, inclinatio quoque incidentis *y* tanquam ejus complementum ad rectum, adeoque inclinatio reflexionis *u* (§.144), & hinc verticalis *u* (§.156. *Geom.*) datur. Qua-

Quare cum etiam detur radius CL *per hypoth.* invenietur LM (*§.* 36. *Trigon.*).

Sit e. gr. CL = 6 digitorum, RC = 30°, $o = 55°$; erit $u = 35°$, CML = 115°, adeoque

Log. Sin. CML	99572757
Log. CL	07781513
Log. Sin. MCL	97585913
	105367426
Log. ML	0.6794669,

cui in tabulis respondent 4″ 8‴.

Quodsi ML a radio LR subtrahatur, distantia imaginis a peripheria MR relinquitur.

E. gr. quia in nostro exemplo LR = 6″ & LM = 4″ 8‴; erit MR = 1″ 2‴.

Si denique MP desideretur, ex datis in triangulo PLC ad C rectangulo angulo L & latere CL invenitur PL (§. 36. *Trigon.*) & inde subtrahitur ML paulo ante inventa.

E. gr. in nostro exemplo erit

Log. Sin. P.	99375306
Log. CL	07781513
Log. Sin. tot.	100000000
Log. PL	0.8406207,

cui in tabulis quam proxime respondent 6″ 9‴. Inde si subducas ML = 4″ 8‴; prodibit MP = 2″ 1‴.

THEOREMA 38.

157. *In speculo sphærico convexo est cathetus incidentiæ* DL *ad distantiam objecti a tangente ad punctum reflexionis* C *ducta* DP *ut distantia imaginis a centro* ML *ad distantiam imaginis a tangente* MP. Tab. III. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$ (§. 24) & $x = m$ (*§.* 156. *Geom.*); erit etiam $o = m$ (*§.* 87. *Arithm.*), consequenter DP : PM = DC : CM (§. 269. *Geom.*) Ducatur DF ipsi CM parallela. Erit $u = p$ (*§.* 233. *Geom.*) adeoque ob $u = y$ (§. 144), $p = y$ (*§.* 87. *Arithm.*), consequenter DF = DC (*§.* 253. *Geom.*). Quamobrem cum sit DF [DC] : MC = DL : ML (*§.* 268. *Geom.*); erit DL : ML = DP : PM (§. 167. *Arithm.*), tandemque DL : DP = ML : PM (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

158. Quoniam DL > DP (§. 84. *Arithm.*), etiam ML > PM, adeoque multo magis ML > RM. Est igitur distantia imaginis a centro major, distantia vero a tangente minor dimidia semidiametri, vel quarta diametri parte.

COROLLARIUM 2.

159. Imago igitur tangenti AB quam centro L vicinior.

COROLLARIUM 3.

160. Quia DL : ML = DP : PM 157) & DL > ML (§. 84. *Arithm.*), etiam DP > PM. Major ergo est objecti, quam imaginis a tangente distantia.

COROLLARIUM 4.

161. Unde cum multo magis sit DR > RM; objectum D a speculo magis distat quam imago M.

THEOREMA 39.

Tab. III. Fig. 24. 162. *In speculo sphærico convexo distantia imaginis* PM *a tangente* AB *minor est distantia ejusdem a puncto reflexionis* C.

DEMONSTRATIO.

Est enim $m = x$ (§. 156. *Geom.*) & $o = x$ (§. 24), adeoque $m = o$ (§. 87. *Arithm.*). Sed $r > o$ (§. 188. *Geom.*): ergo $r > m$ (§. 89. *Arithm.*), consequenter MC > PM seu PM < MC (§. 189. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

163. Multo magis itaque RM distantia imaginis a puncto, in quo cathetus incidentiæ speculum secat, minor est MC distantia ejusdem a puncto reflexionis.

THEOREMA 40.

Tab. III. Fig. 24. 164. *Imago* M *in speculo convexo sphærico a centro* L *magis distat, quam a puncto reflexionis* C.

DEMONSTRATIO.

Quia ACL rectus (§. 308. *Geom*). adeoque DCL obtusus (§. 66. *Geom.*); erit DL > DC (§. 223. *Geom.*). Quare cum supra demonstratum (§. 157), ducta DF ipsi MC parallela esse DF = DC, sitque LM : MC = LD : DF (§. 268. *Geom.*); ob LD > DC *per demonstrata* > DF (§. 89. *Arithm.*) LM > MC. *Q. e. d.*

THEOREMA 41.

165. *Si arcus* BD *inter punctum incidentiæ* D *&* *cathetum* AB, *seu angulus* C *ad centrum speculi sphærici convexi a catheto incidentiæ* AC *& catheto obliquationis* FC *interceptus fuerit duplus anguli incidentiæ; imago* B *erit in superficie speculi.* Tab. III. Fig. 27.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $y = x$ (§. 156. *Geom.*) & u duplo angulo incidentiæ, hoc est, angulus incidentiæ & reflexionis junctim sumtis (§. 24) æqualis *per hypoth.* duplus vero angulus y cum duplo reflexionis angulo sit duobus rectis æqualis (§. 147. *Geom.*) erit $z = x$ (§. 239. *Geom.*). Cum adeo sit BC = CD (§. 253. *Geom.*); punctum B in superficie speculi existit (§. 471. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

166. *Si arcus* BD *inter punctum inci-*

Tab. III. Fig. 28. *incidentiæ* D *& cathetum* AB *interceptus, seu angulus* C *ad centrum speculi sphærici convexi a catheto incidentiæ* AC *& catheto obliquationis* FC *interceptus fuerit major duplo anguli incidentiæ; imago* G *erit extra speculum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus incidentiæ æqualis angulo reflexionis (§. 24), adeoque duplus angulus *y* cum duplo angulo incidentiæ duobus rectis æqualis (§ 147. *Geom.*); erunt anguli C, *x* & z simul sumti duplo angulo *y* sive *x* (§. 156. *Geom.*) una cum duplo anguli incidentiæ æquales (§. 240. *Geom.*). Est vero angulus C major duplo angulo incidentiæ *per hypoth.*. Ergo $x + z$ minor $2x$, consequenter z minor quam *x* (§. 92. *Arithm.*) seu $x > z$. Est igitur GC > DC (§. 188. *Geom.*). Cadit ergo punctum G extra sphæram (§. 471. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 43.

Tab. III. Fig. 24. 167. *Si arcus* RC *inter punctum incidentiæ* C *& cathetum incidentiæ* DR *interceptus, seu angulus* L *ad centrum speculi sphærici convexi a catheto incidentiæ* DL *& catheto obliquationis* FL *interceptus fuerit minor duplo anguli incidentiæ; imago* M *intra speculum apparet.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli *o, x, y* & *u* simul (§. 147. *Geom.*) & *u, i* & *n* simul itidem duobus rectis æquales sunt (§. 240. *Geom.*); erit $o + x + y + u = u + i + n$ (§. 87. *Geom.*). Sunt vero anguli verticales *u* æquales (§. 156. *Geom.*) & $x = o$ (§. 24). Ergo $2o + y = i + n$ (§. 91. *Geom.*). Jam vero $n < 2o$ *per hypoth.* Ergo $i > y > u$ (§. 144), consequenter CL > ML (§. 188. *Geom.*). Cadit ergo punctum M intra sphæram (§. 471. *Geom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

168. *En itaque regulas, juxta quas distinguere semper licet, utrum imago intra speculum, an in superficie ejus aut prorsus extra id comparere debeat, quæ in Catoptrica hactenus desiderata fuerunt. Ceterum cum radius reflexus admodum obliquus sit, si imago extra speculum apparere debet, ita ut* R. P. Dechales (f) *fateatur, se vix unquam objecti imaginem extra speculum spectare potuisse, adeoque vix quicquam certi statui posse concludat; ego jam in Elementis Catoptricæ Germanicis tale proposui experimentum, quo objecti imaginem extra sphæram esse clarissime agnoscitur. Filum argenteum nitore suo se commendans & instar normæ inflexum* ABC *ita speculo sphærico objeci,* Tab. III. Fig. 29.

(f) Catopt. lib. 2. prop. 18. f. 602. Tom. 3. Mundi Mathematici.

ci, ut crus AB *esset ad ejus superficiem valde obliquum. Oculus ex opposito constitutus contactum imaginis & fili* BA *clarissime conspexit, utut filum* BA *speculum non attingeret. Cumque imago & filum unum continuum constituant, moto filo movetur filum & imago instar unius rectæ.*

THEOREMA 44.

Tab. III. Fig. 30. 169. ***In speculo sphærico convexo punctum remotius* A *reflectitur a puncto* F *oculo* O *viciniore, quam vicinius quodlibet* B *in eadem catheto incidentiæ* AC *existens.***

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim, si fieri potest, punctum vicinius B reflecti in oculum O a puncto remotiori speculi H quam punctum remotius catheti A. Quoniam AH secat BE in I, punctum I & per radium OH ex H & per radium OE ex E ad oculum O reflectetur. Quod cum sit absurdum (§. 150), punctum catheti remotius A a puncto speculi remotiore H in oculum O reflecti nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

170. Quodsi adeo punctum objecti A a puncto speculi F & punctum objecti B a puncto speculi E reflectitur; omnia puncta intermedia inter A & B a punctis speculi intermediis inter F & E reflectentur: eritque adeo FE tota linea reflectens rectam AB.

THEOREMA 45.

171. ***Punctum vicinius* B, *quod cum remotiori* H *in eadem catheto non existit, a viciniori puncto speculi* D *reflectitur in oculum* O, *quam remotius* H.** Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Ponamus, si fieri potest, punctum remotius H reflecti a puncto viciniore K quam vicinius B. Quoniam HK secat incidentem BD in I; punctum I & a puncto speculi D per radium DO, & a puncto K per radium KO ad idem punctum O reflectetur. Quod cum sit absurdum (§. 150); punctum remotius H a puncto viciniore K reflecti nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

172. Quodsi ergo punctum objecti A a puncto speculi C & punctum objecti B a puncto speculi D in idem punctum O reflectuntur; omnia puncta intermedia inter A & B a punctis intermediis inter C & D reflectuntur.

COROLLARIUM 2.

173. Objecti igitur BA imago FG intra catheros BE & AE continetur.

THEOREMA 46.

174. ***In speculo sphærico convexo punctum vicinius catheti* B *majori intervallo* Cb *a centro* C *distare videtur quam remotius* A.** Tab. III. Fig. 30.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam punctum remotius A a puncto F catheto oculi OC viciniore, vicinius autem B a remotiore E reflectitur (§. 169); radius reflexus OF centro C vicinior est quam OE, adeoque cathetum incidentiæ AC in minori a centro C distantia secat quam OE. Quare cum quodlibet catheti punctum A vel B videatur in concursu radii reflexi O*a* vel O*b* cum catheto incidentiæ AC (§. 151): punctum A in minori distantia a centro C videtur quam punctum B. *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

Tab. III. Fig. 32. 175. *In speculo sphærico convexo imago minor est objecto.*

DEMONSTRATIO.

Reflectatur punctum A per radium EO & punctum B per radium DO in oculum O a speculo sphærico convexo. Ducatur per puncta reflexionis E & D recta FI; quæ repræsentet speculum planum. Dico a punctis E & D speculi plani non posse reflecti eadem puncta objecti A & B in oculum. Tangat KN speculum in puncto reflexionis E. Quoniam AEK = OEN (§. 24); AEF < OEN (§. 89. *Arithm.*), adeoque multo magis < OED, consequenter OE non est reflexus incidentis AE in speculo plano FI (§. *cit.*). Porro AEF > AMF & OMD > OEM (§. 188. *Geom.*) atque AEF = OEM (§. 24): ergo OEM > AMF (§. 89. *Arithm.*), & hinc multo magis OMD > AMF, consequenter OM non est reflexus incidentis A in speculo plano. Punctum itaque G, unde A in O a speculo plano FI reflectitur, cadit extra rectam ED. Quare cum eodem modo ostendatur, punctum quoque H, unde B in O reflectitur, extra eandem rectam ED cadere; objectum AB in speculo sphærico sub minore angulo EOD videtur quam in plano, in quo sub angulo GOH conspicitur: unde minus in sphærico, quam in plano apparere debet (§. 209. *Optic.*); sed in speculo plano imago objecto æqualis (§. 60). Ergo in convexo eodem minor. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

176. Speculorum adeo convexorum usus est in arte pictoria, si imago objecto minor delineanda.

SCHOLION.

177. *Falluntur itaque nonnulli veterum asserentes, in speculo sphærico diebus canicularibus sub aquis demerso vide-*

videri Sirium. Solis enim, non Sirii imago est, quæ apparet: nec tantum diebus canicularibus, sed omni tempore reliquo idem phænomenon spectatur.

THEOREMA 48.

Tab. III. Fig. 33. 178. *Imago objecti remotioris minor est quam viciniori in speculo convexo sphærico.*

DEMONSTRATIO.

Sit objectum AB=*ab*, & in C centrum speculi; erunt AB & BC punctorum A & B, *a*C & *b*C punctorum *a* & *b* catheti incidentiæ (§. 16) & angulus ACB < *a*C*b*. Quare cum imago intra cathetos AC & CB contineatur (§. 173) & prætereа remotiora a speculo centro C propiora spectentur (§. 174); imago remotioris AB minus spatium occupat, quam vicinioris *a b*: illa igitur hac minor videtur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

179. Accedentis itaque ad speculum convexum imago fit major, recedentis vero minor.

THEOREMA 49.

Tab. III. Fig. 34. 180. *In speculis convexis minoribus imago minor est quam in speculis majoribus.*

DEMONSTRATIO.

Sit C commune centrum speculorum EF & GH. Quoniam imago in utroque speculo intra cathetos AC & BC continetur (§. 173), & inter centrum atque tangentem apparet (§. 154) in speculo minori EF centro C erit propior, quam in speculo GH, adeoque in illo minor, in hoc major. *Q. e. d.*

THEOREMA 50.

181. *In speculo sphærico convexo sinistra apparent dextra & dextra sinistra.* Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Punctum enim B videtur in catheto BE & punctum A in catheto AE (§. 151). Dextra igitur dextris, sinistra sinistris respondent. Sed in visione directa adspectabilis dextra tuæ sinistræ & sinistra dextræ respondent, adeoque in speculo sinistra apparent dextra, dextra vero videntur sinistra. *Q. e. d.*

THEOREMA 51.

182. *Magnitudines ad speculum sphæricum perpendiculares videntur eversæ.* Tab. III. Fig. 30.

DEMONSTRATIO.

Punctum enim a speculo remotius A videtur centro propius in *a* & punctum speculo vicinius B a centro remotius apparet in *b* (§. 147). Extrema igitur B & *b* sibi mu-

mutuo opponuntur, adeoque imago *ab* magnitudinis ad speculum perpendicularis AB eversa apparet *Q. e. d.*

THEOREMA 52.

183. *Lineæ rectæ ad speculum convexum sphæricum perpendicularis imago est linea recta, lineæ vero ad speculum obliquæ vel eidem parallelæ imago est convexa.*

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 30. Si linea AB ad speculum perpendicularis; in catheto incidentiæ BC erit (§ 16). Sed quodlibet ejus punctum in catheto videtur (§. 151). Ergo imago ejus *ab* est linea recta. *Quod erat unum.*

Tab. III. Fig. 34. Si linea AB ad speculum GH vel parallela, vel obliqua; demissa ex C perpendiculari CD, erit CB > CD (§. 220. *Geom.*) adeoque cum sit CH = CI (§. 40. *Geom.*) BH > DI (§. 92. *Arithm.*). Punctum igitur B centro C propius videtur quam D (§. 174), consequenter linea AB convexa apparebit. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 53.

184. *In speculo sphærico convexo ab eodem oculo nonnisi una unius objecti imago videri potest.*

DEMONSTRATIO.

Videat oculus O, si fieri potest, duas imagines, alteram quidem per radium reflexum OA, alteram per reflexum OB. Ergo idem punctum objecti a diversis speculi punctis B & A reflectetur ad idem punctum O: Quod cum sit absurdum (§ 150), imagines ejusdem objecti plures in speculo convexo sphærico idem oculus videre nequit. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 35.

THEOREMA 54.

185. *Si plures radii reflexi* DB, CE *&c. fuerint in eodem plano; remotior* EC *catheto incidentiæ cum eadem in majore distantia a centro* FL *concurrit, vicinior* DB *in minore* GL. Tab. IV. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Concurrat uterque in eodem puncto G, si fieri potest. Ducantur ad puncta reflexionis B & C tangentes KB & IC: erit AK > AI. Quoniam AL : GL = AK : KG (§. 157. *Catopt.* & §. 173. *Arithm.*); si radius CE itidem in G cum catheto AL concurrit; erit etiam AL : GL = AI : IG (§. §. *cit.*). Est vero AK > AI: ergo & KG > IG, seu pars major toto. *Quod absurdum.*

Concurrat radius EC, si fieri potest, infra G in N cum catheto AL. Quoniam AL : GL = AK : KG & AL : LN = AI : IN (§. 157),

ſitque GL > NL *per hypoth.* erit AL : GL < AL : LN (§. 205. *Arithm.*) & hinc AK : KG < AI:IN (§. 89. *Arithm.*). Sed cum ſit AK > AI, erit AK : KG > AI : KG (§. 203. *Arithm.*) & ob KG < IN erit AI : KG > AI : IN (§. 205. *Arithm.*), conſequenter multo magis AK:KG > AI:IN. Habet igitur AK ad KG & minorem & majorem rationem quam AI ad IN. *Quod denuo abſurdum.*

Quoniam itaque radius EC nec in G, nec infra G cum catheto AL concurrit; ſupra G cum eadem concurrere debet, hoc eſt, in majore a centro diſtantia quam vicinior DB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

186. Qui ergo punctum A in ſpeculo convexo ſphærico per radium remotiorem EC videt, ei imago in majore a centro diſtantia FL apparet, quam qui idem per radium viciniorem DB cernit (§. 151).

SCHOLION.

187. *Hinc quo magis oculus a catheto incidentiæ verſus dextram aut ſiniſtram recedit, puncto* A *immoto, eo magis a centro* L *recedit & ad ſuperficiem accedit, immo tandem eandem egreditur imago: quod facile experiri datur.*

THEOREMA 55.

188. *Si duo oculi* D & E *fuerint in eodem plano, imago ante cathetum incidentiæ* AL *in* H *apparet.* Tab. IV. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Ibi enim videtur, ubi radii EC & DB a ſpeculo in oculum reflexi concurrunt (§. 346. 347. *Optic.*). Sed quia EC cathetum AL in majore a centro diſtantia FL ſecat, DB vero in minore GL (§. 185); erit radius DG in catheto infra radium EF, cum extra ſpeculum ſupra eundem exiſteret, adeoque DG & EF ante cathetum ſe neceſſario ſecant in H. (§. 50. *Geom.*). Imago igitur in H ante cathetum apparet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

189. *Atque hic eſt caſus ille rarior, de quo non valent, quæ ſuperius demonſtrata ſunt ex loco imaginis in catheto ſuppoſito.*

PROBLEMA 17.

190. *Specula convexa ita collocare, ut per multiplicem reflexionem videatur adſpectabile.*

RESOLUTIO.

1. Speculis planis quomodocunque diſpoſitis inveniantur puncta reflexionis in ſingulis (§. 100).
2. Specula convexa ita collocentur ut plana tangant in punctis refle-

reflexionum & plana removeantur.

Quoniam enim tum perinde a convexis reflectuntur, ac si a planis reflecterentur per multiplicem refractionem in speculis convexis factam adspectabile videbitur.

THEOREMA 56.

Tab. IV. Fig. 37. 191. *Radii a speculo sphærico reflexi magis divergunt, quam si a plano reflecterentur.*

DEMONSTRATIO.

Incidat ex A radius in B & reflectatur in C. Ducatur tangens HB per B, quæ repræsentat speculum planum, in quo AB eodem modo reflectitur ac in sphærico. Incidat porro in sphæricum radius AF, qui secabit tangentem in D, adeoque a plano speculo reflectetur in E via DE (§. 24). Per punctum F ducatur PL ipsi HB parallela & MN tangens speculum sphæricum in puncto incidentiæ F sitque OF radius reflexus super plano KL; erit angulus ADB = EDH (§. 24) = AFL (§. 233. *Geom.*) = OFP (§. 24) = OQH (§. 233. *Geom.*). Quodsi ergo radius AF reflecteretur a plano PL, reflexus OF foret ipsi ED parallelus (§. 255. *Geom.*) adeoque jam magis distaret a reflexo priore CB quam reflexus ED. Quoniam vero angulus incidentiæ AFN super tangente MN est minor quam super plano PL, nempe AFN < AFL (§. 84. *Arithm.*); sub minori quoque angulo reflectetur (§. 24), adeoque propior erit reflexus a tangente KF tangenti MF, quam reflexus a parallela OF parallelæ PF. Quare cum MF cadat infra PF (§. 50. *Geom.*); radius quoque KF infra OF cadere debet; consequenter quia OF a CB jam magis distat quam ED, multo magis KF a CB majore intervallo distabit quam ED, adeoque radii KF & CB magis divergunt, quam si a speculo plano reflecterentur (§. 84. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

192. Lumen igitur a speculo sphærico convexo reflexum debilitatur (§. 87. *Optic.*), adeoque reflexi effectus minores sunt, quam directi (§. 530. *Mechan.*).

COROLLARIUM 2.

193. Quoniam angulus CAD > CBD (§. 188. *Geom.*); radii magis divergentes AC & AD e propinquiori puncto A radiant, quam minus divergentes BC & BD. Cum igitur radii a speculo convexo sphærico reflexi fiant magis divergentes (§. 191); punctum reflexum veluti ex loco viciniore radiat, & hinc myo- Tab. IV. Fig. 38.

 pes

pes in speculo convexo distinctius vident remora, quam directe (§.384. & §.43. *Optic.*).

THEOREMA 57.

194. ***Radii reflexi a sphæra minore magis divergunt, quam si a majore reflecterentur.***

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 39. Sit radius AH ad utrumque speculum perpendicularis, hoc est, transeat per centra C & D (§.38. *Anal. infin.*), & in punctum E, quod est in utroque speculo, incidat radius AE. Ducantur ex C & D radii DG & CF. Quoniam inclinatio incidentis AEG = GDA + EAD & FEA = FCA + EAD (§. 239. *Geom.*); sed FCA > GDA (§. 188. *Geom.*); erit quoque FEA > GEA (§. 90. *Arithm.*), consequenter radius AE a speculo sphærico minore reflexus cadet ultra reflexum a majore (§. 144) & sic a radio AB magis diverget, quam si a majore reflecteretur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

195. Lumen igitur a sphæra minore reflexum magis debilitatur, quam si a majore reflectitur (§. 87. *Optic.*), adeoque in priori casu effectus ejus minores sunt, quam in posteriore (§. 530. *Mechan.*).

THEOREMA 58.

196. ***A quocunque puncto* G *portionis sphæræ conspicuæ* EGF *in oculum* A *reflecti potest radius; sed a nullo puncto portionis inconspicuæ* EDF.** Tab. VII. Fig. 62.

DEMONSTRATIO.

Sit oculus A & recta AD transeat per centrum, rectæ vero AB & CA tangant circulum maximum sphæræ EDFG in E & F; erit EGF portio sphæræ conspicua (§. 246. *Opt.*). Sumatur quodcunque punctum G & ex eo in oculum ducatur recta AG, sitque circulus DFGE planum reflectens. Ducatur in puncto G tangens HI & ex centro L recta LM, erit MGI angulus rectus (§. 309. *Geom.*), adeoque MGA recto minor, consequenter acutus (§. 66. *Geom.*). Quamobrem cum MGH sit itidem rectus (§. 145. *Geom.*); poterit KGM ipsi AGM æqualis fieri, atque adeo radius KG per radium GA reflecti potest in oculum A (§. 144). *Quod erat unum.*

Jam inter tangentes AF & AE atque circulum recta duci non potest (§. 304. *Geom.*), adeoque recta quæcunque ad punctum contactus ducta FN erit supra eandem. Quamobrem si cum tangente CF recto minorem facit CFN ipsiq; æqualis sit OFA & FN sumatur pro radio incidente; erit etiam reflexus

xus FO super tangente (§. 24), consequenter a puncto contactus F nullus in oculum A radius reflecti potest. Multo minus igitur reflectetur a portione sphæræ inconspicua EDF. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

197. Quoniam inter tangentem & peripheriam circuli recta nulla duci potest (§. 304. *Geom.*), visibilia vero per lineas rectas radiant (§. 46. *Optic.*); objectum intra conum truncatum BCFE constitutum non potest radiare nisi in partem sphæræ inconspicuam EDF, consequenter nullus in oculum A radius reflecti (§. 196), adeoque nec objectum istud videri potest (§. 42. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

198. Quamobrem si ex centro L ducatur cathetus infinita LP; pars ipsius LQ non videbitur (§. 197), partis vero QP imago partim extra (§. 166), partim intra speculum apparebit (§. 167).

CAPUT IV.

DE

SPECULIS SPHÆRICIS CONCAVIS.

PROBLEMA 18.

199. *Modulum pro speculis sphæricis concavis fundendis parare.*

RESOLUTIO.

1. Lutum exsiccatum & in pulverem contritum percribretur, ut arena & sordes separentur.
2. Pulvis per cribrum trajectus cum aqua commisceatur, & in pultem redactus per secerniculum secernatur.
3. Cum hac massa stercus equinum & pili vitulini concisi porro commisceantur, tamdiu subigenda, donec satis tenax deprehendatur. Addi etiam potest pulvis carbonum vel laterum contritorum percribratus.
4. Ex lapide arenaceo ruditer paretur duplex modulus, alter quidem convexus, alter concavus, & mediante arena madefacta tamdiu cavum super convexo atteratur, donec concavus congruat

gruat convexo: ita enim perfectam adipisceris figuram sphæricam. Consultum vero est, ut arena per cribrum trajiciatur, ne grana majora cavitates hinc inde causentur in superficiebus modulorum.

Tab. IV. Fig. 40. 5. Massa ante præparata ope ligni volutorii AB super tabula extendatur, donec eam nanciscatur crassitiem, quam speculum habere debet, & extensa pulvereque lateritio conspersa, ne adhæreat, modulo convexo superinducatur, ut speculi figuram induat.

6. Huic exsiccatæ & pinguedine illitæ denuo inducatur operculum ex eadem massa: quo ipso exsiccato

7. Utrumque sphæræ cavæ segmentum, quod ex luto confecisti, removeatur & rejecto interiore, quod speculi spatium replet, modulus lapideus pigmento aliquo ex creta & lacte præparato illinetur; operculum vero denuo imponatur.

8. Tandem commissuræ eodem luto, ex quo operculum formatum est, obducantur, modulus integer filis ferreis constringatur, & foramina duo efformentur, per quorum unum materia speculi fusa infundi, per alterum vero aër ex moduli cavitate expelli possit, ne speculum bullulis vitietur.

SCHOLION.

200. *Moduli tanta cum cura parari debent, ut speculorum figura sit vere sphærica.*

PROBLEMA 19.

201. *Speculum metallicum efficere.*

RESOLUTIO.

1. Liquentur cupri recentis partes octo, stanni Anglicani una, marchasitæ quinque.

2. Ferro calido materiæ liquatæ nonnihil eximatur: quod si frigefactum nimis rubet, plus stanni addatur, si nimis albicat, aliquid cupri adjiciatur, donec massa specularis conveniente gaudeat colore.

3. Tum massa modulo per problema præcedens præparato infundatur, quæ speculi figuram assumet.

SCHOLION 1.

202. *Alii 10 partibus cupri admiscent quatuor stanni Anglicani & aliquid antimonii & salis Ammoniaci, massamque tamdiu bacillo agitant, quamdiu fumus exhalat ab ore & naribus arcendus, quia venosus. Alii aliis*

aliis mixturis utuntur, *quales complures describunt* Schottus (f) & Zahnius (g).

SCHOLION 2.

203. *Specula hæc metallica vocari solent chalybea, quia probe polita chalybis politæ colorem æmulantur. Posse vero etiam ex chalybe parari, ex superioribus constat* (§. 89).

PROBLEMA 20.

204. *Specula metallica polire.*

RESOLUTIO.

1. Speculum fusum capulo ligneo pice agglutinetur &
2. Super modulo lapideo (§. 199) mediante aqua atque arena, & ubi extritum fuerit, sine arena atteratur, donec fuerit ad lævigandum aptum.
3. Lapideus modulus exsiccatus aut alter æqualis charta vestiatur, pulvere tripolitano & calce stanni illinenda.
4. Super hac speculum tamdiu teratur, donec splendore exquisito undiquaque refulgeat.

COROLLARIUM.

205. Non absimili modo specula vitrea poliuntur, nisi quod superficies convexa in modulo concavo expolienda.

SCHOLION.

206. *Si specula fuerint majora, super tabula firmata primum lapide arenoso, deinde pumice, inde arena subtili mediante vitro, quod capulo ligneo agglutinatum, teruntur, tandem calce stanni & pulvere tripolitano corio madido insperso fricantur.*

PROBLEMA 21.

207. *Speculum vitreum concavum terminare.*

RESOLUTIO.

1. Paretur modulus concavus ex gypso, cujus superficiei concavæ convexa speculi congruit.
2. Reliqua fiant ut in probl. 3. (§ 49).

THEOREMA 59.

208. *Si inclinatio Radii* KI *in speculum sphæricum cavum* EI *incidentis & axi* AB *paralleli fuerit* 60 *graduum; radius reflexus* IB *cum axe* AB *in ipso speculi polo* B *concurrit.* Tab. IV. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $m = 60°$ *per hypoth.* erit etiam $n = 60°$ (§. 144), & quia KI axi AB parallela *per hypoth.* etiam $i = 60°$ (§. 133. *Geom.*) consequenter $u = 60°$ (§. 240. *Geom.*) atque hinc BI radio CI æqualis (§. 254.

(f) Magiæ Catoptr. part. 1. lib. 6. pragm. 4. p. 266. & seqq.
(g) in oculo artific. fundam. 3. synt. 3. c. 10. §. 9. prax. 4. f. m. 631. & seqq.

(§. 254. *Geom.*). Punctum igitur B, in quo radius reflexus I B cum axe concurrit, est in ipsa superficie speculi (§. 356. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

Tab. IV. Fig. 41. 209. *Si radii* HE *in speculum concavum sphæricum* EI *incidentis & axi* AB *paralleli inclinatio fuerit 60 gradibus minor; reflexus* EF *cum axe* AB *concurrit ad distantiam* BF *quarta diametri parte minorem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$ (§. 144) & ob parallelismum rectarum HE & AB $o = y$ (233. *Geom.*); erit etiam $x = y$ (§. 87. *Arithm.*) & hinc FE = FC (§. 253. *Geom.*). Est vero CF + EF > EC (§. 190. *Geom.*) & CE = CB (§. 40. *Geom.*): ergo CF + FE > CB (§. 89. *Arithm.*), consequenter CF > FB (§. 92. *Arithm.*), hoc est, FB minor est dimidia radii CB aut quarta diametri parte. *Q. e. d.*

THEOREMA 61.

Tab. IV. Fig. 41. 210. *Distantia* FC *puncti* F, *ubi radius* HE *in speculum sphæricum cavum* EI *incidens & axi* AB *parallelus cum eodem concurrit, a centro* C *est ad dimidium radium* CD *in ratione sinus totius ad Cosinum inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione theorematis præcedentis patet, esse FE = FC. Quare si ex F demittatur perpendicularis FD; erit DC = ½ CE (§. 184. *Geom.*). Quodsi vero CF sumatur pro sinu toto, erit CD sinus anguli DFC (§. 2. *Trigon.*) seu cosinus anguli DCF (§. 11. *Trigon.*), hoc est, inclinationis DEH (§. 233. *Geom.*). Est itaque CF ad CD ut sinus totus ad cosinum inclinationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA 22.

211. *Determinare rationem, quam habet portio axis, cum quo radii paralleli a toto speculo sphærico concavo reflexi concurrunt, ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Cosinus inclinationis radii extimi subtrahatur a sinu toto; relinquetur OF differentia inter dimidium radium & puncti F, ubi radius extimus cum axe unitur, a centro C distantiam (§. 210).
2. Quodsi ergo per OF duplum cosinus istius, hoc est, EC (§. cit.) dividas; quotus exprimit, quanta radii pars sit OF.

Quare cum portio axis, cum qua radii paralleli sub inclinatione 60 gra-

gradibus minore concurrunt, ſit eidem propemodum æqualis (§. 209); ratio ejus ad radium eſt ut unitas ad quotum inventum.

E. gr. Sit inclinatio triuum graduum: erit

CF = 10000000
CD = 9986295
OF = 13705
CE = 19972590 (1457
13705
62675
54820
78559
68525
100340
95935
4405

Nempe OF eſt $\frac{1}{1457}$ radii. In ſpeculo itaque ſphærico concavo, cujus latitudo 6 gradus ſubtendit, radii paralleli poſt reflexionem uniuntur cum portione axis, quæ parte milleſima quadringenteſima quinquageſima ſeptima minor exiſtit. Eodem modo reperitur, ſi inclinatio fuerit 6, 9, 12, 15, 18 graduum; eſſe OF $\frac{1}{363}$, $\frac{1}{160}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{58}$, $\frac{1}{38}$ radii, hoc eſt, portionem axis, cum quo radii paralleli a ſpeculo ſphærico cavo reflexi concurrunt, eſſe minorem $\frac{1}{363}$, $\frac{1}{160}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{58}$, $\frac{1}{38}$, ſi latitudo ſpeculi ſubtendat arcum 12, 18, 24, 30, 36, graduum.

COROLLARIUM 1.

212. Quoniam itaque radii per totam ſpeculi ſuperficiem diſperſi in anguſtum admodum ſpatium poſt reflexionem coarctantur; lumen radiorum parallelorum per reflexionem a ſpeculo ſphærico concavo valde intenditur (§. 89. *Optic.*), nempe in ratione duplicata latitudinis ſpeculi & diametri circuli, in quo radii omnes uniti continentur (§. 409. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

213. Cum radii ſolares ſint paralleli (§. 93. *Optic.*); eorum vires per reflexionem a ſpeculo concavo ſphærico valde intenduntur (§. 209), adeoque non mirum, quod lignum aliaque inflammabilia accendant & liquabilia liquefaciant.

SCHOLION 1.

214. Specula *concava ſphærica inde* cauſtica *ſeu* uſtoria *appellari ſolent: locus autem, in quo incendium excitatur*, Focus *dicitur. Apparet autem erraſſe* Euclidem *& cum eo veteres in univerſum, dum focum in centro eſſe credidere.*

COROLLARIUM 3.

215. Quoniam focus ibi eſt, ubi radii arctiſſime uniuntur; ſi majoris fuerit ſphæræ ſegmentum, latitudo arcum 18 gradibus haud majorem ſubtendere debet; ſi vero fuerit ſphæræ minoris ſegmentum, ad ſummum arcum 30 graduum.

SCHOLION 2.

216. Kircherus *ſane* (h) *ſpecula cauſtica omnium optima deprehendit, quorum latitudo arcum* 18 *gradibus haud majorem ſubtendit, experientia adeo demonſtrationi conveniente.*

COROLLARIUM 4.

217. Quia ſuperficies ſpeculi, quod majoris ſphæræ ſegmentum eſt, plures radios excipit, quam quod minoris exiſtit, ſi utriusque latitudo arcum 18 graduum ſubtendat, vel etiam aliquanto majorem, vel minorem, ſed æqualem tamen; effectus quoque ſpeculorum majores ſunt, quam minorum.

COROLLARIUM 5.

218. Quia focus intra quartam & quintam diametri partem continetur (§. 209. 211); ſpecula, quæ ſunt majoris ſphæræ ſegmenta, ad majorem diſtantiam urunt, quam quæ ſunt ſegmenta minoris.

COROLLARIUM 6.

219. Quoniam denique uſtio a radiorum unione (§. 212. 213), unio radiorum a figura concava ſphærica pendet (§. 209); mirum ſane non eſt, quod etiam ſpecula lignea deaurata & quæ ex gypſo parantur atque auro obducuntur, immo etiam ex charta confecta & ſtramine obducta, urant.

SCHOLION 3.

220. *Apud veteres celebrantur ſpecula* Archimedis *atque* Procli: *quorum ille naves Romanorum, duce* Marcello *Syracuſas obſidentium*, Zonara (i), Tzetze (k) & Galeno (l) *aliisque antiquioribus, quos* Tzetzes *citat, auctoribus; hic vero, referente denuo* Zonara (m) *claſſem* Vitaliani *Byzantium obſidentis ſpeculo cauſtico incendit. Enimvero cum diſtantia foci in ſpeculo ſphærico concavo quartam diametri partem non excedat*, Archimedeum *autem ad diſtantiam* 30 *paſſuum (re ab* Athanaſio Kirchero *Syracuſas transeunte examinata) vim ſuam uſtoriam extendere debuerit* (n), *& latitudo foci perquam exigua exiſtat; ſpeculo cauſtico præſtari nequit, quod* Archimedes *atque* Proclus *feciſſe perhibentur. Quoniam vero nec difficultate carent, quæ de reflexione radiorum ſolarium a pluribus ſpeculis planis in eundem locum factis ſuſpicatur* Kircherus, *aut alii de ſpeculis parabolicis prodiderunt; ideo plurimis inter commenta referenda videntur, quæ veteres incerta fama deluſi de ſpeculis* Archimedis *atque* Procli *commemorant.*

SCHOLION 4.

221. *Inter ſpecula recentiora eminent* Septalianum, Villetanum *&* Tshirnhuſianum. *Nimirum* Manfredus Septala, *Canonicus Mediolanenſis,*

(h) in Arte magna lucis & umbræ lib. 10. part. 3. c. 1. pragm. 2.
(i) Annal. Tom. 2. p. 83.
(k) variarum hiſtoriarum chiliad. 2. hiſt. 35. p. 22.
(l) de temperamentis lib. 3. c. 2.
(m) Annal. Tom. 3. p. 46.
(n) vid. Schottus in Magia univerſ. part. 1. lib. 7. ſyntagm. 5. §. 3. p. 417.

ſis, teſte Schotto (o), *ſpeculo parabolico ad* 15 *ac* 16 *fere paſſuum diſtantiam aſſeres combusſit*. Viletti, *artificis Lugdunenſis Galli, ſpeculum unum a* Tavernierio *emtum & Regi Perſarum oblatum eſt ; ſecundum ſuis ſumtibus ſibi comparavit Rex Daniæ ; tertium denique munificentia Regis Galliarum dignum fuit judicatum. Eorum effectus prædicantur ſequentes* (p): *Lignum viride in momento ignem concepit; minutia ferri ex lebete reſoluta lique facta deſtillavit* 40 *minutorum ſecundorum ſpatio ; nummus* 15 *ſolidorum Gallicorum perforatus eſt* 24 *ſecundis, calculus oricbalceus perforatus eſt* $\frac{6}{16}$ *ſecundi, fruſtum laterculi quadrati ex camera vitrificatum eſt in guttam vitri* 45 *ſecundis, chalybs perforata eſt* $\frac{8}{18}$ *unius ſecundi, lapis mineralis, qui ſclopetis ad excitandum ignem affigitur, vitrificatus eſt minuto uno, fruſtum cæmenti vitrificatum eſt* 52 *ſecundis. Latitudo ſpeculi iſtiusmodi effectibus nobilitati erat* 30 *digitorum, latitudo foci ſemiaureum Ludovici adæquabat, tres circiter pedes a centro diſtantis. Denique de* Tshirnhuſiano, *quod omnibus palmam præripit, ſequentia annotantur in Actis Eruditorum, quæ Lipſiæ publicantur* (q): „ 1. Admotum foco ſpe- „ culi lignum momento flammam „ concipit, quam ne ventus quidem „ valentior facile extinguat. 2. Aqua „ intra vaſculum figulinum ei appli- „ catum extemplo effervescit, ut ova „ injecta ſtatim fiant edulia: retento „ ibidem parumper vaſculo, aqua „ omnis evaporat. 3. Maſſa ſtanni „ plumbive, tres pollices craſſa, ſi- „ mul ac foco admovetur, guttatim „ liqueſcere, pauloque ibi detenta „ continuo fluere incipit, donec ſpa- „ tio 2 aut 3 minutorum plane per- „ terebretur. 4. Lamina ferrea aut „ chalybea foco admota, in averſa a „ ſpeculo ſuperficie, qua parte fo- „ cum contingit, illico candeſcere „ conſpicitur, pauloque poſt in fora- „ mina dehiſcit: quorum tria intra „ ſex minuta horaria laminæ inuſta. „ Nec minus 5. cuprum, argentum „ &c. foco admota colliqueſcunt, „ e. gr. unciali Saxonico idem, quod „ laminæ ſupra memoratæ contigit. „ 6. Quæ liquefactioni obnoxia non „ ſunt, ut lapides, lateres &c. brevi „ inſtar ferri igniti candefiunt. 7. „ Ardoſia e veſtigio candeſcit & in- „ tra pauca minuta in vitrum nigrum „ non inelegans transmutatur: cujus „ ſi pars aliqua candeſcens forcipula „ prehenſa detrahatur, in fila vitrea „ ſimul diducitur. 8. Tegulæ, in- „ tenſisſimum ignis æſtum alias per- „ peſſæ, exigui temporis lapſu in „ vitrum flavum deliqueſcunt: „ quemadmodum & 9. teſtæ ex ol- „ lis non ſolum probe percoctis, „ ſed multo etiam ignis admoti uſu „ duratis, in vitrum nigroflavum. „ 10. Pumex montium, ut vocant in

 offi-

(o) in Magia Univerſ. part. 1. lib. 7. §. 6. p. 418.

(p) in Tranſact. Anglic. n. 6. p. 95. & in Diario litteratorum Pariſino A. 1679. menſ. Decemb. p. 322.

(q) A. 1687. menſ. Jan. p. 52.

„ officinis, ignivomorum ustus so- „ lari hoc igne in vitrum candidum „ & pellucidum funditur. 11. Cru- „ cibuli solidissimi pars foco expo- „ sita intra 8 minuta in vitrum con- „ flata est. 12. Ossa in vitrum ali- „ quod opacum & gleba ex terra ex- „ cisa in flavum aut subinde nigrum „ mutata. *Latitudo speculi erat trium fere ulnarum Lipsiensium: & ex lamina cuprea constabat vix duplo crassiori dorso cultri communis. Focus duabus ulnis a speculo distabat. Ad speculorum* Tschirnhusianorum *imitationem artifex quidam insignis* Gærtnerus *Dresdæ specula caustica majora ex ligno confecit, quæ non minores produxerunt effectus non sine multorum admiratione.*

SCHOLION 5.

222. Zacharias Traberns (r) *docet, quomodo ex auro strepero specula caustica confici queant. Scilicet a tornatore fieri debet speculum ligneum concavum & pice cerata æqualissime tingi, aurum denique in quadrata duorum digitorum vel trium scissum per frustra agglutinandum, adhibitis si opus fuerit carbonibus. Imo* (s) *specula majora fieri posse notat ex cavorum speculorum aut vitri quadratis frustis* 30, *aut* 40 *vel pluribus, in scutella tornata lignea decenter connectendis, eorumque effectum non multo minorem esse, quam si superficies continua esset.*

SCHOLION 6.

223. *Speculum ex charta duriori & stramine eidem agglutinato A.* 1699. *Viennæ confecit* Neumannus *quidam Ingeniarius, quo omnia metalla in fluorem reduxit,* Zahnio *referente* (t).

THEOREMA 62.

224. ***Si lumen constitutum sit in foco* F *speculi sphærici concavi* E I *radii post reflexionem sunt paralleli.*** Tab. IV. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Radii enim paralleli per reflexionem in foco uniuntur (§. 209). Sed si lumen sit in foco F, qui ante erat radius reflexus EF nunc erit incidens, & qui ante incidens erat, nunc fiet reflexus EH. Erit itaque reflexus HE axi AB, hoc est, omnes reflexi erunt inter se paralleli (§. 231. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

225. Lumen igitur intensum ad insignem distantiam projicitur candela accensa in foco speculi concavi constituta (§. 86. *Optic.*), non tamen ad infinitam (§. 92. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

226. Quodsi ergo radii paralleli alio speculo concavo denuo excipiantur;

(r) in Nervo Optic. lib. 2, c. 12. prop. 5. cor. 1. f. 127.
(s) loc. cit. cor. 2. f. 128.
(t) in Oculo artific. fundam. 3. syntagm. 3. cap. 10. f. m. 634.

antur; in foco post reflexionem iterum concurrent atque urent.

SCHOLION.

227. *Experimento id comprobatum Viennæ teste* Zahnio (u), *ope duorum speculorum concavorum ex lamina orichalcea confectorum. Majus erat 6, minus 3 pedum, distantia eorundem 20 vel 24 pedum. In foco majoris constituti erant carbones candentes, in foco minoris ignitabulum cum filo sulphureo candelæ circa apicem circumligatum. Radii carbonum reflexi candelam accendebant.*

THEOREMA 63.

Tab. IV. Fig. 42. 228. *Si lucidum intra focum* F *& speculum* CH *constituitur; radii post reflexionem ab axe* BA *divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Si lucidum esset in F, radius reflexus CE foret axi BA parallelus (§. 224), adeoque eandem ab axe constanter distantiam servaret (§. 81. *Geom.*). Quoniam vero DCG > FCG; erit etiam KCG > ECG (§. 144), adeoque CK ultra CE cadit, consequenter axi parallela esse nequit (§. 260 *Geom.*), cumque ultra parallelam cadentis distantia ab axe continuo augeri debeat (§. 81. *Geom*), ab axe AB divergit (§. 84. *Geom.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

229. Lumen itaque per reflexionem debilitatur (§. 87. *Optic.*).

THEOREMA 64.

230. *Si lucidum inter focum* F *& centrum* G *constituitur; radii post reflexionem cum axe concurrunt ultra centrum.* Tab. IV. Fig. 42.

DEMONSTRATIO.

Si lucidum esset in foco F, radius reflexus HL foret cum axe BA parallelus (§. 224), adeoque ab eo eandem constanter distantiam servaret (§. 81. *Geom.*). Quoniam vero IHG < FHG; erit etiam GHA < GHL (§. 144), adeoque reflexus HA a parallela versus axem recedit, consequenter cum eidem parallelus esse nequeat (§. 260. *Geom.*), sed potius a parallela HL recedentis distantia ab axe continuo imminui debeat (§. 81. *Geom.*), cum axe BA convergit, tandemque concurrere debet (§. 89. *Geom.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

231. Quodsi lucidum ponatur in A, qui ante erat radius reflexus AH nunc fiet incidens, adeoque qui ante erat incidens IH nunc fiet reflexus (§. 144). Si ergo lucidum ultra centrum G constituitur; radii post reflexionem

(u) loc. cit. syntagm. 5. c. 6. artif. 12. p. 753.

nem cum axe inter focum F & centrum G concurrunt.

COROLLARIUM 2.

232. Hinc si candela ponatur in I, ejus imago apparet in A; si vero candela accensa constituatur in A, imago ejus apparet in I, in punctis vero inter I & A sectio luminis est circulus, tanto quidem major, quo puncto concursus vicinior.

THEOREMA 65.

233. *Si corpus luminosum in centro speculi sphærici concavi ponatur, radii omnes reflectuntur in seipsos.*

DEMONSTRATIO.

Incidunt enim in speculum perpendiculares (§. 38. *Analys. infin.*), adeoque in seipsos reflectuntur (§. 25). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

234. Hinc si oculus in centro speculi ponitur, seipsum confuse videt per totum speculum.

THEOREMA 66.

235. *In speculo sphærico concavo oculus seipsum non videt nisi per diametrum.*

DEMONSTRATIO.

Oculus seipsum videre nequit nisi per radium, qui in seipsum reflectitur. Quamobrem cum radii perpendiculares tantum in seipsos reflectantur (§. 25), ad speculum autem perpendiculares sint diametri (§. 38. *Anal. inf.*); oculus seipsum non videt nisi per diametrum. *Q. e. d.*

THEOREMA 67.

236. *Si duo oculi aut diversæ ejusdem pupillæ partes fuerint in diversis planis reflexionis; objecti imago videtur plerumque in concursu catheti incidentiæ & radii reflexi, aliquando tamen extra cathetum apparet, si nempe oculus speculo valde vicinus & objectum ultra centrum ab eodem removetur.*

DEMONSTRATIO.

Imago objecti videtur, ubi radii reflexi ad utrumque oculum vel diversas pupillæ ejusdem oculi partes concurrunt (§. 344. *Optic.*). Quoniam vero iidem a diversis planis reflectuntur *per hypoth.* punctum concursus esse debet in communi sectione planorum. Cum itaque communis sectio sit cathetus incidentiæ (§. 146), si radii reflexi concurrunt, punctum concursus est in catheto incidentiæ, consequenter imago videtur in concursu catheti incidentiæ & radii reflexi. *Quod erat unum.*

Si objectum FE ultra centrum C a speculo removetur, catheti incidentiæ FG & ED ab extremis pun- Tab. IV. Fig. 43.

punctis F & E ductæ se mutuo in centro C intersecant (§. 146), adeoque post intersectionem cathetus puncti superioris F deorsum, cathetus vero inferioris E sursum tendit, consequenter si objecti imago post speculum apparet, atque in concursu catheti incidentiæ & radii reflexi videtur, inversa apparere debet. Enimvero si oculus prope speculum fuerit constitutus, experientia teste, imago post ipsum situ erecto conspicitur; videtur ergo in hoc casu extra cathetum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

237. Si objectum in foco fuerit collocatum, radii post reflexionem fiunt paralleli tum inter se, tum axi (§. 224). Cum adeo nec inter se, nec cum axe seu catheto incidentiæ concurrant; in speculo objectum hoc in casu videri nequit.

SCHOLION.

238. *Non difficultate caret doctrina de loco imaginis in speculis sphæricis non minus convexis, quam concavis. Quoniam enim diversa plana reflexionis in plano eodem commode delineari nequeunt; neque facile demonstrari potest, ubinam radii ab eodem puncto in speculum illapsi & ad diversas pupillæ partes reflexi concurrant. Unde quod plerisque phænomenis satisfacit, assumitur, imaginem nempe esse in concursu catheti incidentiæ radii reflexi.*

THEOREMA 68.

239. *Si radius ex puncto catheti* h *incidens in speculum convexum* hF *& reflexus* IF *intra speculum continuentur; erit* FH *incidens ex puncto catheti* H *in concavum &* FO *reflexus ejusdem.* Tab. IV. Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Est enim $hFE = IFM$ (§. 24). Sed $hFE = MFO$ & $IFM = EFH$ (§. 156. *Geom.*). Ergo $MFO = EFH$ (§. 87. *Arithm.*). Quodsi itaque FH sumatur pro incidente ex puncto H; erit FO reflexus (§. 24). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

240. Quoniam punctum catheti H est imago puncti *h* in speculo convexo (§. 151); punctum vero *h* imago puncti H in concavo (§. 236. & 239): si imago objecti a speculo convexo reflexi videretur per reflexionem in concavitate factam, instar objecti ipsius cerneretur.

COROLLARIUM 2.

241. Cum catheti infinitæ imago in speculo convexo sit quarta diametri parte minor (§. 155. 158); catheti quarta parte diametri minor portio in speculo concavo quantumvis magna apparere potest.

COROLLARIUM 3.

242. Punctum igitur intervallo minore quarta diametri parte a speculo concavo remotum intervallo

quantumvis magno post speculum apparere debet.

SCHOLION 1.

243. *Videntur equidem hæc experientiæ contraria: quoniam sensuum judicio imago in speculo plano longius distat, quam in concavo, in plano autem tanto intervallo post speculum apparet; quanto objectum ab eodem removetur* (§. 56). *Enimvero majorem esse in concavo, quam in plano distantiam, clarissime apparet in speculis vitreis, quorum exterior superficies plana, interior vero concava. Parantur scilicet ex vitris plano convexis in convexitate terminatis. Quodsi intra focum & speculum candelam statuas accensam, videbis in speculo duplicem imaginem, alteram claviorem & majorem, quæ a superficie concava reflectitur, alteram vero obscuriorem & minorem, quæ a superficie plana reflectitur. Illa vero majori intervallo post speculum quam hæc distat. Unde jucundum exhiberi potest spectaculum ligni in speculo ardentis, quod tamen extra speculum non ardet. Nimirum si inter candelam accensam & speculum collocetur ligni frustum longius, quam latius, ut sit in catheto flammæ; ligni tantum imago unica cernitur, utpote objecti obscurioris, quæ a speculo concavo reflectitur, aleoque per flammam priorem transit, quæ quasi ex eo erumpere videtur, ut adeo lignum in speculo continuo ardeat, nec tamen comburatur. Quod vero imago exiguo admodum intervallo post speculum distare videtur, ratio hæc est, quia major est objecto nec plura objecta eidem contigua una exhibentur. Cum adeo ex objectis interpositis de distantia judicium fieri nequeat & magna atque distincta videntur vicina* (210. 314 Optic.); *non mirum, quod exigua admodum imaginis a speculo distantia credatur. Illico tamen magna apparebit, si stylum quendam longiorem, quarta tamen diametri parte minorem, inter objectum & speculum statuas, qui sit in catheto aliqua.*

COROLLARIUM 4.

244. Quoniam imago objecti quantumvis latæ in speculo convexo inter duas catheros incidentiæ punctorum extremorum continetur (§. 236); si objectum inter duas catheros in distantia minore diametri parte quarta statuatur, latitudo imaginis quantumvis magna apparere potest (§. 241).

COROLLARIUM 5.

245. Cum itaque objecti inter duas catheros in distantia minore diametri parte quarta collocati imago & latitudinem, & altitudinem justa majorem, immo quantumvis magnam habere possit (§. 241. 244); objecta inter focum & speculum collocata monstrosæ magnitudinis in speculis concavis apparere debent.

SCHOLION 2.

246. *Nimirum quanto minor est imago objecti in speculo convexo, tanto major esse debet in concavo* (§. 240).

COROLLARIUM 6.

247. In speculo convexo imago objecti remotioris centro propior est quam vicinioris (§. 147). Ergo in concavo imago objecti a speculo remotio-

motioris majori intervallo distat quam vicinioris, modo distantia objecti a centro sit quarta diametri parte minor.

COROLLARIUM 7.

248. In speculo convexo imago objecti remotioris minor est quam vicinioris (§. 178): ergo in concavo imago objecti inter focum & speculum constituti major est, si foco quam speculo propius.

COROLLARIUM 8.

249. Recedentis igitur a speculo concavo imago continuo fit major, modo ultra focum non recedatur, in quo confusa evadit (§. 237): accedentis vero imago fit minor.

COROLLARIUM 9.

250. In speculo convexo, quod est minoris sphæræ segmentum, imago est minor quam in alio, quod majoris sphæræ segmentum existit (§. 180). Ergo in concavo, quod est minoris sphæræ segmentum, imago major est quam in alio, quod majoris sphæræ segmentum existit: unde specula concava sphæræ minimæ segmenta microscopii vicem præstant.

SCHOLION 3.

251. *En magnum propositionum numerum instar corollariorum facillime deductorum: ad quas demonstrandas multo alias apparatu utuntur scriptores Catoptricæ.*

THEOREMA 69.

252. *Si objectum* AB *inter focum & speculum fuerit constitutum, imago* a b *post speculum apparet situ erecto; sinistra apparent dextra & dextra sinistra.* Tab. IV. Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Sit AB longitudo objecti. Quoniam punctum A videtur in catheto C*a* & punctum B in catheto C*b* (§. 236); punctum superius videtur in loco superiori *a*, inferius in inferiori *b*, hoc est, objectum situ erecto post speculum apparet. *Quod erat unum.*

Quodsi AB concipiatur latitudo objecti: eodem modo patet, dextra dextris sinistra sinistris respondere. Sed in visione directa dextra objecti tuæ sinistræ & illius sinistra tuæ dextræ respondent, adeoque in speculo concavo objecti inter focum & speculum positi sinistra apparent dextra, dextra vero videntur sinistra. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 70.

253. *Si objectum* AB *inter focum & centrum constituatur; imago ejus* EF *situ inverso apparet ultra centrum in libero aëre, oculo ultra centrum remoto.* Tab. IV. Fig. 43.

DEMONSTRATIO.

Radii enim, per quos punctum A reflectitur, in catheto GF ultra centrum C in F, & qui punctum

B reflectunt, in catheto DE ultra centrum C in E concurrunt (§. 227). Punctum igitur B veluti ex E & punctum A veluti ex F in oculum ultra EF constitutum radiat: consequenter punctum B in E & punctum A in F, adeoque imago objecti ultra centrum situ inverso videtur (§. 347. *Optic.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 71.

Tab. IV. Fig. 46. 254. *Puncti* M *inter centrum* G *& focum* F *speculi concavi positi & foco propioris quam centro imago videtur a speculo remotior, quam puncti* I *centro* G *propioris, quam foco* F.

DEMONSTRATIO.

Radii MH & IH reflexi a puncto H cum catheto concurrunt ultra centrum (§. 227). Sed quoniam MHG > IHG & MHG = GHA, itemque IGH = GHN (§. 144); erit GHA > GHN (§. 79. *Arithm.*), consequenter radius HA, qui punctum M foco F propius reflectit, cum catheto in majore a centro distantia GA concurrit, quam qui punctum centro G propius I reflectit. Videtur adeo punctum M in majore a centro distantia nempe in A, punctum vero I in minore scilicet in N (§. 348. *Optic.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 72.

255. *Si objectum* EF *ultra centrum* C *fuerit constitutum, oculo itidem ultra centrum collocato imago apparebit in libero aëre inter centrum & focum situ inverso.* Tab. IV. Fig. 43.

DEMONSTRATIO.

Radii enim a puncto E in speculum illapsi post reflexionem cum catheto CD concurrunt inter centrum C & focum; similiter qui a puncto F illabuntur, post reflexionem cum catheto FG inter centrum C & focum concurrunt (§. 228). Punctum igitur E veluti ex B & punctum F veluti ex A in oculum ultra centrum constitutum radiat, consequenter objecti EF imago videbitur inter focum & centrum in AB situ quidem everso (§. 348. *Optic.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

256. Imagines ergo objectorum inversæ ultra centrum C sitorum a speculo concavo reflectuntur erectæ & inter centrum atque focum charta, in camera præsertim obscura, excipi possunt.

COROLLARIUM 2.

257. Si objectum EF magis distet a centro, quam focus, imago objecto minor est. Quia enim tum AC < EC; erit etiam ob verticales ad C æquales (§. 156. *Geom.*) AB < EF (§. 267. *Geom.*).

SCHO-

SCHOLION.

258. *Jucunda admodum specula concava, quæ majoris præsertim sphæræ segmenta sunt, ut objecta magna integra reflectere possint, præbent spectacula. Certe si gladium adversus speculum vibres; alius ex eodem prodibit ad oculum usque protensus: cumque etiam capitis imago in libero aëre conspiciatur, vero gladio illum percutere licebit, phantastico tuum percutiente. Si manum versus speculum porrigas, ex ea prodibit alia inversa tuæ jungenda. Ut autem majori admirationi sint ignaris imagines in aëre pendulæ, objecta post alia abscondi debent, ne ipsamet videantur. Quoniam etiam objectum idem extra centrum collocatum a diversis speculi partibus in oculos reflectitur, ut quilibet videat imaginem peculiarem; in minoribus speculis imagines coalescentes monstrosas objecti figuras exhibent. Ita e. gr. facies intuentis unam habet frontem, nasos duos, oculos tres, ora duo; immo interdum inter nasum geminum oculos duos communibus palpebris gaudentes. Quodsi vitrum, ex quo speculum paratur, sit coloris subcinericii; facies intuentis eodem colore tincta magis deformabitur.*

PROBLEMA 23.

Tab. V. Fig. 47. 259. ***Cistulam catoptricam construere, in quam introspiciens videat objecta cista majora, e.gr. caput humanum aut ædificium quoddam.***

RESOLUTIO.

1. Construatur cistula ABCDEFG pro magnitudine speculi concavi, quo usurus es, formam parallelepipedi habens, ne desit sufficiens spatium radiis reflectendis & tegatur ut supra (§.119) charta pergamena pellucida, aut vitro lævigato quidem, sed non polito.
2. Ad planum ABG firmetur speculum concavum, quod majoris sphæræ segmentum esse præstat.
3. In plano opposito DEFC applicetur pictura hominis aut ædificii, aut objecti cujuscunque alterius, & super ea fiat apertura oblonga HI vitro plano polito munienda.

Quodsi enim introspicias, pictura à speculo reflexa sub vera objecti magnitudine comparebit.

SCHOLION.

260. *Quoniam primum per rimam introspiciens & cistæ magnitudinis sibi adhuc conscius in cista videt objectum ejus molem excedens, veluti caput quoddam humanum, a trunco tamen non separatum; in stuporem abripitur & pro diversitate objecti in terrorem conjicitur.*

THEOREMA 72.

261. ***Lineæ rectæ ad speculum concavum sphæricum perpendicularis imago est linea recta; lineæ vero ad speculum obliquæ vel ei-***

dem parallelæ imago est concava.

DEMONSTRATIO.

Si linea ad speculum perpendicularis, in catheto incidentiæ existit (§. 16). Quare cum quodlibet ejus punctum in ista catheto videatur (§. 236); imago ejus linea recta sit necesse est. *Quod erat unum.*

Sit AB speculo parallela vel ad idem obliqua, ducaturque ex centro C recta CF ad AB perpendicularis; erit CA > CD (§. 220. *Geom.*) adeoque ob CF = CE (§. 40. *Geom.*) FD > AE (§ 92. *Arithm.*). Punctum igitur D a speculo remotius majori intervallo post speculum videtur, quam vicinius A (§. 247). Quare cum *d* magis distet a D, quam a ab A & b a B; imago *adb* videbitur concava (§. 279. *Optic.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 45.

CAPUT V.

DE

SPECULIS CYLINDRICIS ET CONICIS, PYRAMIDALIBUS ALIISQUE PLURIBUS.

PROBLEMA 24.

262. *Specula cylindrica & conica, itemque pyramidalia & alia figuræ cujuscunque conficere.*

RESOLUTIO.

Quomodo specula cylindrica & conica convexa, itemque pyramidalia, ex vitro fiant, docuimus supra (§. 142).

Metallica eodem artificio parantur, quo supra specula sphærica concava fieri docuimus, nisi quod moduli ex luto §. 199. descripto parandi, requirant alios ligneos figuram speculorum habentes.

Quodsi modulus pro elliptico, parabolico & hyperbolico speculo effici debet: Tab. IV. Fig. 48. 49.

1. In tabula ænea aut lignea accuratissime describatur ellipsis AB (§. 435. *Analys.*) parabola (§. 401. *Analys.*) aut hyperbola CD (§. 471. *Analys.*) & figura accurate

rate exſcindatur, margo vero ejus lævigetur.

Fig. 48. 2. Affigatur ipſi axis EF cum manubrio EO & binis fulcris ellipticæ figuræ axis imponatur.

3. Subſternatur lutum, quod ſuperius §. 199. pro formandis modulis parare docuimus.

4. Axis EF cum plano AB circumducatur, donec luto figura elliptica, quantum fieri poteſt, exactisſime fuerit impreſſa.

Fig. 49. 5. Axis figuræ parabolicæ aut hyperbolicæ CD apice E ita infigatur, ut ſemper maneat erectus, prope manubrium F vero ad fulcrum aliquod firmetur, & ut ante circumducatur, donec luto circumpoſito figuram ſui accuratisſime impresſerit.

6. Moduli pars ſic formata exſiccetur & vel pinguedine illinatur, vel pulvere lateritio conſpergatur, atque ex ſimili luto cavitati impreſſo moduli pars convexa paretur; quam *modulum maſculinum*, ſicuti illam *fœmininum* appellare ſolent.

7. Modulus maſculinus exſiccatus ſecundum convexitatem ita jungatur concavitati fœminini, ut inter utrumque tantum ſpatii relinquatur, quantum ſpeculum occupare debet. Reliqua fiant ut ſupra (§. 199).

Specula pyramidalia cylindrica atque conica, tam convexa, quam concava, fiunt quoque ex folio ſelenitæ eodem modo terminato, quo ſpecula plana terminari docuimus (§. 49), & vel convexitati vel concavitati cylindri aut coni, vel ſuperficiei pyramidis ligneæ ſuperinducuntur: quod flexilitas materiæ patitur.

SCHOLION.

263. *Specula elliptica, parabolica & hyperbolica omium difficillime parantur, quia poliendo figura facile depravatur, ſi vel maxime modulus perfectam figuram ellipticam, parabolicam vel hyperbolicam habuerit.*

DEFINITIO 22.

264. *Speculo cylindrico vel conico ſecundum longitudinem objici* dicitur, quod eſt in plano EFHG ſpeculum per axem CD ſecante. Et planum *ſecat* ſpeculum *per axem*, ſi axis ſpeculi CD fuerit in plano ſecante EFHG. Tab. V. Fig. 50.

DEFINITIO 23.

265. *Speculo cylindrico vel conico ſecundum latitudinem objici* dicitur, quod eſt in plano HLKI baſi MN parallelo, vel in eodem plano, cui ſpeculum inſiſtit, ipſummet diametro ſpeculi parallelum. Tab. V. Fig. 51.

OBSERVATIO 3.

266. *Si ſtylus aliquis ſpeculo cylindrico ſecundum longitudinem objici-*

jicitur; imago intra speculum apparet in recta axi parallela, superficiei quam centro propior, ejusdem fere cum objecto longitudinis, ubi oculus stylo non fuerit altior. Quodsi oculum eleves, longitudo imaginis extendetur; si deprimas, eadem in se quasi contrahitur.

COROLLARIUM 1.

Tab. V. Fig. 50. 267. Linea igitur objectiva AB, quæ speculo secundum longitudinem objicitur, intra speculum habet imaginem rectam *ab* axi CD parallelam, objecto propemodum æqualem.

COROLLARIUM 2.

268. Dimensiones itaque objectorum, longitudini speculi cylindrici respondentes parum mutantur.

OBSERVATIO 4.

269. *Si stylus in plano, cui speculum cylindricum insistit, vel in plano basi speculi parallelo vel diametro basis, vel chordæ in directum collocetur; imago ut ante intra speculum apparet erecta in recta axi parallela, superficiei quam centro propior. Quodsi oculus elevatur, eadem celeritate, qua oculus movetur, imago extenditur multo magis, quam si stylus fuerit in plano speculum per axem secante; sin iste deprimitur, hæc quasi in seipsam contrahitur.*

COROLLARIUM 1.

270. Lineæ igitur objectivæ in plano, cui speculum insistit, vel quod basi ejus parallelum, diametro vel chordæ in directum jacentis MN imago *mn* axi speculi CD parallela apparet, punctumque remotius N videtur in speculo altius in *n*. Tab. V. Fig. 50.

COROLLARIUM 2.

271. Linea itaque objectiva in plano, cui speculum insistit, vel quod basi ejus parallelum, in directum jacens diametro vel chordæ, instar lineæ apparet, quæ secundum longitudinem speculo objicitur (§. 267).

OBSERVATIO 5.

272. *Si stylus speculo cylindrico secundum latitudinem objicitur; imago ejus apparet curva, eoque minor, quo a speculo remotior.*

COROLLARIUM 1.

273. Linea igitur objectiva, quæ speculo secundum latitudinem objicitur, AB vel CD imaginem curvam habet, eoque minorem, quo a speculo remotior. Tab. V. Fig. 51.

COROLLARIUM 2.

274. Quæ adeo speculo cylindrico secundum latitudinem objiciuntur; eorum figuræ mutantur & dimensiones eo magis minuuntur, quo longius a speculo distant.

SCHOLION 2.

275. *Hæc quidem de imaginibus objectorum in speculis cylindricis ab experientia petere libuit, quia de loco earun-*

rundem in hoc speculorum genere adhuc desiderantur demonstrationes satis firmæ ac inconcussæ. Quæ enim Alhazen *atque* Vitellio *eam in rem afferunt, non satisfaciunt. Neque adeo facile est supplere hunc defectum, quia planum reflexionis pro diverso speculi & puncti radiantis situ specie variat: id quod in theoremate sequente demonstramus.*

LEMMA.

Tab. V. Fig. 52. 276. *Si cylindrus oblique secetur, hoc est, ita ut diameter sectionis* FD *continuata cum diametro baseos cylindri* BA *itidem continuata in* G *concurrat; planum sectionis* DHFR *erit ellipsis.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur enim ad diametrum circuli normales ML & CI, sitque in C centrum circuli. Ex I & M, itemque L & C, Q & O erigantur normales IH & MN, itemque CE, LK, OP & QR. Ducantur denique PH & RN: erit, ob MN = QR & HI = OP ex natura sectionis, RN ipsi QM & PH ipsi OI parallela (§. 226. *Geom.*), consequenter ob EC & HI, itemque KL & MN parallelas (§. 256. *Geom.*), EH = CI & KN = LM (§. 257. *Geom.*). Quare cum sit (§. 268. *Geom.*)

$$GD:DE = GA:AC,$$
$$\& \; GD:DK = GA:AL$$
$$\& \; GK:KF = GL:LB$$

adeoque etiam ob

$$GD:GK = GA:GL:$$

erit etiam (§. 197. *Arithm.*)

$$GD:KF = GA:LB$$

atque hinc porro (§. 196. *Arithm.*)

$$DE:DK = AC:AL$$
$$DE:KF = AC:LB$$

consequenter

$$DE^2:DK.KF = AC^2:AL.LB$$

(§. 213. *Arithm.*), hoc est, ob AC = CI (§. 40. *Geom.*) = EH *per demonstrata* & AL.LB = LM^2 (§. 377. *Anal. finit.*) = KN^2 *per demonstr.* $DE^2:DK.KF = EH^2:KN^2$, adeoque $DE^2:EH^2 = DK.KF:KN^2$ (§. 173. *Arithm.*). Quoniam itaque (§. 268. *Geom.*).

$$GD:DE = GA:AC$$
$$GE:EF = GC:CB$$
$$GD:GE = GA:GC$$

adeoque (§. 197. *Arithm.*)

$$GD:EF = GA:CB$$

& hinc porro (§. 196. *Arithm.*)

$$DE:EF = AC:CB$$

ac præterea AC = CB (§. 40. *Geom.*) erit DE = EF; adeoque DHF ellipsis (§. 430. *Anal. finit.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 74.

277. *Si planum reflexionis per axem speculum cylindricum secat, reflexio eodem modo contingit ac in speculo plano: si fuerit basi parallelum, reflexio fit ut in speculo*

ſphærico: ſi denique ſpeculum oblique ſecet ſeu ſi fuerit ad baſin ejus obliquum; reflexio fit ut in ſpeculo elliptico.

DEMONSTRATIO.

Si planum reflexionis per axem ſecet ſpeculum cylindricum, communis interſectio plani & ſpeculi eſt linea recta (§. 465. *Geom.*). Radii igitur a linea recta reflectuntur. Quoniam itaque communis interſectio ſpeculi plani & plani reflexionis itidem linea recta, adeoque etiam in hoc radii a linea recta reflectuntur; reflexio hoc in caſu in ſpeculo cylindrico perinde fieri debet, ac ſi in plano contingeret. *Quod erat unum.*

Si planum reflexionis ſecet ſpeculum cylindricum per ſectionem baſi parallelam; communis interſectio plani & ſpeculi eſt arcus circuli (§. 466. *Geom.*). Quoniam itaque communis interſectio ſpeculi ſphærici & plani reflexionis itidem arcus circuli; reflexio in caſu præſenti in ſpeculo cylindrico perinde fieri debet, ac ſi in ſphærico contingeret. *Quod erat alterum.*

Tab. V. Fig. 52. Denique ſi planum reflexionis ſpeculum oblique ſecet, planum ſectionis DHF erit ellipſis (§. 276). Cum adeo communis interſectio ſpeculi & plani reflexionis ſit arcus ellipticus; reflexio non aliter contingit, ac ſi in ſpeculo elliptico fieret. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

278. Quoniam planum reflexionis non tranſit per axem ſpeculi, niſi cum oculus & linea objectiva fuerint in eodem plano; nec baſi parallelum exiſtit, niſi cum punctum radians & oculus in eadem conſtituuntur altitudine; reflexio in ſpeculo cylindrico plerumque fit, ac ſi in elliptico contingeret.

SCHOLION.

279. *Apparet adeo, a theoria ſpeculi elliptici multum luminis expectare cylindricum.*

THEOREMA 75.

280. *Specula cylindrica deformant imagines objectorum.*

DEMONSTRATIO.

Objectorum enim dimenſionem, quæ longitudini eorum reſpondet, parum mutant nec juxta eas figuræ vim inferunt (§. 268): quæ vero latitudini reſpondent, eam eo magis minuunt, quo longius a ſpeculo diſtant objecta, ſimulque juxta eam figuras immutant (§. 274). Sublata igitur partium ſecundum longitudinem & latitudinem proportione & figura mutata,

tata, imagines deformes evadunt. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

281. *Deformationes vi §. 268. & 274. in dato quolibet casu haud difficulter prædicuntur. Ponamus e. gr. faciem hominis ita objici speculo cylindrico, ut longitudo sit axi, latitudo diametro parallela: apparebit admodum longa, sed vix digitum lata. Contra si eandem eidem ita objicias, ut latitudo sit axi, longitudo diametro parallela; ejus figura erit ovalis latitudine altitudinem plurimum excedente. Nasum habebis exiguum, os admodum latum, oculos fere clausos.*

SCHOLION 2.

282. *Quemadmodum vero specula cylindrica imagines formosas deformant; ita e contrario deformatas reformant. Ut autem intelligatur, quomodo imagines deformari possint, ut in speculo cylindrico formosæ appareant; sequens præmittenda est theoria.*

DEFINITIO 24.

Tab. V. Fig. 53. 283. Si ex oculo O in planum, cui speculum insistit, perpendicularis demittatur OE; punctum E dicitur ***Punctum** suboculare.* Recta ex puncto suboculari E ad punctum D, cui linea reflectens CD insistit ducta ED vocatur *subocularis.*

THEOREMA 76.

284. *Linea objectiva cum axi parallela* PB, *tum diametro vel chordæ in directum jacens* AB *habet singula puncta reflexionis in recta* CD *axi parallela.*

DEMONSTRATIO.

Utriusque lineæ imago *ab* est axi parallela (§. 267. 271) & singulæ rectæ in superficie cylindri peripheriæ basis perpendiculariter insistentes sunt eidem axi parallelæ (§. 465. 336. *Geom.*). Ergo imago *ab* est recta cuilibet in superficie speculi parallela (§. 495. *Geom.*). Quoniam vero imago *ab* instar objecti radiat in O per radios reflexos O*a*, O*b* &c. (§. 348. *Optic.*), radii vero reflexi omnes a recta *ab* ad idem punctum O ductæ in eodem sunt plano; triangulum *a*O*b* speculum secundum longitudinem secabit, adeoque singula puncta reflexionis erunt in recta CD axi parallela. *Q. e. d.*

THEOREMA 77.

285. ***Si** linea objectiva* AD *considerctur ut radius incidens; erit subocularis* DE *reflexus.* Tab. V. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in plano AD sunt radii incidentes, in plano vero COED reflexi (§. 293); utrumque planum ad planum obliquationis eandem habet inclinationem (§. 144). Quodsi ergo planum obli-

quationis secet planum suboculare in DG: erit EDG = GDA (§. 509. *Geom.*). Est itaque ED reflexus incidentis AD (§. 24). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

286. Data igitur linea objectiva AB in plano, cui speculum cylindricum insistit, invenitur subocularis ED, si ducta ex centro speculi per punctum incidentiæ D recta DG, tanquam catheto obliquationis (§. 146), fiat EDG = GDA & contra.

THEOREMA 78.

Tab. V. Fig. 54. 287. *Si radius* AB *incidat in speculum cylindricum & inde reflectatur per* BC; *erit angulus* ABE *angulo* DBC *æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Fiat AB = BC & puncta A atque C connectantur recta AC. Ducatur per punctum reflexionis B tangens FG & ex A atque C demittantur perpendiculares AG & FC. Fiat denique DB = BE ducanturque rectæ AE, DF & DC.

Quoniam ABG = CBF (§. 24), AGB = CFB (§. 145. *Geom.*) & AB = CB *per constr.* erit BG = FB & AG = FC (§. 252. *Geom.*). Porro FB = BG *per demonstr.* DBF = GBE (§. 156. *Geom.*) & DB = BE *per constr.* Ergo FD = GE (§. 279. *Geom.*). Quia planum reflexionis FCAG ad planum tangens speculum in puncto reflexionis DFEG rectum est (§. 38) & AG atque CF perpendiculares ad illud planum in punctis G & F *per constr.* erit quoque AG perpendicularis ad EG, & CF perpendicularis ad FD (§. 484. *Geom.*), adeoque AGE = CFD (§. 145. *Geom.*). Est vero etiam FD = GE & CF = AG *per demonstr.* Ergo CD = AE (§. 179. *Geom.*). Cum itaque etiam sit AB = BC & DB = BE *per constr.* erit angulus EBA = CBD (§. 204. *Geom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

288. *Facilior foret demonstratio in schematismo reali, si nempe cylindro ligneo debita ratione affigerentur fila ferrea, lineas repræsentantia, ut singularum linearum singulorumque angulorum vera quantitas in suo plano appareret: quod & in similibus casibus tenendum. Difficulter enim imaginatio per intellectum rectificatur, si sensus huic contraria exhibet.*

THEOREMA 97.

289. *In speculo cylindrico est altitudo oculi* CE *ad altitudinem puncti reflexionis* GB *ut composita ex suboculari* EG *& linea objectiva in plano horizontali* GA *ad eandem objectivam* GA. Tab. V. Fig. 55.

DEMONSTRATIO.

Quia CE & BG ad EH perpendicu-

diculares *per hypoth.* erit CE : BG = EH : GH (§. 267. *Geom.*). Et quia BG etiam perpendicularis ad GA (§. 484. *Geom.*), adeoque BGA = BGH (§. 145. *Geom*) præterea CBD = HBG (§. 156. *Geom.*) & CBD = GBA (§. 287), adeoque HBG = GBA (§. 87. *Arithm.*): erit GA = GH (§. 251. *Geom.*) & hinc EH = EG + GA (§. 88. *Arithm.*), consequenter CE : BG = EG + GA : GA. *Q. e. d.*

PROBLEMA 25.

Tab. VI. Fig. 56. n. 1. 290. *Figuram in plano horizontali delineare, quæ in speculo cylindrico ibidem collocato appareat instar quadrati in plures areolas quadratas minores divisi.*

RESOLUTIO.

1. Circa diametrum speculi cylindrici describatur circulus basi cylindri æqualis HBC (§. 171. *Geom.*
2. Assumto puncto suboculari O ducantur tangentes OC & OB (§. 291. *Analys. finit.*), quia ultra eas nullus radius a speculo reflexus in oculum cadere potest. Possunt etiam duci rectæ OC & OB ita, ut circulum secent, quia, quæ per tangentes videntur, non satis distincta apparent.
3. Puncta contactus vel intersectionum C & B connectantur recta CB, quæ assumenda pro latere quadrati in speculo apparentis, quia imago in speculo cylindrico inter centrum & superficiem comparet (§. 269).
4. Dividatur CB in quotcunque partes æquales & ex singulis divisionum punctis 1. 2. 3 &c. ducantur ad punctum suboculare O rectæ O1, O2, O3 &c.
5. Radii OH, OI &c. reflectantur in F, G &c. (§. 286): fiant nempe HF, IG &c. reflexi ipsorum O1, O3 &c.
6. Super recta indefinita MN erigatur perpendicularis MP, quæ sit altitudini oculi æqualis. n. 2.
7. Ex M in Q transferatur subocularis OH & in Q erigatur perpendicularis QR, quæ sit lateri quadrati in speculo apparentis æqualis & in tot partes æquales divisa, in quot latus istud dividere libuit.
8. Per singula divisionum puncta 1. 2. 3 &c. ducantur rectæ P. I, P. II, P. III &c.
9. Ex I. in I, II, III &c. transferantur rectæ I. I, I. II, I. III &c. ipsis Q I, Q. II, Q. III &c. æquales: n. 3.
10. Eodem modo dividantur rectæ HO, LF &c. & per puncta divisionum ejusdem ordinis du-

cantur curvæ: vel quia summa accuratione in talibus non est opus, per tria puncta ducantur arcus circulares, ut in figura factum esse comparet.

Dico, figuram SFGT in speculo cylindrico super circulo CHD erecto instar quadrati in areolas quadratas æquales divisi apparituram.

DEMONSTRATIO.

Recta IG apparet in speculo verticaliter erecta (§. 269) & quia OI & GI ad speculum æqualiter inclinantur *per construct.* erit OI subocularis (§. 283) & hinc recta GI reflectetur in oculum O a superficie speculi (§. 285). Quoniam vero est composita ex suboculari OI & recta GI ad rectam GI ut altitudo oculi ad latus quadrati in speculo apparentis, *per construct.* erit IG linea objectiva, quæ in speculo apparet lateri quadrati quam proxime æqualis (§. 289). Et eodem modo constat, apparere I. I, I. II, I. III &c. uni, duabus, tribus &c. partibus ejusdem lateris æquales. Idem cum de reliquis lineis in plano ductis LF, HO &c. demonstretur; figura in plano delineata in speculo cylindrico instar quadrati in areolas quadratas æquales divisi apparere debet. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

291. Quodsi ergo quadratum construatur, cujus latus sit ipsi QR æquale, idemque in areolas æquales ut ante dividatur, & in ejus area imago quæcunque pingatur, tandem quæ in singulis areolis ejusdem comparent in areolas respondentes quadrati deformati transferantur; imago deformata per reflexionem reformabitur, videbiturque in speculo formosa.

SCHOLION 1.

292. *Quadratum in areolas æquales divisum, in quo imago delineatur, appellari solet* Craticula Prototypi; *figura vero deformata, quæ in speculo instar quadrati in areolas æquales divisi apparet*, Craticula Ectypi. *Quodsi igitur semel craticula Ectypi delineata fuerit, sine ulla molestia toties multiplicari potest, quoties libuerit, si singula puncta intersectionum* I, II, III &c. *acu perforentur & pulvis carbonum subtilis linteo inclusus in chartam aliam subjectam transmittatur.*

SCHOLION 2.

293. *Quodsi quis in arte delineandi non fuerit satis exercitatus; ei percommoda erit machina anamorphotica ab ingenioso Mechanico Lipsiensi* Jacobo Leupoldo *nuper inventa & in Actis Eruditorum* A. 1712. *descripta. Etsi enim rigorem geometricum non sustineat (id quod Geometriæ ignari exinde colligere possunt, quia quadratum per machinam istam deformatum in speculo non*

non apparet in areolas æquales divisum); ad praxin tamen, ubi summa accuratione opus non est, abunde sufficit, prout unusquisque experire facile potest.

THEOREMA 80.

294. ***Si radii paralleli ita incidunt in superficiem speculi cylindrici concavi, ut axem ejus ad angulos rectos secent, & inclinatio eorundem ad speculum fuerit 60 gradibus minor; post reflexionem uniuntur in linea recta axi parallela, quæ minori intervallo, quam quarta diametri parte distat.***

DEMONSTRATIO.

Quodsi speculum cylindricum secetur per plana ad axem recta seu basi parallela; intersectiones in superficie speculi erunt peripheriæ circulorum æqualium (§. 466. *Geom.*). Quare cum radii incidant paralleli *per hypoth.* qui ex singulis peripheriis reflectuntur, in puncto aliquo concurrunt, quod minore intervallo, quam quarta diametri parte a speculo distat (§. 209) & ob circulorum æqualitatem singula puncta concursus a centris suorum circulorum æqualiter distant (§. 210). Quare cum centra omnia sint in axe (§. 465. *Geom.*); omnia puncta concursus ab axe eodem intervallo distant. Concurrunt itaque in recta axi parallela (81. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

295. Quoniam radii solares sunt ad sensum paralleli (§. 93. *Optic.*); si speculum cylindricum cavum Soli directe objicitur, per reflexionem formabitur linea lucida axi parallela, intervallo minore, quam quarta diametri parte a speculo distans.

COROLLARIUM 2.

296. Quia igitur in uno puncto (physico scilicet, non mathematico) tantum uniuntur radii ab uno arcu reflexi; speculum cylindricum cavum non est ustorium (§. 214).

THEOREMA 81.

297. *Radii* AB & AD, *qui ex eodem puncto axis* A *in eandem peripheriam* HI *speculi cylindrici concavi incidunt, post reflexionem in uno puncto* F *uniuntur, quod tanto intervallo distat a centro circuli* C, *in cujus peripheria reflexio contingit, quanto punctum radians* A *inde removetur.* Tab. V. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Ex centro C concipiantur ducti radii BC & CD ad puncta reflexionis B & D. Quoniam planum circuli, cujus centrum est in C, axem ad angulos rectos secat, erunt BCA & BCF anguli recti (§. 484. *Geom.*). Et quia BC ad arcum HI perpendicularis (§. 38. *Analys. infinit.*); erit ABC = CBF (§. 144), consequenter AC = CF (§. 251. *Geom.*).

Ra-

Radius igitur BF in puncto B reflexus axem secat in puncto F, quod tanto intervallo a centro C distat, quanto punctum radians A inde removetur. Quare cum eodem modo ostendatur, incidentem AD vel quemcunque alium ita reflecti, ut axem secet in distantia CF ipsi AC æquali; evidens est omnes radios, qui a peripheria HI reflectuntur, se mutuo inter secare in puncto F. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

298. Per radios igitur reflexos OB, PD &c. punctum A videri debet in F (§. 348. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

299. Quoniam speculum cylindricum secundum longitudinem est planum (§. 277), punctum G a puncto sublimiori L in oculum O reflectitur (§. 69). Quare cum omes radii a peripheria ST reflexi axem in R secent (§. 297), punctum G videbitur in R, consequenter recta AG in FR (§. 346. *Optic.*), adeoque visibile situ inverso videtur.

SCHOLION.

300. *Hinc intelligitur, quomodo* Kircherus & Schottus (x) *ope speculi cylindrici concavi efficere potuerint, ut flamma candelæ supra speculi orificium libero aëre pendula, admirantibus artificii catoptrici ignaris, innoxie tangeretur. Idem* Kircherus, *referente* Schotto (y) *speculo cylindrico concavo ex mistura confecto Ascensionem Domini ita ad vivum exhibuit, ut omnes figuræ in medio aëris pendere viderentur. Ut vero artificium tegi possit, speculum semicylindricum includitur thecæ cylindricæ & imagines in fundo ita collocantur, ut sitæ sint inversæ respectu intuentis, nec prorsus horizontaliter prostratæ, sed versus oculum elevatæ. Horum vero omnium demonstratio limites nostros excedere videtur.*

PROBLEMA 26.

301. *Delineare figuram deformem, quæ oculo supra axem speculi conici elevato appareat formosa.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam teste experientia oculo supra axem speculi conici elevato omnis circumjecta planities superficiem totius speculi implere videtur & per foramen admodum exiguum transpicienti instar circuli basi æqualis propemodum apparet; ideo imago deformanda delineatur in circulo speculi conici basi æquali & tam peripheria per diametros *ad*, *be*, *cf* &c. quam radii O*b*, O*c*, O*g*, O*d* &c. per circulos concentricos in partes quotcun- Tab. VI. Fig. 58. n. 1.

(x) vid. Schottus in Magia Universali Part. 1. lib. 6. c. 4. prop. 1. cor. p. 351.
(y) loc. cit.

cunque æquales O 1, 1. 2, 2. 3 &c. dividuntur.

2. Ut habeantur puncta I. II. III

n. 1. &c. in planitie circumjecta, quæ

n. 2. per radios reflexos intra speculum in 1, 2, 3 &c. videntur; con-

n. 3. struatur triangulum rectangulum AOE, cujus basis OE sit radio speculi, altitudo AO altitudini seu axi ejusdem æqualis, & in AO producta sumatur AB altitudini oculi æqualis.

3. Ad singula divisionum puncta 1, 2, 3 &c. ex puncto B, in quo supponitur oculus, ducantur rectæ B 1, B2, B3 &c.

4. Quoniam hi sunt radii reflexi, per quos puncta 1, 2, 3 &c. videntur, AE vero est intersectio plani reflexionis & speculi; fiant anguli I. AE. II. DE &c. æquales angulis B A G, B D G &c. erunt AI, DII &c. radii incidentes (§. 24), consequenter I, II &c. puncta radiantia, quæ per reflexio-

n. 2. nem in 1, 2 &c. videntur.

5. Producantur itaque radii O*a*, O*b*, O*c* &c. in *craticula Prototypi*, & in continuatos transferantur divisiones O. I, O. II, O III &c, tandemque ex centro O ducantur circuli concentrici: ita prodibit *craticula Ectypi*.

6. Quodsi itaque per singulas ejus areolas dispergantur, quæ in respondentibus areolis craticulæ prototypi depicta cernuntur; figura prodibit difformis, quæ oculo supra verticem speculi conici decenter elevato, formosa apparet. *Q. e. f.*

SCHOLION 1.

302. *Supra laudatus* Leupoldus *machinam quoque invenit anamorphoticam, in Actis Eruditorum* (z) *descriptam, per quam imagines deformes delineari possunt, a speculo conico ita reformandas, ut satis formosæ in eo appareant.*

SCHOLION 2.

303. *Possunt quoque fieri imagines deformes iis similes, quæ a speculis cylindricis reformantur, oculo ante speculum conicum constituto formosæ apparituræ: sed quia priores magis deformantur, ideo posterioribus præferuntur.*

PROBLEMA 27.

304. *Imaginem deformem delineare, quæ oculo super axe speculi pyramidalis elevato formosa appareat.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. imago deformis delineanda, quæ a speculo pyramidali quadrangulari reformetur. Tab. VI. Fig. 59.

1. Quia experientia teste speculum pyra-

(z) A. 1712. p. 367.

pyramidale super basi ABCD elevatum non reflectit nisi triangula BEC, CFD, DGA, AHB in plano circumjecto descripta in oculum super axe elevatum, ex intermediis spatiis HBE, ECF &c. nullus radius ad eundem pertingit; illa vero triangula totam speculi superficiem occupant & per foramen exiguum transpicienti ad idem planum basi æquale ABCD depressa apparent; ideo imago deformanda delineatur in nostro casu in quadrato ABCD basi speculi æquali & ex centro E tum per diagonales, tum per rectas latera AB, BC &c. bisecantes perimeter in partes æquales dividitur, porro etiam recta EL & EB in partes quotcunque æquales dividitur, ut ductis per puncta divisionum lineis, quæ lateribus baseos sint æquidistantes, prototypon craticulæ includatur.

2. Jam cum sectio speculi per axem & rectam EL in basi ductam sit triangulum rectangulum, & quodlibet punctum divisionis craticulæ prototypi sit in radio reflexo; eodem prorsus modo, quo in problemate præcedente (§. 301) inveniuntur puncta in axe LE trianguli reflectendi BEC I, II, III &c. quibus datis, ipsum construi potest.

3. Reliqua deinde itidem eodem modo peragantur, quo in problemate citato.

SCHOLION.

305. *Anamorphoses, quæ ope speculorum pyramidalium perficiuntur, magis placent reliquis, quia imaginis deformatæ partes sunt disjunctæ & inter eas alia quæcunque depingi possunt, unum continuum extra speculum cum ipsis formantia, in speculo autem non videnda: quo ipso obtinetur, ut illa extra speculum difficilius dignoscantur.*

THEOREMA 81.

306. *Omnes radii* ML, ml *&c. cum axe* AX *paralleli in speculum parabolicum incidentes in foco parabolæ genetricis* F *concurrunt.* Tab. V. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

Tangat enim TG parabolam in M; erit TF=FM (§. 411. *Analys. finit.*). Ergo angulus MTF=TMF (§. 184. *Geom.*). Quoniam vero ML ipsi AX parallela, *per hypoth.* erit etiam LMG = MTF (§. 233. *Geom.*), consequenter TMF = GML (§. 87. *Arithm.*). Est igitur FM radius reflexus incidentis ML (§. 24). Quare cum eodem modo ostendatur, esse F*m* cujuscunque alte-

alterius *ml* reflexum; radii omnes axi paralleli in eodem puncto F foco nempe parabolæ uniuntur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

307. Quia radii paralleli omnes in uno puncto uniuntur, specula parabolica inter ustoria sunt omnium præstantissima (213. 214. *Optic.*).

SCHOLION 1.

308. *Paranda sunt specula parabolica instar tubæ per revolutionem arcus* HI *circa axem* AX *genita, ut focus* F *sit extra speculum.*

SCHOLION 2.

309. *Patet jam ratio, cur punctum* F *distans a vertice parabolæ* A *quarta parametri parte* AF *dicatur* Focus, *quia nempe ibi per radios reflexos excitatur ignis.*

THEOREMA 82.

Tab. V. Fig. 61. 310. *Radius* FM *ex uno foco* F *in speculum ellipticum incidens in focum alterum* G *reflectitur.*

DEMONSTRATIO.

Recta FM ex foco F ducta continuetur in I, donec IM = MG. Angulus IMG per rectam CD dividatur bifariam (§. 209. *Geom.*) & ad punctum quodcunque H ducantur rectæ HI, HF, HG. Quoniam $o = x$ & MI = MG *per construct.* erit IH = HG (§. 179. *Geom.*). Sed IH + HF > IF (§. 189. *Geom.*). Ergo HF + HG > IF, consequenter ob MI = MG *per construct.* & FM + MG = AB (§. 334. *Analys. finit.*) adeoque FM + IM (= IF) = AB, HF + HG > AB (§. 87. *Arithm.*). Punctum igitur H & quodcunque aliud extra M in recta CD assumtum extra ellipsin cadit (§. *cit. Analys.*), & hinc CD ellipsin in M tangit (§. 47. *Geom.*). Quare cum verticales ad M nempe CMF & IMH sint æquales (§. 156. *Geom.*) & $o = x$ *per constr.* adeoque CMF = GMD (§. 87. *Arithm.*); si FM fuerit radius incidens; erit MG reflexus (§. 24). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

311. Si igitur candela accensa ponatur in foco speculi elliptici uno F; radii ejus post reflexionem coëunt in altero G.

CAPUT V.

DE

CATOPTRICA ANALYTICA, SEU MODO INVESTIGANDI THEOREMATA CATOPTRICA PER ANALYSIN.

PROBLEMA 28.

Tab. VII. Fig. 63. 312. *Data distantia* AB *puncti radiantis* A *a superficie speculi sphærici concavi* DBE, *invenire punctum* F, *in quo radius reflexus* DF *cum axe* AB *concurrit.*

RESOLUTIO.

Sit in C centrum speculi & CB radius $= a$, distantia puncti radiantis AB $= b$, BF $= x$; erit FC $= b - x$. Quoniam supponimus oculum, qui videt imaginem puncti radiantis A in speculo, esse in axe constitutum, ut radius reflexus DF in eundem incidere possit, radius incidens AD axi AB valde vicinus esse debet, ut adeo arcus DB, anguli DCB mensura (§. 57. *Geom.*), consequenter & ipse angulus DCB admodum exiguus sit (§. 58. 59. *Geom.*). Erunt igitur multo magis anguli o & n (§. 239. *Geom.*), itemque angulus y (§. 144) valde exigui. Eadem de causa DC & CB, itemque DF & FB tanquam quantitate contemtibili differentes pro æqualibus assumi possunt. Quoniam itaque $m:y =$ FD : CF & $n:o$ = DC : AC (§. 19. *Trigon.*); erit $n+o:o =$ DC + AC : AC (§. 190. *Arithm.*), seu ob $n+o=m$, $o=y$, & DC = CB, $m:y$ = AB : AC (§. 168. *Arithm.*), consequenter (§. 167. *Arithm.*).

$$\text{AB} : \text{AC} = \text{FB} : \text{CF}$$
$$b : b-a = x : a-x$$

adeoque $2b-a : b = a : x$ (§. 190. *Arithm.*).

Et hinc $\frac{ab}{2b-a} = x$

seu $\text{FB} = \frac{\text{AB} \cdot \text{BC}}{2\text{AB} - \text{BC}}$

$= \frac{\text{AB} \cdot \text{BC}}{\text{AB} + \text{AC}}$

ob AB − BC = AC.

Theo-

THEOREMA. Si radius AD in superficiem speculi concavi incidens ab axe AB divergit; erit semidiameter BC ad distantiam puncti concursus F a superficie speculi BF, ut distantia puncti radiantis a superficie speculi AB ad compositam ex eadem distantia & distantia puncti radiantis a centro AC.

Quodsi distantia puncti concursus F sive foci a centro CF desideretur, cum sit

$$CF = BC - FB$$

$$\text{erit } CF = a - \frac{ab}{2b-a}$$

$$= \frac{2ab - a^2 - ab}{2b-a}$$

$$= \frac{ab - a^2}{2b-a}$$

$$= \frac{AC.\ BC}{2AB-BC}$$

$$= \frac{AC.\ CB}{AB+AC}$$

THEOREMA. Si radius AD in superficiem speculi concavi incidens ab axe divergit; erit ut composita ex distantia puncti radicantis a superficie speculi & ejus distantia a centro ad distantiam a centro speculi ut semidiameter speculi ad distantiam foci a centro.

COROLLARIUM 1.

313. Si distantia puncti radiantis AB sit infinita, erit BC respectu AB infinite parva, adeoque AB & AC haberi possunt pro æqualibus (§. 4. *Analys. infin.*). Quamobrem $FB = \frac{AB.\ BC}{2AB}$ (§. 312) $= \frac{1}{2}BC$, hoc est, distantia foci a speculo FB est dimidio radio, seu quartæ diametri parti æqualis: quod consonum iis, quæ supra demonstravimus (§. 209. 211).

COROLLARIUM 2.

314. Quodsi ut ante distantia puncti radiantis AB sit infinita, erit CF ob rationem eandem $= \frac{AC.\ BC}{2AC}$ $= \frac{1}{2}BC$, hoc est, distantia foci a centro est quartæ diametri parti æqualis: id quod convenit cum corollario præcedente (§. 313).

COROLLARIUM 3.

315. Quodsi AB > BC, hoc est, si punctum radians A ultra centrum C a speculo sphærico concavo distet; cum sit 2 AB − AB = AB, erit 2 AB − BC > AB (§. 92. *Arithm.*). Enimvero $FB = \frac{AB.\ BC}{2AB-BC}$ (§. 112) & $\frac{AB.\ BC}{AB} = BC$. Quamobrem si AB. BC dividatur per quantitatem ipsa AB majorem, veluti hic per 2 AB − BC; erit FB < BC (§. 202. *Arithm.*), hoc est, distantia foci F a superficie speculi est radio BC minor, seu punctum concursus cum axe intra centrum a speculo distat.

COROLLARIUM 4.

316. Similiter si AB > BC, seu distantia puncti radiantis a speculo

 sphæ-

ſphærico concavo major radio; erit $AB > AC$ & $AB + AC > 2\,AC$ (§. 90. *Arithm.*). Quamobrem cum ſit $CF = \frac{AC.\,BC}{AB + AC}$ (§. 312) & $\frac{AC.\,BC}{2\,AC} = \frac{1}{2}\,BC$; erit $CF < \frac{1}{2}\,BC$ (§. 202. *Arithm.*), hoc eſt, diſtantia puncti concurſus a centro eſt $< \frac{1}{2}\,BC$, ſeu quarta diametri parte.

COROLLARIUM 5.

317. Quamobrem cum focus radiorum parallelorum (qui proprie focus dicitur) diſtet a centro intervallo $\frac{1}{2}\,BC$; radius vero divergens AD cum axe poſt reflexionem concurrat intervallo minore quam $\frac{1}{2}\,BC$; punctum concurſus F erit inter centrum & focum radiorum parallelorum.

COROLLARIUM 6.

318. Quodſi fuerit $AB = BC$, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit in centro ſpeculi ſphærici concavi, erit $BF = \frac{BC.\,BC}{2BC - BC}$ (§. 312) $= \frac{BC.\,BC}{BC} = BC$, hoc eſt, punctum concurſus erit in ipſo centro C. Idem etiam patet hoc modo. $CF = \frac{AC.\,BC}{BA + AC}$ (§. 312). Sed quando $AB = BC$, erit $AC = AB - BC = 0$, adeoque $CF = 0$, hoc eſt, diſtantia puncti concurſus a centro nulla eſt, conſequenter punctum concurſus in ipſo centro eſt, ſeu radius reflexus cum axe in puncto radiante concurrit.

COROLLARIUM 7.

319. Quodſi fuerit $AB = \frac{1}{2}\,BC$, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit in foco radiorum parallelorum (§. 313); erit $BF = \frac{\frac{1}{2}\,BC.\,BC}{BC - BC}$ (§. 312) $= \frac{\frac{1}{2}\,BC.\,BC}{0}$. Quamobrem cum BF in hoc caſu ſit quantitas infinita, punctum concurſus cum axe a ſpeculo infinito intervallo diſtat. Quoniam itaque radius ex foco in ſpeculum incidens poſt reflexionem cum axe non concurrit, niſi intervallo infinito, hoc eſt, nunquam; radius ex foco in ſpeculum incidens erit poſt reflexionem axi parallelus, quemadmodum ſupra demonſtratum (§. 224).

COROLLARIUM 8.

320. Similiter ſi fuerit $AB = \frac{1}{2}\,BC$; erit $CF = BC.\,(AB - BC) : (2\,AB - BC)$ (§. 313) $= \frac{BC - \frac{1}{2}BC}{BC - BC} = \frac{-\frac{1}{2}\,BC^2}{0} = \infty$. Eſt igitur diſtantia puncti concurſus a centro infinita, hoc eſt, radius ex foco in ſpeculum concavum incidens poſt reflexionem ultra centrum concurrit intervallo infinito, hoc eſt, nunquam: id quod cum corollario præcedente convenit.

COROLLARIUM 9.

321. Quodſi fuerit $AB < CB$, ſed

sed > ½ CB, hoc est, si punctum radians inter focum & centrum consistat, erit 2 AB > CB. Ponamus excessum rectæ 2 AB supra CB esse rectam quandam GH: erit

$$2\,AB = CB + GH$$

$$2\,AB.\tfrac{1}{2}CB = CB.\tfrac{1}{2}CB + GH.\tfrac{1}{2}CB$$

$$\&\ 2\,AB - CB = GH$$

$$\frac{AB.\,CB}{2AB-CB} = \frac{CB.\tfrac{1}{2}CB}{GH} + \tfrac{1}{2}CB$$

(§. 94. *Arithm.*)

$$\frac{AB.\,CB}{2\,AB-CB} > \tfrac{1}{2}CB$$ (§. 84. *Arithm.*)

Enimvero $FB = \frac{AB.\,CB}{2AB-CB}$ (§.313).

Ergo FB > ½ CB (§. 89 *Arithm.*)

hoc est, si punctum radians inter centrum atque focum constituatur, radius divergens ab axe post reflexionem cum eodem concurrit in distantia quarta diamatri parte majore a superficie speculi.

COROLLARIUM 10.

322. Iisdem positis, quæ in corollario præcedente, erit

$$2\,AB = CB + GH$$

$$AB = \tfrac{1}{2}CB + \tfrac{1}{2}GH$$

$$AB - CB = \tfrac{1}{2}GH - \tfrac{1}{2}CB$$

$$(AB - CB)\,CB = \tfrac{1}{2}GH.CB - \tfrac{1}{2}CB^2$$

$$\frac{(AB - CB)\,CB}{2\,AB - CB} = \tfrac{1}{2}CB - \frac{\tfrac{1}{2}CB^2}{GH}$$ (§. 94. *Arithm.*).

$$< \tfrac{1}{2}CB$$ (§. 84. *Arithm.*)

Sed $FC = \frac{(AB - BC)\,BC}{2\,AB - CB}$

Ergo FC < ½ CB (§. 89. *Arithm.*)

hoc est, si punctum radians inter centrum atque focum constituitur, radius divergens ab axe post reflexionem cum eodem concurrit in distantia a centro quarta diametri parte minore.

COROLLARIUM 11.

323. Quoniam si ex puncto radiante inter centrum & focum constituto radius in speculum sphæricum concavum non procul ab axe incidit, ab eodem reflexus cum axe concurrit in distantia majore quarta diametri parte a superficie speculi (§. 321) & minore quarta diametri parte a centro (§. 322); focus autem a centro non minus, quam a superficie dimidia radii seu quarta diametri parte distat (§. 313); punctum concursus in hoc casu inter focum atque centrum est.

COROLLARIUM 12.

324. Si denique AB < ½ CB, hoc est, si punctum radians fuerit inter focum & superficiem speculi; erit etiam 2 AB < CB (§. 180. *Arithm.*) & hinc 2 AB − BC quantitas negativa (§. 17. Tab. VII. Fig. 63.

(§. 17. *Analyſ. finit.*), conſequenter $FB = \frac{AB.\ BC}{2AB - BC}$ eſt quantitas negativa (§. 32. *Analyſ. fin.*): id quod indicio punctum concurſus eſſe poſt ſpeculum. Ut enim ſit poſitiva, fieri debet $\frac{AB.\ BC}{BC - 2\,AB}$.

COROLLARIUM 13.

325. Quoniam radius AD ex puncto A inter focum & ſuperficiem ſpeculi poſito in ſuperficiem ſpeculi incidens ita reflectitur in DG, ut retro continuatus concurrat cum axe poſt ſpeculum in F; ex puncto F poſt reflexionem ab axe divergit (§. 84. *Geom.*).

COROLLARIUM 14.

Tab. VII. Fig. 64. 326. Cum punctum radians A ſupponatur in axe ſpeculi, qui utpote per centrum C tranſiens (§. 470. *Geom.*) ad ſuperficiem ſpeculi perpendicularis (§. 38. *Analyſ. infinit.*); erit axis ſpeculi cathetus incidentiæ (§. 16). Quamobrem cum in ſpeculo ſphærico concavo plerumque locus imaginis ſit in concurſu radii reflexi cum catheto incidentiæ (§. 236); per ea, quæ de puncto concurſus dicta ſunt, locus imaginis in diverſis caſibus determinantur, ſuntque diſtantiæ illius puncti a ſuperficie ſpeculi diſtantiæ imaginum a ſpeculo.

COROLLARIUM 15.

327. Sit diſtantia punctorum radiantium a ſuperficie ſpeculi in ratione $1:m$. Erunt ergo diſtantiæ imaginum a ſpeculo, ut $\frac{AB.\ BC}{2AB - BC}$ ad $\frac{mAB.\ BC}{2mAB - BC}$ (§. 311. 326) conſequenter ut $\frac{1}{2\,AB - BC}$ ad $\frac{m}{2mAB - BC}$ (§. 181. *Arithm.*), ſeu ut $2m\,AB - BC$ ad $2mAB - mBC$ (§. 178. *Arithm.*). Quodſi ſit $m > 1$; erit $2m\,AB - BC > 2m\,AB - mBC$ ſi vero $m < 1$; erit $2m\,AB - BC < 2mAB - mBC$.

COROLLARIUM 16.

328. Quodſi ergo $AB > BC$, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit ultra centrum a ſpeculo remotum; objecto a ſpeculo recedente imago ad idem accedit (§. 327).

COROLLARIUM 17.

329. Quodſi punctum radians fuerit ultra centrum a ſpeculo remotum, objecto ad ſpeculum accedente imago ab eodem recedit.

COROLLARIUM 18.

330. Sit jam $2\,AB < BC$, adeoque $AB < \frac{1}{2}BC$, hoc eſt, ſit punctum radians inter focum & ſuperficiem ſpeculi; erunt diſtantiæ imaginum ut $\frac{AB.\ BC}{BC - 2AB}$ ad $\frac{m\,AB.\ BC}{BC - 2mAB}$ (§. 324. 326), conſequenter ut $BC - 2mAB$ ad $mBC - 2mAB$. Quodſi ergo $m > 1$; erit $mBC > BC$, adeoque $BC - 2m\,AB < mBC - 2mAB$. Si vero $m < 1$; erit $BC > mBC$, $BC - 2m\,AB > mBC - 2m\,AB$ (§. 97. *Arithm.*).

COROLLARIUM 19.

331. Quodſi ergo objectum intra focum

focum, & superficiem speculi constiturum ad focum accedit, seu a speculo recedit, imago quoque ab eodem recedit.

COROLLARIUM 20.

332. Si vero idem a foco recedit, seu ad speculum accedit; imago quoque ad idem accedit.

COROLLARIUM 21.

333. Quoniam itaque imago objecti intra focum & superficiem speculi constituti post speculum apparet (§.324); imago majore intervallo post seculum compareat, si objectum speculo propius, quam si ab eodem remotius.

COROLLARIUM 22.

334. Quodsi BC = ∞, hoc est, si radius ponatur infinitus; speculum concavum degenerat in planum. Enimvero tum AB respectu ipsius BC infinite parva, adeoque nihilo æqualis (§. 4 *Analyſ. infin.*). Quamobrem etiam 2 AB nihilo æquivalet, adeoque $FB = \frac{AB \cdot BC}{BC-2AB}$ (§.312) $= \frac{AB \cdot BC}{BC} = AB$, hoc est, imago tanto intervallo videtur post speculum planum, quanto ante ipsum abest: quemadmodum superius demonstratum est (§. 56).

SCHOLION.

335. *Ex corollariis hisce apparet, quanta facilitate ex formula analytica deducantur palmaria de speculis concavis theoremata. Poteramus ex eadem quoque deducere, quæ ad specula convexa pertinent; sed majoris evidentiæ causa problema sequens subnectimus.*

PROBLEMA 29.

336. *Data distantia* AB *puncti radiantis* A *a superficie speculi sphærici convexi* DBE, *invenire punctum* F, *in quo radius reflexus* GF *cum axe* AB *concurrit.* Tab. VII. Fig. 65.

RESOLUTIO.

Sit in C centrum speculi & radius $CB = a$, distanctia puncti radiantis a superficie speculi $AB = b$, distantia puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ ab eadem superficie speculi $BF = x$; erit distantia ejusdem a centro $FC = a - x$. Jam $u = o$ (§. 144) & $n = t$ atque $o = y$ (§. 150. *Geom.*), adeoque $t = y$ (§. 87. *Arithm.*), consequenter ob $t = n + m$ (§. 239. *Geom.*) $y = n + m$ (§. 87. *Arithm.*). Cum ut in problemate præcedente radius incidens AD ipsi AB admodum vicinus ponatur, erit ut ibidem AD = AB, FD = FB & anguli n, m, y valde exigui, consequenter $y : m = FC : BF$ & $m : n = AB : BC$ (§. 19. *Trigon.*). Quare cum sit $m + n : m = AB + BC : AB$ (§. 190. *Arithm.*) & ob $m + n = y$ per demonstrata $y : m = AB +$

BC:AB (§. 168. *Arithm.*); erit etiam (§. 168. *Arithm.*).

$$AC : AB = FC : BF$$

adeoque $a+b : b = a-x : x$

$$ab - bx = ax + bx$$

$$ab = 2bx + ax$$

$$\frac{ab}{2b+a} = x = FB$$

hoc est $\frac{AB.BC}{2AB+BC} = \frac{AB.BC}{AC+BA} = FB$

seu $FB : BC = AB : AC+BA$

THEOREMA. Si radius AD incidens in superficiem speculi convexi ab axe AC non nimis divergit; erit distantia puncti concursus radii reflexi cum axe a superficie speculi ad radium convexitatis ut distantia puncti radiantis a superficie speculi AB ad compositam ex distantia ejusdem puncti a centro & distantia a superficie AC + BA.

Quodsi distantia puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ F a centro speculi FC quæratur, erit ob

$$CF = BC - BF$$

$$CF = a - \frac{ab}{2b+a}$$

$$= \frac{2ab+a^2-ab}{2b+a}$$

$$= \frac{ab+a^2}{2b+a}$$

$$= \frac{(AB+BC)BC}{2AB+BC} = \frac{AC.BC}{AC+AB}$$

adeoque $AC+AB : AC = BC : CF$

THEOREMA. Si radius AD incidens in superficiem speculi sphærici convexi non multum ab axe ejus AC divergit, erit distantia puncti concursus F radii reflexi GF a centro speculi FC ad radium convexitatis BC ut distantia puncti radiantis a centro speculi AC ad compositam ex eadem distantia AC & distantia ejusdem a superficie speculi AB.

COROLLARIUM 1.

337. Quoniam AC + BA > AB; erit $\frac{AB}{AC+BA} < 1$ (§. 221. *Arithm.*), adeoque $\frac{AB.BC}{AC+BA} < BC$ (§. 180. *Arithm.*). Distantia igitur puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ in speculo sphærico convexo ab ejus superficie semper minor est radio.

COROLLARIUM 2.

338. Quare cum imago puncti radiantis A videatur in isto puncto concursus (§. 151); in speculo sphærico convexo semper videtur inter centrum & superficiem speculi.

COROLLARIUM 3.

339. Sit AB = ∞, erit BC respectu AB infinite parva, adeoque 2AB + BC = 2AB (§. 4. *Anal. infin.*), consequenter $\frac{AB.BC}{2AB+BC} = \frac{AB.}{}$

$\frac{AB.\ BC}{2AB} = \frac{1}{2}BC = FB$. Distantia igitur puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ nunquam majore intervallo a superficie speculi distat, quam dimidio convexitatis radio.

COROLLARIUM 4.

340. Quoniam distantia puncti radiantis habetur pro infinita, si radius ab axe divergens eidem ad sensum sit parallelus; radius a puncto remoto in superficiem speculi sphærici convexi incidens cum catheto incidentiæ concurrit intervallo quartæ diametri partis.

COROLLARIUM 5.

341. In speculo sphærico convexo imago nunquam majore intervallo distat a superficie speculi quam quarta diametri parte (§. 339) & imago quidem objecti valde remoti a superficie speculi quarta diametri parte distat.

SCHOLION.

342. *Objectum an valde remotum sit, æstimatur ex ratione radii* BC *ad ejus distantiam a superficie speculi* AB. *In minoribus adeo speculis minor distantia ad hoc sufficit, quam in majoribus.*

COROLLARIUM 6.

343. Quodsi radius convexitatis BC fuerit infinitus, hoc est, si speculum fuerit planum; erit 2AB respectu BC $= o$ (§. 4. *Anal. infin.*), adeoque $BF = \frac{AB.\ BC}{BC} = AB$. In speculo itaque plano imago tanto intervallo videtur post speculum, quanto ante ipsum ab eodem abest.

COROLLARIUM 7.

344. Sit ratio distantiarum punctorum radiantium $= 1 : n$; erunt distantiæ imaginum a superficie speculi inter se ut $\frac{ab}{2b + a}$ ad $\frac{nab}{2nb + a}$, adeoque ut $ab\ (2nb + a)$ ad $nab\ (2b + a)$ (§. 178. *Arithm.*), consequenter ut $2nb + a$ ad $2nb + na$ (§. 181. *Arithm.*).

SCHOLION.

345. *Quodsi ergo* n *explicetur per aliquem numerum, denturque* a & b *ratio distantiarum innotescit in numeris.*

COROLLARIUM 8.

346. Quodsi $1 : n$ fuerit ratio majoris inæqualitatis seu $n > 1$; erit $na > a$, adeoque $2nb + na > 2nb + a$ (§. 90. *Arithm.*). Crescente adeo distantia puncti radiantis extra speculum crescit distantia imaginis a superficie speculi intra speculum. Recedente igitur objecto a speculo, imago ejus intra speculum a superficie versus centrum recedit.

COROLLARIUM 9.

347. Quodsi $1 : n$ fuerit ratio minoris inæqualitatis, seu $n < 1$; erit $na < a$, adeoque $2nb + na < 2nb + a$ (§. 90. *Arithm.*). Decrescente adeo distantia puncti radiantis a speculo decrescit distantia imaginis a superficie. Visibilis itaque ad spe-

culum accedentis imago ad ejus superficiem accedit a centro recedens.

COROLLARIUM 10.

348. Quodsi b fuerit $=o$, hoc est, si visibile superficiem speculi tangit, erit $\frac{ab}{2b+a} = o$, adeoque distantia a superficie speculi nulla est. Videtur igitur imago in ipsa speculi superficie.

SCHOLION.

349. *Atque ex his corollariis intelligitur, cur imago styli longioris superficiem speculi altero suo extremo contingentis & diametro speculi in directum siti sit eidem continua & in directum sita.*

COROLLARIUM 11.

350. Si fuerit $b=a$, seu visibile a speculo radii intervallo distet; erit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{a^2}{3a} = \frac{1}{3}a$; seu imago tertia semidiametri parte a superficie speculi distat, adeoque duabus tertiis a centro.

COROLLARIUM 12.

351. Quodsi fuerit $b=na$ & $n>1$, seu distantia puncti radiantis major radio; erit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{na^2}{2na+a} = \frac{na}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}a$. Quoniam $2n+1>n$; erit $\frac{n}{2n+1}a < a$ (§. 221. *Arithm.*). Idem adhuc obtinet, si $n<1$. Distantia igitur imaginis a superficie speculi continuo major est radio, quantacunque fuerit distantia imaginis: id quod jam alio modo ante elicuimus.

COROLLARIUM 13.

352. Quodsi fuerit $n=\infty$, erit unitas respectu $2n$ nihilo æqualis (§. 4. *Anal. infin.*) & distantia imaginis a superficie speculi $\frac{na}{2n} = \frac{1}{2}a$, seu dimidio radio æqualis: quemadmodum denuo jam ante reperimus.

COROLLARIUM 14.

353. Quodsi ponamus $\frac{ab}{2b+a} = \frac{1}{4}a$; hoc est, si imago a superficie speculi distet intervallo quartæ partis diametri; erit $2ab = 2ab+aa$, adeoque $aa=o$: quod cum sit absurdum, imago a superficie speculi nunquam quarta diametri parte distare potest, si radius incidens a catheto incidentiæ divergit.

SCHOLION.

354. *Consentit hoc cum superioribus, ubi distantiam visibilis infinitam requisivimus, ut imago distet a superficie speculi quarta diametri parte: tum enim radius incidens catheto incidentiæ censetur parallelus.*

COROLLARIUM 15.

355. Si radii duorum speculorum fuerint ut a ad na, sitque $n>1$; erunt

erunt distantiæ imaginum a superficiebus speculorum, visibili ab utroque speculo eodem intervallo remoto, ut $\frac{ab}{2b+a}$ ad $\frac{nab}{2b+na}$, adeoque ut $2b+na$ ad $2nb+na$ (§. 178. 181. *Arithm.*). Quamobrem cum sit $2nb > 2b$ ex hypothesi, distantia imaginis in speculo majoris sphæricitatis major est, in speculo minoris minor, seu imago ejusdem visibilis in eadem distantia a speculo majore intervallo videtur post speculum, si majoris fuerit sphæræ segmentum, quam si minoris fuerit.

COROLLARIUM 16.

356. Sit $\frac{ab}{2b+a} = b$, seu distet imago visibilis tanto intervallo a superficie speculi, quanto ante ipsum idem abest; erit $ab = 2bb + ab$, adeoque $2bb = 0$: quod cum sit absurdum, in speculo sphærico convexo imago nunquam tanto intervallo post speculum esse potest, quanto ante ipsum objectum constituitur.

COROLLARIUM 17.

357. Sit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{1}{2}b$, seu sit distantia imaginis post speculum distantiæ visibilis a speculo dimidia; erit $ab = bb + \frac{1}{2}ab$, adeoque $\frac{1}{2}ab = bb$, seu $\frac{1}{2}a = b$. Objectum igitur a speculo intervallo dimidii radii speculi ab eodem distare debet, ut imaginis distantia sit dimidia distantiæ objecti.

SCHOLION.

358. *Ex his corollariis intelligitur, quanta facilitate plurima Dioptricæ theoremata inveniri possint, ope theorematum generalium, quæ & ipsa absque multa difficultate eruuntur. Poterat hæc theoria etiam extendi ad alias curvas: possunt tamen aliis quoque methodis puncta concursus radiorum reflexorum cum axe inveniri. Ut industriam lectoris excitemus, sequens addere lubet problema.*

PROBLEMA 30.

359. ***Invenire punctum* F, *in quo radius* GM *vel* EM *axi* IK *parabolæ* AMN *cum eodem post reflexionem concurrit, sive in concavitatem, sive in convexitatem incidat.*** Tab. VII. Fig. 66.

RESOLUTIO.

Sit DH ad parabolam in M normalis & parameter parabolæ $= a$, $AP = x$, $AF = y$; erit $PH = \frac{1}{2}a$ (§. 36. *Analyſ. infin.*), $FP = x - y$ & $FH = \frac{1}{2}a + x - y$. Jam ob parallelismum rectarum GM & AK angulus $GMH = MHF$ (§. 233. *Geom.*) & ex natura reflexionis $FMH = GMH$ (§. 144), adeoque $MHF = FMH$ (§. 87. *Arithm.*), consequenter $FH = FM$ (§. 253. *Geom.*). Est vero $PM^2 = ax$ (§.

388. *Analyſ. fin.*), adeoque $FM^2 = x^2 + 2xy + y^2 + ax$ (§. 417. *Geom.*). Quamobrem cum ſit $FH^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 - ay - 2xy + y^2$ *per demonſtr.* erit itidem *per demonſtrata.*

$$x^2 - 2xy + y^2 + ax = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 - ay - 2xy + y^2$$

adeoque $o = \frac{1}{4}a^2 - ay$

$$ay = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{4}a$$

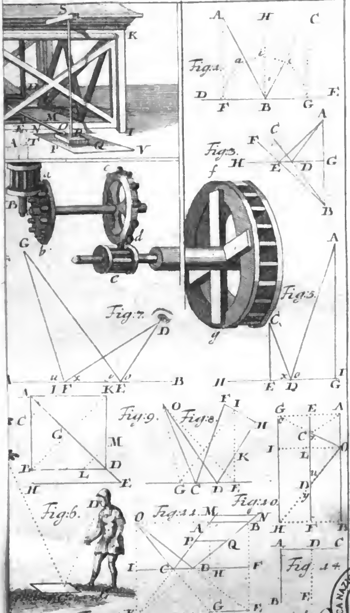
THEOREMA. Si radius parallelus FM vel ME incidat in parabolam AMN, poſt reflexionem in puncto F cum axe concurrit, quod a vertice A quarta parametri parte diſtat.

SCHOLION.

360. *Non abſimili modo punctum, ubi radius reflexus quicunque cum axe alterius curvæ concurrit, inveniri poteſt.*

FINIS CATOPTRICÆ.

ELE-



atoptr: Tab: I.

Lit. C

ſphærico concavo major radio; erit $AB > AC$ & $AB + AC > 2\,AC$ (§. 90. *Arithm.*). Quamobrem cum ſit $CF = \frac{AC.\ BC}{AB + AC}$ (§. 312) & $\frac{AC.\ BC}{2\,AC} = \frac{1}{2}\,BC$; erit $CF < \frac{1}{2}\,BC$ (§. 202. *Arithm.*), hoc eſt, diſtantia puncti concurſus a centro eſt < $\frac{1}{2}\,BC$, ſeu quarta diametri parte.

COROLLARIUM 5.

317. Quamobrem cum focus radiorum parallelorum (qui proprie focus dicitur) diſtet a centro intervallo $\frac{1}{2}\,BC$; radius vero divergens AD cum axe poſt reflexionem concurrat intervallo minore quam $\frac{1}{2}\,BC$; punctum concurſus F erit inter centrum & focum radiorum parallelorum.

COROLLARIUM 6.

318. Quodſi fuerit $AB = BC$, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit in centro ſpeculi ſphærici concavi, erit $BF = \frac{BC.\ BC}{2BC - BC}$ (§. 312) $= \frac{BC.\ BC}{BC} = BC$, hoc eſt, punctum concurſus erit in ipſo centro C. Idem etiam patet hoc modo. $CF = \frac{AC.\ BC}{BA + AC}$ (§. 312). Sed quando $AB = BC$, erit $AC = AB - BC = o$, adeoque $CF = o$, hoc eſt, diſtantia puncti concurſus a centro nulla eſt, conſequenter punctum concurſus in ipſo centro eſt, ſeu radius reflexus cum axe in puncto radiante concurrit.

COROLLARIUM 7.

319. Quodſi fuerit $AB = \frac{1}{2}\,BC$, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit in foco radiorum parallelorum (§. 313); erit $BF = \frac{\frac{1}{2}\,BC.\ BC}{BC - BC}$ (§. 312) $= \frac{\frac{1}{2}\,BC.\ BC}{o}$. Quamobrem cum BF in hoc caſu ſit quantitas infinita, punctum concurſus cum axe a ſpeculo infinito intervallo diſtat. Quoniam itaque radius ex foco in ſpeculum incidens poſt reflexionem cum axe non concurrit, niſi intervallo infinito, hoc eſt, nunquam; radius ex foco in ſpeculum incidens erit poſt reflexionem axi parallelus, quemadmodum ſupra demonſtratum (§. 224).

COROLLARIUM 8.

320. Similiter ſi fuerit $AB = \frac{1}{2}\,BC$; erit $CF = BC.\ (AB - BC) : (2\,AB - BC)$ (§. 313) $= \frac{BC - \frac{1}{2}BC}{BC - BC} = \frac{-\frac{1}{2}\,BC^2}{o} = \infty$. Eſt igitur diſtantia puncti concurſus a centro infinita, hoc eſt, radius ex foco in ſpeculum concavum incidens poſt reflexionem ultra centrum concurrit intervallo infinito, hoc eſt, nunquam: id quod cum corollario præcedente convenit.

COROLLARIUM 9.

321. Quodſi fuerit $AB < CB$, ſed

sed $> \frac{1}{2}$ CB, hoc est, si punctum radians inter focum & centrum consistat, erit $2AB > CB$. Ponamus excessum rectæ 2 AB supra CB esse rectam quandam GH: erit

$$2AB = CB + GH$$

$$2AB.\tfrac{1}{2}CB = CB.\tfrac{1}{2}CB + GH.\tfrac{1}{2}CB$$

& $2AB - CB = GH$

$$\frac{AB.\ CB}{2AB-CB} = \frac{CB.\tfrac{1}{2}CB + \tfrac{1}{2}CB}{GH}$$

(§. 94. *Arithm.*)

$$\frac{AB.\ CB}{2AB-CB} > \tfrac{1}{2}CB$$ (§. 84. *Arithm.*)

Enimvero $FB = \frac{AB.\ CB}{2AB-CB}$ (§. 313).

Ergo $FB > \frac{1}{2}CB$ (§. 89 *Arithm.*)

hoc est, si punctum radians inter centrum atque focum constituatur, radius divergens ab axe post reflexionem cum eodem concurrit in distantia quarta diamatri parte majore a superficie speculi.

COROLLARIUM 10.

322. Iisdem positis, quæ in corollario præcedente, erit

$$2AB = CB + GH$$

$$AB = \tfrac{1}{2}CB + \tfrac{1}{2}GH$$

$$AB - CB = \tfrac{1}{2}GH - \tfrac{1}{2}CB$$

$$(AB-CB)\,CB = \tfrac{1}{2}GH.CB - \tfrac{1}{2}CB^2$$

$$\frac{(AB-CB)\,CB}{2AB-CB} = \tfrac{1}{2}CB - \frac{\tfrac{1}{2}CB^2}{GH}$$ (§. 94. *Arithm.*).

$$< \tfrac{1}{2}CB$$ (§. 84. *Arithm.*)

Sed $FC = \frac{(AB-BC)\,BC}{2AB-CB}$

Ergo $FC < \frac{1}{2}CB$ (§. 89. *Arithm.*)

hoc est, si punctum radians inter centrum atque focum constituitur, radius divergens ab axe post reflexionem cum eodem concurrit in distantia a centro quarta diametri parte minore.

COROLLARIUM 11.

323. Quoniam si ex puncto radiante inter centrum & focum constituto radius in speculum sphæricum concavum non procul ab axe incidit, ab eodem reflexus cum axe concurrit in distantia majore quarta diametri parte a superficie speculi (§. 321) & minore quarta diametri parte a centro (§. 322); focus autem a centro non minus, quam a superficie dimidia radii seu quarta diametri parte distat (§. 313); punctum concursus in hoc casu inter focum atque centrum est.

COROLLARIUM 12.

324. Si denique $AB < \frac{1}{2}CB$, hoc est, si punctum radians fuerit inter focum & superficiem speculi; erit etiam $2AB < CB$ (§. 180. *Arithm.*) & hinc $2AB - BC$ quantitas negativa (§. 17. Tab. VII. Fig. 63.

(§. 17. *Analyſ. finit.*), conſequenter FB = $\frac{AB. BC}{2AB-BC}$ eſt quantitas negativa (§. 32. *Analyſ. fin.*): id quod indicio punctum concurſus eſſe poſt ſpeculum. Ut enim ſit poſitiva, fieri debet $\frac{AB. BC}{BC-2AB}$.

COROLLARIUM 13.

325. Quoniam radius AD ex puncto A inter focum & ſuperficiem ſpeculi poſito in ſuperficiem ſpeculi incidens ita reflectitur in DG, ut retro continuatus concurrat cum axe poſt ſpeculum in F; ex puncto F poſt reflexionem ab axe divergit (§. 84. *Geom.*).

COROLLARIUM 14.

Tab. VII. Fig. 64. 326. Cum punctum radians A ſupponatur in axe ſpeculi, qui utpote per centrum C tranſiens (§. 470. *Geom.*) ad ſuperficiem ſpeculi perpendicularis (§. 38. *Analyſ. infinit.*); erit axis ſpeculi cathetus incidentiæ (§. 16). Quamobrem cum in ſpeculo ſphærico concavo plerumque locus imaginis ſit in concurſu radii reflexi cum catheto incidentiæ (§. 236); per ea, quæ de puncto concurſus dicta ſunt, locus imaginis in diverſis caſibus determinantur, ſuntque diſtantiæ illius puncti a ſuperficie ſpeculi diſtantiæ imaginum a ſpeculo.

COROLLARIUM 15.

327. Sit diſtantia punctorum radiantium a ſuperficie ſpeculi in ratione $1:m$. Erunt ergo diſtantiæ imaginum a ſpeculo, ut $\frac{AB. BC}{2AB-BC}$ ad $\frac{mAB. BC}{2mAB-BC}$ (§. 311. 326) conſequenter ut $\frac{1}{2AB-BC}$ ad $\frac{m}{2mAB-BC}$ (§. 181. *Arithm.*), ſeu ut $2m AB - BC$ ad $2mAB - mBC$ (§. 178. *Arithm.*). Quodſi ſit $m > 1$; erit $2m AB - BC > 2m AB - m BC$ ſi vero $m < 1$; erit $2m AB - BC < 2mAB - mBC$.

COROLLARIUM 16.

328. Quodſi ergo AB > BC, hoc eſt, ſi punctum radians fuerit ultra centrum a ſpeculo remotum; objecto a ſpeculo recedente imago ad idem accedit (§. 327).

COROLLARIUM 17.

329. Quodſi punctum radians fuerit ultra centrum a ſpeculo remotum, objecto ad ſpeculum accedente imago ab eodem recedit.

COROLLARIUM 18.

330. Sit jam $2 AB < BC$, adeoque $AB < \frac{1}{2} BC$, hoc eſt, ſit punctum radians inter focum & ſuperficiem ſpeculi; erunt diſtantiæ imaginum ut $\frac{AB. BC}{BC-2AB}$ ad $\frac{mAB. BC}{BC-2mAB}$ (§. 324. 326), conſequenter ut $BC - 2mAB$ ad $mBC - 2mAB$. Quodſi ergo $m > 1$; erit $m BC > BC$, adeoque $BC - 2m AB < m BC - 2m AB$. Si vero $m < 1$; erit $BC > m BC$, $BC - 2m AB > m BC - 2m AB$ (§. 97. *Arithm.*).

COROLLARIUM 19.

331. Quodſi ergo objectum intra focum

focum, & superficiem speculi constitutum ad focum accedit, seu a speculo recedit, imago quoque ab eodem recedit.

COROLLARIUM 20.

332. Si vero idem a foco recedit, seu ad speculum accedit; imago quoque ad idem accedit.

COROLLARIUM 21.

333. Quoniam itaque imago objecti intra focum & superficiem speculi constituti post speculum apparet (§.324); imago majore intervallo post seculum comparet, si objectum speculo propius, quam si ab eodem remotius.

COROLLARIUM 22.

334. Quodsi BC = ∞, hoc est, si radius ponatur infinitus; speculum concavum degenerat in planum. Enimvero tum AB respectu ipsius BC infinite parva, adeoque nihilo æqualis (§. 4 *Analys. infin.*). Quamobrem etiam 2 AB nihilo æquivalet, adeoque $FB = \frac{AB.\ BC}{BC-2AB}$ (§.312) $= \frac{AB-BC}{BC} = AB$, hoc est, imago tanto intervallo videtur post speculum planum, quanto ante ipsum abest: quemadmodum superius demonstratum est (§. 56).

SCHOLION.

335. *Ex corollariis hisce apparet, quanta facilitate ex formula analytica deducantur palmaria de speculis concavis theoremata. Poteramus ex eadem quoque deducere, quæ ad specula convexa pertinent; sed majoris evidentiæ causa problema sequens subnectimus.*

PROBLEMA 29.

336. *Data distantia* AB *puncti radiantis* A *a superficie speculi sphærici convexi* DBE, *invenire punctum* F, *in quo radius reflexus* GF *cum axe* AB *concurrit.* Tab. VII. Fig. 65.

RESOLUTIO.

Sit in C centrum speculi & radius $CB = a$, distantia puncti radiantis a superficie speculi $AB = b$, distantia puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ ab eadem superficie speculi $BF = x$; erit distantia ejusdem a centro $FC = a - x$. Jam $u = o$ (§. 144) & $n = t$ atque $o = y$ (§. 150. *Geom.*), adeoque $t = y$ (§. 87. *Arithm.*), consequenter ob $t = n + m$ (§. 239. *Geom.*) $y = n + m$ (§. 87. *Arithm.*). Cum ut in problemate præcedente radius incidens AD ipsi AB admodum vicinus ponatur, erit ut ibidem $AD = AB$, $FD = FB$ & anguli n, m, y valde exigui, consequenter $y : m = FC : BF$ & $m : n = AB : BC$ (§. 19. *Trigon.*). Quare cum sit $m + n : m = AB + BC : AB$ (§. 190. *Arithm.*) & ob $m + n = y$ per demonstrata $y : m = AB +$

BC:AB (§. 168. *Arithm.*); erit etiam (§. 168. *Arithm.*).

$$AC : AB = FC : BF$$

adeoque $a+b : b = a-x : x$

$$ab - bx = ax + bx$$

$$ab = 2bx + ax$$

$$\frac{ab}{2b+a} = x = FB$$

hoc est $\frac{AB.BC}{2AB+BC} = \frac{AB.BC}{AC+BA} = FB$

seu $FB : BC = AB : AC+BA$

THEOREMA. Si radius AD incidens in superficiem speculi convexi ab axe AC non nimis divergit; erit distantia puncti concursus radii reflexi cum axe a superficie speculi ad radium convexitatis ut distantia puncti radiantis a superficie speculi AB ad compositam ex distantia ejusdem puncti a centro & distantia a superficie AC + BA.

Quodsi distantia puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ F a centro speculi FC quæratur, erit ob

$$CF = BC - BF$$

$$CF = a - \frac{ab}{2b+a}$$

$$= \frac{2ab + a^2 - ab}{2b+a}$$

$$= \frac{ab + a^2}{2b+a}$$

$$= \frac{(AB+BC)BC}{2AB+BC} = \frac{AC.BC}{AC+AB}$$

adeoque $AC+AB : AC = BC : CF$

THEOREMA. Si radius AD incidens in superficiem speculi sphærici convexi non multum ab axe ejus AC divergit, erit distantia puncti concursus F radii reflexi GF a centro speculi FG ad radium convexitatis BC ut distantia puncti radiantis a centro speculi AC ad compositam ex eadem distantia AC & distantia ejusdem a superficie speculi AB.

COROLLARIUM 1.

337. Quoniam $AC + BA > AB$; erit $\frac{AB}{AC+BA} < 1$ (§. 221. *Arithm.*), adeoque $\frac{AB.BC}{AC+BA} < BC$ (§. 180. *Arithm.*). Distantia igitur puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ in speculo sphærico convexo ab ejus superficie semper minor est radio.

COROLLARIUM 2.

338. Quare cum imago puncti radiantis A videatur in isto puncto concursus (§. 151); in speculo sphærico convexo semper videtur inter centrum & superficiem speculi.

COROLLARIUM 3.

339. Sit $AB = \infty$, erit BC respectu AB infinite parva, adeoque $2AB + BC = 2AB$ (§. 4. *Anal. infin.*), consequenter $\frac{AB.BC}{2AB+BC} =$

AB.

$\frac{AB. BC}{2AB} = \frac{1}{2}BC = FB$. Distantia igitur puncti concursus radii reflexi cum catheto incidentiæ nunquam majore intervallo a superficie speculi distat, quam dimidio convexitatis radio.

COROLLARIUM 4.

340. Quoniam distantia puncti radiantis habetur pro infinita, si radius ab axe divergens eidem ad sensum sit parallelus; radius a puncto remoto in superficiem speculi sphærici convexi incidens cum catheto incidentiæ concurrit intervallo quartæ diametri partis.

COROLLARIUM 5.

341. In speculo sphærico convexo imago nunquam majore intervallo distat a superficie speculi quam quarta diametri parte (§. 339) & imago quidem objecti valde remoti a superficie speculi quarta diametri parte distat.

SCHOLION.

342. *Objectum an valde remotum sit, æstimatur ex ratione radii* BC *ad ejus distantiam a superficie speculi* AB. *In minoribus adeo speculis minor distantia ad hoc sufficit, quam in majoribus.*

COROLLARIUM 6.

343. Quodsi radius convexitatis BC fuerit infinitus, hoc est, si speculum fuerit planum; erit 2AB respectu BC $= o$ (§. 4. *Anal. infin.*), adeoque $BF = \frac{AB. BC}{BC} = AB$. In speculo itaque plano imago tanto intervallo videtur post speculum, quanto ante ipsum ab eodem abest.

COROLLARIUM 7.

344. Sit ratio distantiarum punctorum radiantium $= 1 : n$; erunt distantiæ imaginum a superficie speculi inter se ut $\frac{ab}{2b + a}$ ad $\frac{nab}{2nb + a}$, adeoque ut $ab\,(2nb + a)$ ad $nab\,(2b + a)$ (§. 178. *Arithm.*), consequenter ut $2nb + a$ ad $2nb + na$ (§. 181. *Arithm.*).

SCHOLION.

345. *Quodsi ergo* n *explicetur per aliquem numerum, denturque* a & b *ratio distantiarum innotescit in numeris.*

COROLLARIUM 8.

346. Quodsi $1 : n$ fuerit ratio majoris inæqualitatis seu $n > 1$; erit $na > a$, adeoque $2nb + na > 2nb + a$ (§. 90. *Arithm.*). Crescente adeo distantia puncti radiantis extra speculum crescit distantia imaginis a superficie speculi intra speculum. Recedente igitur objecto a speculo, imago ejus intra speculum a superficie versus centrum recedit.

COROLLARIUM 9.

347. Quodsi $1 : n$ fuerit ratio minoris inæqualitatis, seu $n < 1$; erit $na < a$, adeoque $2nb + na < 2nb + a$ (§. 90. *Arithm.*). Decrescente adeo distantia puncti radiantis a speculo decrescit distantia imaginis a superficie. Visibilis itaque ad speculum

culum accedentis imago ad ejus superficiem accedit a centro recedens.

COROLLARIUM 10.

348. Quodsi b fuerit $= o$, hoc est, si visibile superficiem speculi tangit, erit $\frac{ab}{2b+a} = o$, adeoque distantia a superficie speculi nulla est. Videtur igitur imago in ipsa speculi superficie.

SCHOLION.

349. *Atque ex his corollariis intelligitur, cur imago styli longioris superficiem speculi altero suo extremo contingentis & diametro speculi in directum siti sit eidem continua & in directum sita.*

COROLLARIUM 11.

350. Si fuerit $b = a$, seu visibile a speculo radii intervallo distet; erit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{a^2}{3a} = \frac{1}{3}a$; seu imago tertia semidiametri parte a superficie speculi distat, adeoque duabus tertiis a centro.

COROLLARIUM 12.

351. Quodsi fuerit $b = na$ & $n > 1$, seu distantia puncti radiantis major radio; erit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{na^2}{2na+a} = \frac{na}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}a$. Quoniam $2n+1 > n$; erit $\frac{n}{2n+1}a < a$ (§. 121. *Arithm.*). Idem adhuc obtinet, si $n < 1$. Distantia igitur imaginis a superficie speculi continuo major est radio, quantacunque fuerit distantia imaginis: id quod jam alio modo ante elicuimus.

COROLLARIUM 13.

352. Quodsi fuerit $n = \infty$, erit unitas respectu $2n$ nihilo æqualis (§. 4. *Anal. infin.*) & distantia imaginis a superficie speculi $\frac{na}{2n} = \frac{1}{2}a$, seu dimidio radio æqualis: quemadmodum denuo jam ante reperimus.

COROLLARIUM 14.

353. Quodsi ponamus $\frac{ab}{2b+a} = \frac{1}{4}a$; hoc est, si imago a superficie speculi distet intervallo quartæ partis diametri; erit $2ab = 2ab + aa$, adeoque $aa = o$: quod cum sit absurdum, imago a superficie speculi nunquam quarta diametri parte distare potest, si radius incidens a catheto incidentiæ divergit.

SCHOLION.

354. *Consentit hoc cum superioribus, ubi distantiam visibilis infinitam requisivimus, ut imago distet a superficie speculi quarta diametri parte: tum enim radius incidens catheto incidentiæ censetur parallelus.*

COROLLARIUM 15.

355. Si radii duorum speculorum fuerint ut a ad na, sitque $n > 1$; erunt

erunt distantiæ imaginum a superficiebus speculorum, visibili ab utroque speculo eodem intervallo remoto, ut $\frac{ab}{2b+a}$ ad $\frac{nab}{2b+na}$, adeoque ut $2b+na$ ad $2nb+na$ (§. 178. 181. *Arithm.*). Quamobrem cum sit $2nb > 2b$ ex hypothesi, distantia imaginis in speculo majoris sphæricitatis major est, in speculo minoris minor, seu imago ejusdem visibilis in eadem distantia a speculo majore intervallo videtur post speculum, si majoris fuerit sphæræ segmentum, quam si minoris fuerit.

COROLLARIUM 16.

356. Sit $\frac{ab}{2b+a} = b$, seu distet imago visibilis tanto intervallo a superficie speculi, quanto ante ipsum idem abest; erit $ab = 2bb + ab$, adeoque $2bb = 0$: quod cum sit absurdum, in speculo sphærico convexo imago nunquam tanto intervallo post speculum esse potest, quanto ante ipsum objectum constituitur.

COROLLARIUM 17.

357. Sit $\frac{ab}{2b+a} = \frac{1}{2}b$, seu sit distantia imaginis post speculum distantiæ visibilis a speculo dimidia; erit $ab = bb + \frac{1}{2}ab$, adeoque $\frac{1}{2}ab = bb$, seu $\frac{1}{2}a = b$. Objectum igitur a speculo intervallo dimidii radii speculi ab eodem distare debet, ut imaginis distantia sit dimidia distantiæ objecti.

SCHOLION.

358. *Ex his corollariis intelligitur, quanta facilitate plurima Dioptricæ theoremata inveniri possint, ope theorematum generalium, quæ & ipsa absque multa difficultate eruuntur. Poterat hæc theoria etiam extendi ad alias curvas: possunt tamen aliis quoque methodis puncta concursus radiorum reflexorum cum axe inveniri. Ut industriam lectoris excitemus, sequens addere lubet problema.*

PROBLEMA 30.

359. *Invenire punctum* F, *in quo radius* GM *vel* EM *axi* IK *parabolæ* AMN *cum eodem post reflexionem concurrit, sive in concavitatem, sive in convexitatem incidat.* Tab. VII. Fig. 66.

RESOLUTIO.

Sit DH ad parabolam in M normalis & parameter parabolæ $= a$, $AP = x$, $AF = y$; erit $PH = \frac{1}{2}a$ (§. 36. *Analys infin.*), $FP = x - y$ & $FH = \frac{1}{2}a + x - y$. Jam ob parallelismum rectarum GM & AK angulus $GMH = MHF$ (§. 233. *Geom.*) & ex natura reflexionis $FMH = GMH$ (§. 144), adeoque $MHF = FMH$ (§. 87. *Arithm.*), consequenter $FH = FM$ (§. 253. *Geom.*). Est vero $PM^2 = ax$ (§.

388. *Analyſ. fin.*), adeoque $FM^2 = x^2 + 2xy + y^2 + ax$ (§. 417. *Geom.*). Quamobrem cum ſit $FH^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 - ay - 2xy + y^2$ *per demonſtr.* erit itidem *per demonſtrata.*

$$x^2 - 2xy + y^2 + ax = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 - ay - 2xy + y^2$$

adeoque $o = \frac{1}{4}a^2 - ay$

$$ay = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{4}a$$

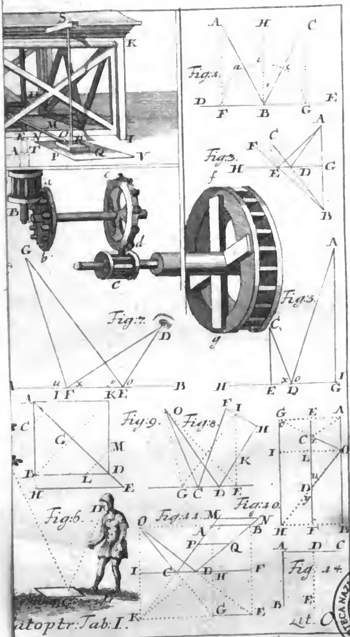
THEOREMA. Si radius parallelus FM vel ME incidat in parabolam AMN, poſt reflexionem in puncto F cum axe concurrit, quod a vertice A quarta parametri parte diſtat.

SCHOLION.

360. *Non abſimili modo punctum, ubi radius reflexus quicunque cum axe alterius curvæ concurrit, inveniri poteſt.*

FINIS CATOPTRICÆ.

ELE-



atoptr: Tab: I.

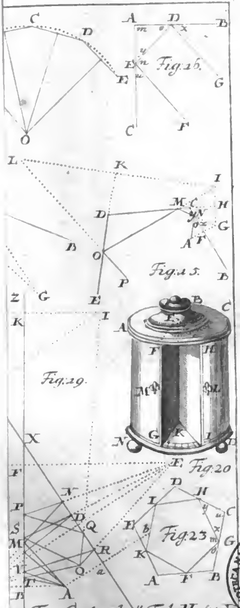
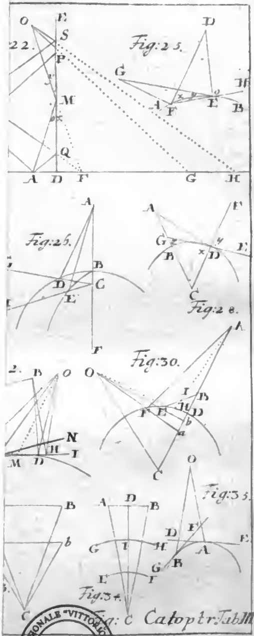


Fig. Catoptr.y Tab. II. Lit. F.




Fig:22.
Fig:25.
Fig:26.
Fig:28.
Fig:30.
Fig:33.
Fig:34.
Fig: c
Catoptr.Tab.III.

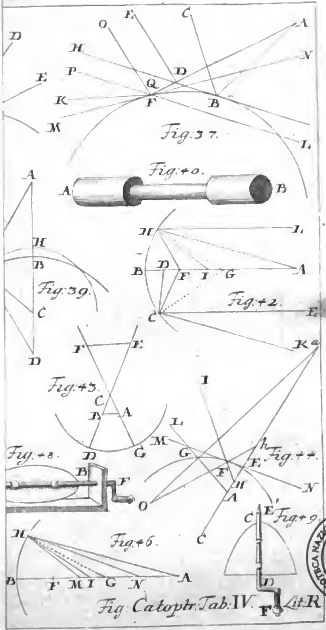


Fig: Catoptr. Tab: IV. Lit: R

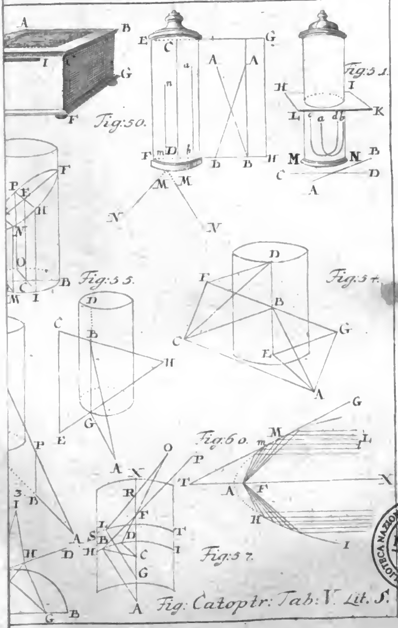
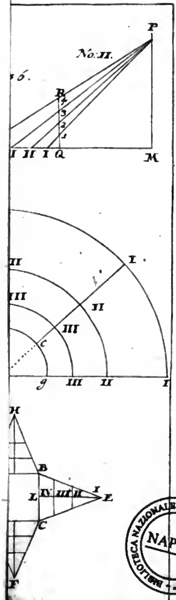


Fig: Catoptr: Tab: V. Lit. S.



Tab:VI. Lit. T.

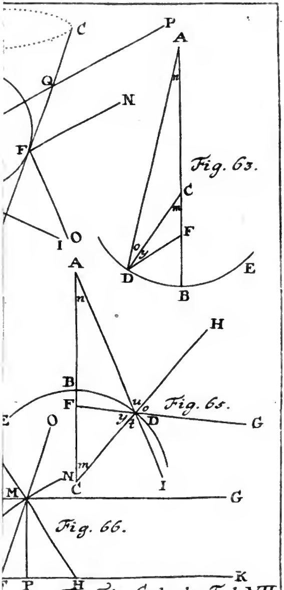


Fig. Catoptr. Tab. VII.

ELEMENTA
DIOPTRICÆ.

PRÆFATIO.

Hodie Dioptrica teleſcopiorum ac microſcopiorum perfectioni potiſſimum deſtinatur: unde ratio refractionis in ſpecillis ſeu vitris politis cujuscunque figuræ inprimis in ea explicatur. Plerique Autores utuntur proportione prope vera angulorum inclinationis & refractionis, quam in his Elementis quoque illuſtravi: *Molyneux* & *Hugenius* ſoli veram proportionem ſinuum anguli inclinationis & refracti adhibent, quamvis diverſa ratione. Ille enim calculo geometrico puncta concurſus & diſperſionis radiorum eruit: hic vero generaliter absque certa hypotheſi eadem invenire docet. Ego ex vera refractionis lege indolem refractionis generaliter in omni diaphano fi-

ELEMENTA DIOPTRICÆ.

CAPUT I.

DE

FUNDAMENTIS DIOPTRICÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Dioptrica* seu *Anaclastica* est scientia visionis refractæ.

SCHOLION.

2. *Potissimum autem in Dioptrica traditur refractio luminis in vitris lenticularibus, quia ex iis tum telescopia, tum microscopia, tum vitra caustica, tum aliæ machinæ dioptricæ parantur: propterea quod hæ theoriæ utilitate sua sese commendant.*

DEFINITIO 2.

3. *Visio refracta* est, quæ fit per radios refractos.

DEFINITIO 3.

Tab. I. Fig. 1. 4. *Radius incidens* seu *Linea incidentiæ* est recta AB, per quam lumen irrefractum in eodem medio propagatur a puncto refractionis usque ad superficiem corporis refringentis HKLI.

DEFINITIO 4.

5. *Radius refractus* seu *Linea refractionis* est recta BC, per quam lumen post refractionem in medio diversæ densitatis ab eo, per quod a puncto radiante emanaverat, propagatur.

DEFINITIO 5.

6. *Superficies refringens* est superficies diaphani, in qua fit refractio, seu in qua radius incipit a via pristina deviare.

DEFINITIO 6.

7. *Punctum refractionis* est punctum B in superficie refringente, in quo refractio contingit. Vocatur idem respectu radii incidentis AB *punctum incidentiæ*. Tab. I. Fig. 1.

DEFINITIO 7.

8. *Planum refractionis* est, in quo sunt radius incidens AB & refractus BC.

DEFINITIO 8.

9. *Axis incidentiæ* est recta DB ad superficiem refringentem in pun-

puncto incidentiæ perpendicularis, ducta in eodem medio, unde incidit radius.

DEFINITIO 9.

10. *Axis refractionis* est recta BE ad superficiem refringentem in puncto refractionis B perpendicularis, ducta in medio refringente.

DEFINITIO 10.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Angulus incidentiæ* est angulus ABI, quem facit radius incidens AB cum superficie refringente HI.

DEFINITIO 11.

12. *Angulus inclinationis* est angulus ABD, quem facit radius incidens AB cum axe incidentiæ DB.

DEFINITIO 12.

13. *Angulus refractionis* est angulus MBC, quem facit radius refractus BC cum incidente MB ultra superficiem refringentem protracto.

DEFINITIO 13.

14. *Angulus refractus* est angulus CBE, quem facit radius refractus BC cum axe refractionis BE.

DEFINITIO 14.

15. *Lens* seu *specillum* dicitur vitrum formæ lenticularis.

DEFINITIO 15.

16. *Vitrum plano-convexum* est, cujus superficies altera convexa, altera plana. Communiter intelligitur convexitas sphærica, nisi expresse contrarium moneatur.

DEFINITIO 16.

17. *Vitrum convexo-convexum* est, cujus utraque superficies convexa. Dicitur etiam *utrinque convexum*. Estque *vel æqualiter convexum*, si eadem diameter utriusque convexitatis; vel *inæqualiter convexum*, si convexitatum diametri diversæ.

DEFINITIO 17.

18. *Vitrum plano-concavum* est, cujus altera superficies concava, altera plana. Communiter intelligitur concavitas sphærica, nisi diserte contrarium moneatur.

DEFINITIO 18.

19. *Vitrum concavo-concavum* est, cujus utraque superficies concava. Dicitur etiam *utrinque concava*. Estque vel *æqualiter concava*, si concavitatis eadem diameter; vel *inæqualiter concava*, si concavitatum diametri sunt diversæ.

DEFINITIO 19.

20. *Meniscus* est vitrum, cujus altera superficies convexa, altera concava. Vocatur etiam interdum *Lunula*.

DE-

DEFINITIO 20.

21. *Axis lentis* est recta, transiens per axem ejus solidi, cujus segmentum lens existit. E. gr. Lens sphærica plano-convexa est segmentum alicujus sphæræ: ejus itaque axis idem est cum axe sphæræ, seu recta per hunc transiens.

DEFINITIO 21.

22. *Punctum concursus* est punctum, in quo radii refracti concurrunt, si per refractionem fiunt convergentes. Vocatur etiam *Focus*.

DEFINITIO 22.

23. *Punctum dispersus* est punctum, ex quo radii refracti divergunt, si post refractionem divergentes evadunt. Vocatur etiam *Focus virtualis*.

PROBLEMA I.

24. *In legem refractionis per experimenta inquirere.*

RESOLUTIO.

Si desideretur refractio ex aëre in vitrum, qua potissimum opus habemus in Dioptrica,

Tab. I. Fig. 2. 1. Paretur cubus vitreus CBEDGFHI exacte politus.

2. Jungantur ad angulos rectos duo asserculi dedolati NIPO & NABI, ita ut latitudo communis IN excedat latus cubi IH, multo magis autem idem superet longitudo inferioris NO: altitudo vero minoris CH sit lateri cubi æqualis.

3. Obvertatur hoc instrumentum anaclasticum Soli in diversis altitudinibus supra horizontem noteturque terminus umbræ tam intra cubum in K, quam extra eum in L.

4. Quoniam CK est radius refractus, CL vero irrefractus; erit HCK angulus refractus (§.14), KCL angulus refractionis (§.13) & HCL angulus inclinationis (§. 12), consequenter si CL sumatur pro sinu toto, HL sinus anguli inclinationis, & HK sinus anguli refracti (§.2. *Trigon.*). Observare igitur licebit rationem sinus anguli refracti HK ad sinum anguli inclinationis HL, utramque nempe lineam HK & HL, accurate in scala subtiliter divisa dimetiendo. Tab. I. Fig. 3.

5. Et quia in triangulo HCL ad H rectangulo latera HC & HL dantur, itemque in triangulo CHK latera HC & HK; invenietur angulus inclinationis HCL & angulus refractus HCK (§.38. *Trigon.*).

6. Si loco cubi vitrei adhibeatur vasculum aqua vel alio liquore plenum, refractio ex aere in a-

quam vel liquorem alium observabitur.

COROLLARIUM 1.

25. Radius in ingressu ex aëre in vitrum aut generaliter ex medio rariori in densius ad axem refractionis frangi observatur: hinc angulus refractus minor angulo inclinationis & perpendicularis ad superficiem refringentem irrefractus transit.

COROLLARIUM 2.

26. Ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti constans deprehenditur, nempe, si refractio fit ex aëre in vitrum, major quam 114 ad 76, minor vero quam 115 ad 76, hoc est, quam proxime ut 3 ad 2, observante *Hugenio* (a).

SCHOLION 1.

27. *Consentit cum hac observatione altera Illustr.* Newtoni (b), *qua sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti exhibetur ut* 31 *ad* 20, *hoc est, itidem fere ut* 3 *ad* 2. *Hac igitur proportione ad explicandas refractiones in lentibus vitreis commode utimur in Dioptricis. Quamvis enim in omni vitro non sit eadem refractionis quantitas; in argumentis tamen physicis omnimoda accuratione non est opus.*

SCHOLION 2.

28. *In aqua pluvia* Cartesius *rationem sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti deprehendit* (c) *ut* 250 *ad* 187, *hoc est, propemodum ut* 4 *ad* 3: *cum quo denuo conspirat observatio* Newtoni (d), *vi cujus ratio obtinet ut* 529 *ad* 396. *Ceterum idem* Newtonus *in spiritu vini eam facit ut* 100 *ad* 73, *quæ itidem a sesquitertia non multum abit; in aere vero ut* 3851 *ad* 3850.

SCHOLION 3.

29. *Multa dantur methodi observandi quantitatem refractionis, passim apud autores explicatæ. Ego hic tradidi eam, quam* Keplerus (e) *commendat, quia nulla Dioptrices principia supponit, alias additurus inferius, ubi earum fundamenta demonstrabuntur.*

COROLLARIUM 3.

30. Uno igitur angulo inclinationis &, qui ipsi respondet, refracto per observationem reperto, facile per computum eruuntur anguli refracti singulis angulis inclinationis respondentes.

COROLLARIUM 4.

31. Si angulus inclinationis graduum 70, angulus refractus 38° 50′, observantibus *Kirchero* (f) & *Zahnio* (g).

SCHO-

(a) in Dioptrica p. 5.
(b) Optic. lib. 2. part. 3. p. 232. edit. Lat.
(c) in Tract. de Meteoris c. 8. §. 10. p. m. 221.
(d) loc. cit.
(e) Dioptr. lib. 1. prop. 3.
(f) in Arte magna lucis & umbræ lib. 8. part. 1. c. 2.
(g) in Oculo artific. fund. 2. synt. 1. c. 4. f. 228. & seqq.

SCHOLION 4.

32. *Et hinc* Zahnius *condidit tabulam refractionum ex aëre in vitrum ad ſingulos gradus anguli inclinationis, quam hic contractam exhibemus.*

Angul. inclin.	Angul. refractus.	Angul. refractionis.
1	0°. 40'. 5''	0°. 19'. 55''
2	1. 20. 6	0. 39. 54
3	2. 0. 3	0. 59. 56
4	2. 40. 5	1. 19. 55
5	3. 20 3	1. 39. 57
6	3. 59. 50	2. 0. 10
7	4. 39. 48	2. 20. 12
8	5. 19. 49	2. 40. 11
9	5. 59. 35	3. 0. 25
10	6. 39. 16	3. 20. 44
11	7. 18. 55	3. 41. 5
12	7. 58. 32	4. 1. 28
13	8. 38. 2	4. 21. 58.
14	9. 17. 25	4. 42. 35
15	9. 56. 46	5. 3. 14
16	10. 35. 59	5. 24. 1
17	11. 15. 2	5. 44. 57
18	11. 54. 5	6. 5. 55.
19	12. 34. 36	6. 25. 24
20	13. 11. 35	6. 48. 25
25	16. 22. 51	8. 37. 9
30	19. 29. 29	10. 30. 31
35	22. 30. 18	12. 29. 42
40	25. 34. 6	14. 35. 54
45	28. 9. 19	16. 50. 41
50	30. 44. 35	19. 15. 25
60	35. 18. 12	24. 41. 48
70	38. 50. 0	31. 10. 0
80	41. 5. 15	38. 54. 55
90	41. 51. 40	48. 8 20

COROLLARIUM 5.

33. Quodſi itaque angulus inclinationis fuerit minor quam 20 graduum, & radius ex aëre in vitrum refrangatur; angulus refractionis erit propemodum pars tertia inclinationis. Angulus enim refractionis, qui convenit inclinationi unius gradus, a parte tertia deficit 5 ſecundis, angulus refractionis reſpondens inclinationi duorum graduum a parte tertia abeſt 9 ſecundis & ita porro. Angulo inclinationis 20 graduum reſpondet angulus refractionis 6°48'. 25'', adeoque excedit partem tertiam 8'25''. Sed angulus refractionis conveniens angulo inclinationis 30 graduum, partem tertiam jam ſuperat gradu dimidio & 31 ſecundis & inde exceſſus continuo fit major.

COROLLARIUM 6.

34. Quamdiu itaque angulus inclinationis minor fuerit quam 20 graduum; radius ex aëre in vitrum refrangitur ad axem refractionis ſeu incidentiæ tertia propemodum parte anguli inclinationis.

SCHOLION 5.

35. *Hoc principio utitur* Keplerus *ad demonſtrandas refractiones in ſpecillis in ſua Dioptrica & poſt ipſum uſi ſunt ſcriptores Dioptricæ plerique omnes. Exemplo enim* Alhazeni *&* Vitellionis, *legem refractionis quæſivit in ratione angulorum, adeoque ad veritatem puram pervenire non potuit. Conſtantem rationem eſſe ſinuum angulorum inclinationis & refracti, multiplici experimento detexit* Willebrordus Snellius, *quamvis non adverterit lineas, per quas rationem conſtantem* expli-

explicavit, esse illorum angulorum sinus. Ex ejus scripto non edito eandem rationem constantem non nominato Snellio *proposuit* Cartesius (h), *cui vulgo hoc inventum tribui solet.* Snellio *idem vindicat* Hugenius, *cui constabat,* Cartesium *Tractatum* Snellii *vidisse* (i). *Ceterum cum ex Optica* (§. 192) *constet, radios luminis omnes non ejusdem esse refrangibilitatis; constans illa ratio admittenda est diversa in singulis radiorum speciebus: unde quam a se observatam contendunt Autores, eam de radiis medium refrangibilitatis gradum habentibus, hoc est, viridibus intelligendam esse jam monuit perspicacissimus* Newtonus (k). Differentiam tamen adeo par-„ vam *judicat*, ut raro ejus ullam „ rationem haberi sit necesse.

PROBLEMA 2.

Tab. I. Fig. 1. 36. *In legem refractionis per rationes inquirere.*

RESOLUTIO.

Quoniam lumen in diversis mediis diversa quippe vi resistentibus eadem celeritate moveri nequit, sit ratio celeritatis luminis incidentis AB ad celeritatem refracti $BC = m:n$. Erunt itaque tempora, quibus lineæ AB & BC percurruntur in ratione nBA ad mBC (§. 28. *Mechan.*). Demittantur perpendiculares AQ & CP fiatque $AQ = a$, $CP = b$, $PQ = c$, $PB = x$, erit $BQ = c - x$, consequenter $BC = \sqrt{(bb + xx)}$ & $AB = \sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)}$, adeoque tempus, quo percurritur via $AB + BC = m\sqrt{(bb + xx)} + n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)}$: quod erit minimum aliquod, quia, cum natura semper via brevissima agat, lumen ex A in C via brevissima pervenire debet. Habemus adeo

$$\frac{mxdx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} + \frac{nxdx - ncdx}{\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}} = 0$$

(§. 61. *Analys. infinit.*)

& hinc

$$mx : \sqrt{(b^2+x^2)} = n(c-x) : \sqrt{(a^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$$

hoc est, $mPB : BC = nBQ : BA$

Fiat $BC = BA$

erit $mPB = nBQ$

consequenter $m:n = BQ:PB$

Quodsi ergo BA seu BC sumatur pro sinu toto, erit BQ sinus anguli A & PB sinus anguli C (§. 2. *Trigon.*), hoc est, quia AQ & PC ipsi DE parallelæ (§. 241. *Geom.*), PB sinus anguli CBE & BQ sinus ipsius ABD (§. 222. *Geom.*), nempe

(h) in Dioptrica c. 2. §. 2. p. m. 57.
(i) in Dioptrica p. 2 & 3.
(k) in Optica ax. 5. p. 5. & lib. 1. part. 1. prop. 6. p. 61. & seqq. edit. Lat.

pe PB sinus anguli refracti (§. 14), BQ vero sinus anguli inclinationis (§. 12). Patet adeo, *sinum anguli inclinationis esse ad sinum anguli refracti in ratione constante, ea nempe, quæ est celeritatis luminis ante refractionem ad celeritatem ejusdem post refractionem.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 1. 37. Quodsi radius refractus CB sumatur pro incidente, erit ut *n* ad *m* ita sinus anguli CBE ad sinum anguli refracti (§. 36). Est vero etiam ut *n* ad *m* ita sinus anguli CBE ad sinum anguli ABD (§. *cit.*). Ergo sinus anguli ABD est idem cum sinu anguli refracti (§. 177. *Arithm.*), consequenter ABD est angulus refractus incidentis CB (§. 2. *Trigon.*). Radius adeo CB si contraria ratione refringitur, cum incidente BA coincidet.

COROLLARIUM 2.

38. Quando itaque radius ex vitro in aërem, & generaliter ex medio densiori in rarius transit, ab axe incidentiæ seu refractionis refringitur, & hinc angulus refractus major est angulo inclinationis (§. 12. 14).

COROLLARIUM 3.

39. Si angulus inclinationis 30. gradibus minor; tum propemodum est MBC = $\frac{1}{3}$ MBE (§. 33. *Dioptr.* & §. 156. *Geom.*). Quare cum sit CBE = $\frac{2}{3}$ MBE; erit MBC = $\frac{1}{2}$ CBE, consequenter si refractio fit ex vitro in aërem & angulus inclinationis 30 gradibus minor; radius refringitur ab axe refractionis dimidia propemodum parte anguli inclinationis (§. 37).

SCHOLION.

40. *Atque hoc est alterum principium dioptricum, quo Autores fere omnes cum* Keplero *utuntur ad refractiones in specillis demonstrandas.*

COROLLARIUM 4.

41. Si refractio ex aëre in vitrum contingit, ratio sinus inclinationis ad sinum anguli refracti est ut 3 ad 2 (§. 26), si vero ex aëre in aquam fit, ut 4 ad 3 (§. 28). Ergo si refractio contraria ratione ex vitro vel aqua in aërem contingit, eorundem sinuum ratio erit in casu priore ut 2 ad 3, in posteriore ut 3 ad 4 (§. 37).

COROLLARIUM 5.

42. Quoniam ratio sinus inclinationis ad sinum refracti ut 3 ad 2, si refractio ex aëre in vitrum fit, vel ut 4 ad 3, si fit ex aëre in aquam, pertinet ad radios mediæ refrangibilitatis (§. 35); ratio quoque eorundem sinuum ut 2 ad 3, si refractio fit ex vitro in aërem, vel ut 4 ad 3, si fit ex aqua in aërem, obtinet in lumine mediæ refrangibilitatis.

COROLLARIUM 6.

43. Quoniam tamen differentia, quæ ex diverso refrangibilitatis gradu oritur adeo exigua est, ut attendi non mereatur (§. 35); ideo in refractione quoque, quæ fit ex vitro vel aqua in aërem non attendenda venit.

THEOREMA 1.

Tab. I. Fig. 4. & 5. 44. *Si recta* EF *secet superficiem refringentem quamcunque* GH *ad angulos rectos in puncto incidentiæ & ex puncto quocunque intra diaphanum densius* D *ducatur recta* DC *radio incidenti* AB *parallela; hæc refracto* CB *occurret in* C *eritque ad partem refracti* CB *ut sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD ipsi AB parallela, *per hypoth.* erit $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Sed si radius B C exit ex medio densiori in tenuius, veluti ex vitro in aërem $y > x$ (§. 38); si vero transit ex tenuiori in densius, veluti ex aere in vitrum, $y < x$ (§. 25): ergo in casu priore $y > o$, seu $o < y$, in posteriore $y < o$ (§. 89. *Arithm.*), consequenter in priore $o + u < y + u$, in posteriore $y + u < o + u$. Sunt vero in illo $y + u$, in hoc $o + u$ duobus rectis æquales (§. 147. *Geom.*). Ergo in illo $o + u$, in hoc $y + u$ duobus rectis minores sunt (§. 89. *Arithm.*) & hinc in utroque DC ipsi BC occurrit (§. 262. *Geom.*). *Quod erat unum.*

Jam cum $o = x$ *per demonstr.* adeoque angulus inclinationis (§. 12) & y sit angulus refractus (§. 14), sit vero præterea CB ad CD ut sinus anguli o ad sinum anguli y (§. 5. & 33. *Trigon.*); evidens est, quod sit CB ad CD in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

45. Quando igitur BC ex vitro in aërem exit, ad CD est in ratione subsesquialtera (§. 41): si vero ex aëre in vitrum transit, ad CD rationem sesquialteram habet (§. 26).

COROLLARIUM 2.

46. Quando lumen ex aqua in aërem exit; CB ad CD habet rationem subsesquitertiam (§. 41): si vero ex aëre in aquam transit, sesquitertiam (§. 28).

THEOREMA 2.

47. *Si recta* EF *secet superficiem refringentem* GH *ad angulos rectos & radius refractus* BC *rectæ cuidam alteri* DC *ex quocunque axis* EF *puncto* D *intra medium densius assumto ductæ ita occurrat, ut ad eam habeat rationem sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti; erit* CD *radio incidenti* AB *parallela.* Tab. I. Fig. 4. & 5.

DEMONSTRATIO.

CB est ad CD ut sinus anguli o ad sinum anguli y (§. 35. *Trigon.*).

gon.). Est vero etiam CB ad CD ut sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti *per hypoth.* Quare cum *y* sit angulus refractus; erit *o* angulo inclinationis *x* æqualis (*§.177. Arithm.*), consequenter CD ipsi AB parallela (§.255. *Geom.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 3.

48. *Radius incidens in superficiem curvam, sive convexam, sive concavam, perinde refringitur, ac si incideret in planam, quæ curvam in puncto incidentiæ tangit.*

DEMONSTRATIO.

Superficies curva & plana, quæ ipsam tangit, habent partem infinite parvam communem. Sed radius in tam exigua parte refringitur. Ergo perinde est ac si refringeretur in superficie plana, quæ curvam in puncto incidentiæ tangit. *Q.e.d.*

CAPUT II.

DE

REFRACTIONE IN SUPERFICIEBUS PLANIS.

THEOREMA 4.

49. *Si radii paralleli ex uno diaphano transeunt in aliud diversæ densitatis; etiam in medio altero manent paralleli.*

DEMONSTRATIO.

Si radii ad superficiem refringentem perpendiculares; irrefracti transeunt (§.25), adeoque in diaphano secundo eorum situs non mutatur. Sed in diaphano primo erant paralleli, *per hypoth.* Ergo etiam in diaphano secundo manent paralleli. *Quod erat unum.*

Si radii AB & CD ad superficiem refringentem obliqui, sed paralleli; erunt anguli incidentiæ *o* & *u* (§.233. *Geom.*), consequenter etiam anguli inclinationis *x* & *y* æquales (*§.* 145. *Geom.* & *§.* 91. *Arithm.*). Quoniam igitur angulorum inclinationis *x* & *y* sinus ad sinus angulorum refractorum *m* & *n* eandem rationem habent (§.26), sinus etiam angulorum *m* & *n* (§. Tab. I. Fig. 6.

Gg 2 177.

177. *Arithm.*), consequenter ipsi anguli refracti *m* & *n* (*§.2.Trigon.*), adeoque & anguli *s* & *r* (*§.* 145. *Geom.* & *§.* 91. *Arithm.*) æquales. Radii igitur refracti BE & DF paralleli sunt (*§.*255. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Quodsi igitur vitrum utrinque planum Soli directe objiciatur; lumen per ipsum transiens perinde propagatur, ac si vitrum abesset (§. 93. *Optic.*): si oblique obvertatur, lumen tamen refractum ejusdem manet intensitatis (§. 86. *Optic.*).

LEMMA 1.

51. *Cosecantes angulorum, qui mensuram trium graduum non excedunt, a Cotangentibus in centesimis radii non differunt: Cosecantes vero eorum, quorum mensura gradibus quinque major non est, cum cotangentibus in decimis radii conveniunt.*

DEMONSTRATIO.

Etenim vi Canonis differentia Cotangentium & Cosecantium usque ad gradum tertium in quatuor notis prioribus nulla est. Exprimunt vero quatuor notæ priores radii particulas centesimas, nempe si radius est partium 1000, cotangens sinus anguli trium graduum est 19081, cosecans ejusdem 19087. In centesimis igitur cotangentes & cosecantes usque ad tertium gradum non differunt. *Quod erat unum.*

Simili prorsus modo ostenditur, cotangentium & cosecantium differentiam nullam esse in decimis radii usque ad gradum quintum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

52. Quodsi itaque decima vel centesima pars radii in dato aliquo casu adeo exigua fuerit, ut vel plane non, vel ægre admodum assignari possit; cosecantes angulorum in casu priore quinque, in posteriore tribus gradibus non majorum sunt inter se ut cotangentes.

THEOREMA 5.

53. *Distantia* DK *puncti refractionis* D *a catheto incidentiæ* GL *est ad distantiam puncti radiantis* CK *a superficie refringente in ratione sinus anguli inclinationis ad cosinum ipsius.* Tab. 1. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Quoniam GL ad AB perpendicularis (§. 225. *Geom.*) & axis refractionis HI itidem ad AB normalis (*§.* 10); erit HI ipsi GL parallela (§. 256. *Geom.*), consequenter KCD angulo inclinationis CDH æqualis (§. 233. *Geom.*). Sed KD est ad KC in ratione sinus anguli inclinationis

nis KCD ad sinum anguli KDC (§. 33. *Trigon.*). Quare cum KDC sit complementum ipsius KCD ad rectum (§. 241. *Geom.*); erit KD ad CK in ratione sinus anguli inclinationis ad cosinum ejusdem (§. 11. *Trigon.*).

COROLLARIUM 1.

54. Quoniam sinus anguli 5 graduum ad ejus cosinum est ut 8715 ad 99619, hoc est fere ut 1 ad $11\frac{1}{2}$; quamdiu distantia puncti refractionis KD minor est undecima parte distantiæ puncti radiantis KC, angulus inclinationis minor est quam 5 graduum.

COROLLARIUM 2.

55. Similiter quia sinus anguli 3 graduum ad ejus cosinum ut 5240 ad 99862, hoc est fere ut 1 ad $19\frac{1}{17}$; quamdiu distantia puncti refractionis KD minor est parte decima nona distantiæ puncti radiantis KC, angulus inclinationis minor est quam trium graduum.

THEOREMA 6.

56. *Si radius ex uno medio in diaphanum aliud diversæ densitatis & planæ superficiei oblique incidit, distantia puncti radiantis a superficie refringente est ad distantiam puncti dispersus in ratione cotangentis anguli inclinationis ad cotangentem anguli refracti.*

DEMONSTRATIO.

Tendat radius CD ex medio tenuiori in diaphanum densius AB, sitque CK cathetus incidentiæ & HI axis refractionis: refringetur radius ad axem (§. 25) adeoque refractus DF concurret cum catheto ultra C in G. Jam quoniam GL (§. 16. *Catoptr.*) & HI ad AB normales (§. 10), erit GK distantia puncti dispersus (§. 225. *Geom.*), atque HI ipsi GL parallela (§. 256. *Geom.*), consequenter KCD=CDH & KGD=FDI (§. 233. *Geom.*) Est vero CDH angulus inclinationis (§. 12) & FDI angulus refractus (§. 14): ergo KCD angulo inclinationis & KGD angulo refracto æqualis. Jam si KD sumatur pro sinu toto, erit KC tangens anguli KDC & KG tangens anguli KDG (§. 7. *Trigon.*), seu quia KDC est complementum ipsius KCD, & KDG complementum ipsius KGD ad rectum (§. 241. *Geom.*), KC est cotangens ipsius KCD & KG cotangens ipsius KGD (§. 11. *Trigon.*). Quare CK ad GK ut cotangens anguli inclinationis ad contangentem refracti. *Quod erat unum.* Tab. I. Fig. 7.

Sit GD radius incidens ex medio densiori in diaphanum tenuius: frangetur ab axe HI in DE (§. 38), adeoque cum catheto incidentiæ GL infra punctum radians G in C concurrit. Patet vero ut

 ante

ante esse KGD angulo inclinationis GDH, KCD angulo refracto CDH æqualem, & ideo KC ad KG ut cotangentem anguli inclinationis ad cotangentem anguli refracti. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 3.

Tab. I. Fig. 7. 57. *Data distantia puncti radiantis* C *in superficiem planam diaphani diversæ densitatis a medio, per quod incidit,* KC *una cum distantia puncti refractionis* D *a catheto incidentiæ* KD, *invenire distantiam puncti dispersus* GK *a superficie refringente* AB.

RESOLUTIO.

1. Quoniam in triangulo KCD ad K rectangulo (§.225.78. *Geom.*) dantur crura KD & KC; invenietur angulus KCD (§. 40. *Trigon.*), quem angulo inclinationis CDH æqualem esse constat *per antea demonstrata* (§. 56).
2. Quia datur ratio sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§. 24); per regulam trium invenitur porro sinus anguli refracti GDH, & hinc in Canone sinuum ipse angulus refractus. Immo si refractio ex aere in vitrum fit; angulus refractus sine calculo in tabula superius tradita (§. 32) evolvi potest.
3. Datis angulis inclinationis & refracto, tandem reperitur distantia puncti dispersus GK (§. 56).

Et perinde problema solvitur, si refractio fiat ex medio densiori in tenuius, hoc est, si G fuerit punctum radians, C vero punctum dispersus.

E. gr. Incidat radius DC ex aëre in vitrum, sitque CK = 33′, KD duorum pedum: erit.

Log. KD		0.3010300
	KC	1.5185139
	Sin.Tot.	10.0000000

Log. Cotang. KCD 11. 2174839 & hinc vi Canonis angulus inclinationis KCD vel CDH = 3°28′10″.

Est vero ut 3 ad 2 ita sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§. 26). Ergo sinus refracti = 2.605162:3 = 403441: unde vi Canonis reperitur angulus refractus KGD quam proxime 2°18′40″. Quare tandem.

Log. Cotang. KCD	11.2174839
Cotang. KGD	11.3940661
KC	1.5185139
	129125800
Log. KG	1.6950961

Habetur adeo KG = 4°9′5″5‴.

SCHOLION.

58. *Sinus desumsimus ex Canone majore* Pitisci; *Logarithmos vero ex magno Canone triangulorum* Vlacci, *neglectis scru-*

scrupulis per approximationem quærendis ad evitandas calculi tricas.

THEOREMA 7.

Tab. I. Fig. 7. 59. *Si radiorum* CD *&* CP *ex eodem puncto in superficiem planam diaphani diversæ densitatis* AB *incidentium puncta refractionis* D *&* P *a catheto incidentiæ* GK *æqualiter distent; refracti* DF *&* PQ *idem punctum dispersus* G *habent.*

DEMONSTRATIO.

Quia PK=KD *per hypoth.* & anguli ad K recti (§. 255. *Geom.*); erunt anguli inclinationis PCK & KCD æquales (§. 179. *Geom.*). Habent ergo distantiæ punctorum, in quibus radii refracti DF & PQ cum catheto incidentiæ concurrunt, ad CK eandem rationem (§. 56), adeoque æquales sunt (§. 177. *Arithm.*), consequenter punctum dispersus G idem est (§. 169. *Geom.*). *Q. e. d.*

Eadem est demonstratio, si supponamus G esse punctum radians, C vero punctum dispersus.

COROLLARIUM. 1.

60. Quoniam radiorum valde vicinorum distantia a catheto ad sensum eadem est; radii valde vicini ex eodem puncto G disperguntur.

COROLLARIUM 2.

61. Quare cum radii refracti in oculum extra cathetum incidentiæ constitutum incidentes vel æqualiter a catheto distent, vel valde vicini sint; veluti ex puncto G emanantes in eum illabuntur, consequenter punctum C per radios refractos in G videri debet (§. 336. *Optic.*).

THEOREMA 8.

62. *Si radius* CD *ex medio tenuiori in diaphanum densius planam superficiem habens* AB *oblique incidit, distantia puncti radiantis* CK *minorem rationem habet ad distantiam puncti dispersus* KG, *quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis. Quodsi tamen distantia puncti refractionis a catheto incidentiæ* KD *minor fuerit undecima vel decima nona parte distantiæ puncti radiantis* CK *& in casu priore decima, in posteriore centesima ejus pars sit adeo exigua, ut assignari nequeat, vel saltem contemni mereatur: erit* CK *ad* KG *ad sensum in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Dicatur brevitatis gratia ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis $n : m$, ducaturque GB radio incidenti CD ex puncto dispersus G parallela: erit CK:KG=CD:GB (§. 268. *Geom.*).

Est

Est vero GB $>$ GD (§. 417. *Geom.*) adeoque CD : GB $<$ CD : GD (§. 205. *Arithm.*). Ergo CK : KG $<$ CD : GD (§. 89. *Arithm.*). Quare cum sit CD ad GD ut sinus anguli CGD seu GDH (§. 233. *Geom.*) ad sinum anguli KCD (§. 35. *Trigon.*), vel CDH (§. 233. *Geom.*), consequenter ut sinus anguli fracti ad sinum anguli inclinationis & n ad m ut idem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis; erit $n : m = CD : GD$, adeoque CK : KG $<$ $n : m$ (§. 89. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi DK $<$ $\frac{1}{11}$ CK, erit angulus inclinationis KCD $<$ 5° (§. 54). Quare si etiam decima pars radii adeo exigua fuerit, ut vel plane non, vel ægre admodum assignari possit; erit CK : KG = CD : GD (§. 52), consequenter cum CD ad GD sit in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis, *per demonstrata*, etiam CK ad KG eandem rationem habet. Idem eodem modo ostenditur, si DK $<$ $\frac{1}{30}$ CK & centesima pars radii parvitatis contemptibilis. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

63. Quodsi ergo refractio ex aëre in vitrum contingit; distantia puncti dispersus radiorum catheto vicinorum est sesquialtera puncti radiantis; remotiorum vero sesquialtera major (§. 26).

COROLLARIUM 2.

64. Si refractio ex aëre in aquam contingit, distantia puncti dispersus radiorum catheto incidentiæ vicinorum est sesquitertia; remotiorum vero sesquitertia major (§. 28).

SCHOLION.

65. *Consentit cum hisce calculus secundum problema 3 institutus. Sane in exemplo ibi allato erat* CK = 33' & *reperiebatur* KG = 49' 5''. *Quodsi vero fiat ut 2 ad 3 ita 33 ad* KG, *reperietur denuo* $KG = 33 \cdot 3 : 2 = 99 : 2 = 49' \frac{1}{2} = 49' 5''$.

COROLLARIUM 3.

66. Oculo itaque in medio densiore constituto objecta in rariore collocata remotiora apparent quam sunt (§. 339. *Optic.*) & locus imaginis in quolibet casu dato vel ex ratione refractionis data (§. 62) vel per calculum juxta problema 3 instituendum (§. 57) facile definitur.

SCHOLION.

67. *Ita piscibus sub aqua natantibus remotiora apparent, quam sunt, quæ extra aquam constituuntur.*

THEOREMA 9.

68. *Si radius* GD *ex medio densiori in diaphanum tenuius, quod planam superficiem* AB *habet, oblique incidit, distantia puncti radiantis* GK *majorem rationem habet ad distantiam puncti dispersus* KC *quam* Tab. I. Fig. 7.

quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis. In casu reliquo theorematis praecedentis erit GK *ad* KC *ad sensum in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Dicatur brevitatis gratia ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis $n:m$, ducaturque ex puncto radiante GB radio refracto CD parallela: erit KG:KC = GB:CD (§. 268. *Geom.*) Est vero GB > GD (§. 417. *Geom.*); adeoque GB:CD > GD:CD (§. 203. *Arithm.*). Ergo KG:KC > GD:CD (§. 89. *Arithm.*) Quare cum eodem modo, quo in demonstratione theorematis praecedentis pateat esse $m:n$ = GD : CD; erit KG:KC > $m:n$ (§. 89. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Posterius eodem modo ostenditur, quo idem de radiis ex medio tenuiori in diaphanum densius incidentibus (§. 62) demonstravimus.

COROLLARIUM 1.

69. Quodsi ergo refractio ex vitro in aerem contingit; distantia puncti dispersus radiorum catheto vicinorum est subsesquialtera distantiae puncti radiantis; remotiorum vero subsesquialtera minor (§. 41).

COROLLARIUM 2.

70. Sed si refractio ex aqua in aërem fit, distantia puncti dispersus radiorum catheto vicinorum est subsesquitertia distantia puncti radiantis; remotiorum vero subsesquitertia minor (§. 42).

COROLLARIUM 3.

71. Oculo itaque in medio rariore constituto objecta in densiore collocata viciniora apparent quam sunt (§. 339. *Optic.*) & locus imaginis in quolibet casu dato vel ex ratione refractionis data (§. 68), vel per calculum juxta problema tertium instituendum (§. 57) facile definitur.

SCHOLION.

72. *Hinc planum, cui cubus vitreus politus imponitur in experimento superiori* (§. 24), *ad dimidiam; fundus vasis aqua pleni ad tertiam altitudinis partem per refractionem attollitur respectu oculi supra planum refringens perpendiculariter elevati. Et pisces, aliaque corpora sub aquis posita propiora videntur quam sunt.*

THEOREMA 10.

73. *Si radius ex medio quocunque incidens in diaphanum diversæ densitatis tendat ad punctum aliquod rectæ* LG *ad superficiem planam refringentem* AB *perpendicularis; erit distantia puncti, ad quod incidens convergit, ad distantiam puncti concursus in ratione cotangentis anguli inclinationis ad cotangentem refracti.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Incidat radius ED ex medio rariori in densius, convergens ad punctum C perpendiculi LC. Refringetur ergo ad axem IH (§. 25), adeoque demum infra C cum LG concurret. Jam quia IH parallela ipsi LG (§. 256. *Geom.*), erit KCD angulo inclinationis IDE & KGD angulo refracto GDH æqualis (§. 233. *Geom.*). Quodsi itaque KD sumatur pro sinu toto, erit KC tangens anguli KDC seu cotangens ipsius KCD & KG tangens anguli KDG seu cotangens ipsius KGD (§. 7. 11. *Trigon.*). Est itaque CK ad KG in ratione cotangentis anguli inclinationis ad cotangentem refracti.

Quodsi radius FG tendens ad punctum G ex medio densiori in rarius incidit, refractio fiet ab axe (§. 38) & refractus CD cum perpendiculo LG concurret in C, eritque adeo KCD angulo refracto CDH & KGD angulo inclinationis IDF æqualis (§. 233. *Geom.*), consequenter ut ante distantia puncti convergentiæ KG ad distantiam puncti concursus KC in ratione cotangentis anguli inclinationis ad cotangentem refracti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

74. Eodem itaque modo, quo in theoremate 7 (§. 59) ostenditur, radios ad idem punctum C vel G tendentes, in uno G vel C post refractionem concurrere, si idem fuerit angulus inclinationis. Habent scilicet distantiæ punctorum, in quibus radii refracti concurrunt cum perpendiculo LG eandem rationem (§. 73), adeoque æquales sunt (§. 177. *Arith.*), consequenter punctum concursus G vel C idem est (§. 169. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

75. Quoniam adeo radii valde vicini ad idem punctum physicum tendunt; in uno quoque post refractionem concurrunt.

PROBLEMA 4.

76. *Data distantia puncti* C, *ad quod radius* ED *tendit, a superficie refringente* AB, *una cum distantia* KD *puncti refractionis* D *a perpendiculo* LG, *in quo est punctum convergentiæ* C, *invenire distantiam puncti concursus* GK *a superficie refringente* AB. Tab. I. Fig. 8.

RESOLUTIO.

Eadem prorsus est, quæ problematis tertii (§. 57). Nimirum

1. Ex datis in Triangulo KCD ad K rectangulo cruribus KD & KC invenitur angulus inclinationis KCD (§. 40. *Trigon.*).

2. Ex

2. Ex data ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti invenitur porro sinus anguli refracti *per regulam trium*: unde non ignotus esse potest angulus refractus.

3. Datis adeo angulis inclinationis & refracto reperitur tandem distantia puncti concursus KG (§. 73).

Eodem modo reperitur punctum concursus C, si radius incidens tendit ad punctum G.

THEOREMA 11.

Tab. I. Fig. 8. 77. *Si radius* ED *tendens ad punctum* G *ex medio tenuiori in diaphanum densius, quod planam habet superficiem* AB, *oblique incidit, distantia puncti, ad quod ante refractionem tendit*, CK *a superficie refringente* AB *est ad distantiam puncti concursus* GK *ab eadem in ratione minore, quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis. Quodsi tamen* DK *distantia puncti refractionis* D *a perpendiculo* LG, *in quo est punctum convergentiæ* C, *minor fuerit undecima parte distantiæ puncti radiantis* CK *& ejusdem pars decima, vel minimum centesima fuerit parvitatis contemnendæ, erit* CK *ad* GK *ad sensum in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis 8 (§. 62).

COROLLARIUM 1.

78. Quodsi ergo refractio ex aëre in vitrum contingit, distantia puncti concursus radiorum catheto LG vicinorum a superficie refringente AB est sesquialtera distantiæ puncti C, ad quod irrefracti tendunt; remotiorum vero distantia est sesquialtera minor (§. 26).

COROLLARIUM 2.

79. Si refractio ex aëre in aquam contingit, distantia puncti concursus radiorum catheto LG vicinorum a superficie refringente AB est sesquitertia distantiæ puncti C, ad quod irrefracti tendunt; remotiorum vero distantia est sesquitertia minor (§. 28).

THEOREMA 12.

80. *Si radius* FD *tendens ad punctum* G *ex medio densiori in diaphanum tenuius, quod planam habet superficiem* AB, *oblique incidit, distantia* GK *puncti* G, *ad quod ante refractionem tendit, a superficie refringente* GK *est ad distantiam puncti concursus ab eadem* CK *in ratione majore, quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis. Quodsi tamen* DK *di-* Tab. I. Fig. 8.

stantia puncti refractionis D *a perpendiculo* LG, *in quo est punctum convergentiæ* G, *minor fuerit undecima parte distantiæ puncti radiantis* CK *& ejusdem pars decima, vel minimum centesima fuerit parvitatis contemnendæ, erit* GK *ad* KC *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis 9 (§. 68).

COROLLARIUM 1.

81. Quodsi ergo refractio ex vitro in aërem contingit & radii fuerint perpendiculo LG vicini, erit KG ad KC in ratione sesquialtera; si vero radii fuerint remotiores in ratione sesquialtera majore (§. 41).

COROLLARIUM 2.

82. Similiter si refractio ex aqua in aërem contingit; habebit in casu priore KG ad KC rationem sesquitertiam; in posteriore sesquitertia majorem (§. 42).

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 9. 83. *Si oculus fuerit constitutus in medio rariore, objectum in densiore collocatum videtur per radium in superficie plana refractum justo majus; si vero objectum in rariore, oculus in densiore medio constituatur, illud justo minus apparet. In utroque casu est magnitudo apparens ad veram in ratione composita distantiæ puncti, ad quod radii irrefracti tendunt, a superficie refringente* FL *ad distantiam oculi* GL *ab eadem & distantiæ objecti ab oculo* GM *ad distantiam ejusdem a puncto, ad quod radii irrefracti tendunt,* FM.

DEMONSTRATIO.

Sit radius ML ad superficiem refringentem DE perpendicularis: transit ergo irrefractus (§. 25). Quodsi radius BE ad punctum F tendens ex medio rariori in densius defertur, punctum concursus G a superficie DN remotius, quam punctum convergentiæ F (§. 77), radius adeo, qui irrefractus ex puncto B ad G pertingeret, a perpendiculo GM remotior esse debet quam refractus EG. Quare si in G supponatur oculus videns refracte objectum MB sub angulo LGE, per irrefractos idem ibidem videret sub angulo LGN, consequenter per radios refractos minus apparet, quam per irrefractos (§. 109. Optic.). *Quod erat unum.*

Quodsi BE ex medio densiori in rarius defertur, punctum concursus G a superficie refringente minori intervallo distat, quam punctum F, ad quod irrefractus tendit (§. 68): radius adeo, qui irrefractus ad punctum G pertingeret, per- Tab. I. Fig. 10.

perpendiculo GM vicinior quam GE. Quare si in G supponatur oculus videns objectum MB refracte sub angulo LGE, quod directe sub angulo LGN videret; eidem objectum majus apparere debet quam per radios irrefractos (§.209. *Optic.*). *Quod erat alterum.*

Ob parallelismum linearum MB & LE (§.256. *Geom.*); erit GM : GL = MB : LN & GM : GL = MH : LE (§. 268. *Geom.*), adeoque MB : LN = MH : LE (§. 167. *Arithm.*), consequenter MB : MH = LN : LE (§. 173. *Arithm.*), hoc est, magnitudo vera MB est ad apparentem MH ut LN ad LE. Porro (§. 268. *Geom.*).

FM : FL = MB : LE
GM : GL = MB : LN

Hinc LE = MB. FL : FM & LN = MB. GL : GM, consequenter

$$LE : LN = \frac{FL.\ MB}{FM} : \frac{GL.\ MB}{GM}$$

hoc est FL. GM : GL. FM (§. 178. 181. *Arithm.*), consequenter alternando LN : LE = GL. FM : FL. GM (§. 175. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

84. Si objectum AB fuerit valde remotum, erit FM ipsi GM physice æqualis, adeoque magnitudo vera MB ad apparentem MH ut GL ad FL seu distantia oculi G a plano refringente ad distantiam puncti convergentiæ F ab eodem plano.

SCHOLION.

85. *Hinc sub aquis demersa oculo in aere constituto majora apparent: piscibus vero sub aquis, quæ sunt in aere, minora apparere debent.*

PROBLEMA 5.

86. *Machinam hydromanticam construere, vi cujus imaginem oculis spectatoris immoti pro arbitrio subducere & ad eos iterum reducere possis.* Tab. I. II.

RESOLUTIO.

1. Fiant duo vasa ABF & CGLK intus cava & tribus columellis, quarum una BC epistomio C instructa sit itidem cava, inter se connexa.
2. Vas inferius CL per diaphragma HI in duas cavitates dividatur, quarum inferior mediante epistomio P claudi & aperiri potest.
3. In fundo cavitatis prioris collocetur imago R, quæ spectatori in O per radium directum GM non apparet.

Quodsi epistomium P aperias, aqua in cavitatem CI descendet radiusque GM refringetur a perpendiculo GR in O (§. 37). Spectator itaque per radium refractum

OG imaginem videbit. Si jam clauso epistomio C alterum P aperiatur, aqua in cavitatem inferiorem HL descendet. Cessante igitur refractione radius nullus ab objecto R ad oculum amplius pertinget. Clauso vero rursus epistomio P & aperto superiore C, aqua denuo effluet, sicque radius refractus OG denuo sistet imaginem, quæ evanuerat.

CAPUT III.

DE
REFRACTIONE LUMINIS IN SUPERFICIEBUS SPHÆRICIS TAM CAVIS, QUAM CONVEXIS.

THEOREMA 14.

Tab. II. Fig. 12. 87. *Radius* DE *axi sphæræ densioris parallelus, post refractionem simplicem cum eodem ultra centrum* C *in* F *concurrit.*

DEMONSTRATIO.

Quia semidiameter CE ad punctum refractionis E ducta est ad superficiem KL perpendicularis (§. 38. *Analys. infinit.*), erit ea axis refractionis (§. 10). Quare cum radius EH ad eum refrangatur (§. 25); ad axem sphæræ AF convergit, adeoque tandem cum eo concurrit (§. 83. *Geom.*), & quidem ultra centrum C in F, quia angulus refractionis FEH minor est angulo inclinationis CEH (§. 25). *Q. e. d.*

THEOREMA 15.

88. *Si radius* DE *in superficiem sphæricæ convexam diaphani densioris incidit axi ejus* AF *parallelus, erit semidiameter* CE *ad radium refractum* EF *in ratione sinus anguli refractionis ad sinum anguli inclinationis; distantia vero puncti concursus a centro* CF *ad radium refractum* FE *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.* Tab. II. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 87) con-

constat, semidiametrum CE esse axem refractionis & DH est axi AF parallela *per hypoth.* erit BCE angulo inclinationis DEG & CFE angulo refractionis FEH æqualis (§. 233. *Geom.*). Quare CE ad EF in ratione sinus anguli refractionis CFE ad sinum anguli inclinationis BCE & CF ad EF in ratione sinus anguli refracti CEF ad sinum anguli inclinationis BCE (§. 35. *Trig.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.

Tab. II. Fig. 12. 89. ***Data distantia* ME *puncti refractionis* E *ab axe diaphani sphærice convexi* AF, *una cum semidiametro ejus* CE, *invenire punctum* F, *in quo radius ex medio rariori incidens & axi parallelus* DE *cum axe unitur.***

RESOLUTIO.

1. Quoniam angulus ad M rectus est (§. 225. *Geom.*), ex datis lateribus ME & CE invenitur angulus MCE (§. 38. *Trigon.*), quem angulo inclinationis æqualem esse constat ex demonstratione theorematis 15 (§. 88).
2. Et quia ratio sinus anguli inclinationis ad sinum refracti datur (§. 24), reperto angulo inclinationis reperietur per regulam trium sinus anguli refracti, consequenter ipse angulus refractus CEF.
3. Quodsi hunc ex angulo MCE subtrahas, relinquetur angulus refractionis CFE (§. 239. *Geom.*).
4. Unde tandem ob datos angulos inclinationis & refractionis una cum semidiametro CE reperitur distantia puncti concursus F a centro CF (§. 36. *Trig.*): cui si semidiameter CB addatur, habebitur quoque distantia ejusdem a superficie refringente BF.

E. gr. Sit ME = 1', CE = 8', fiatque refractio ex aere in vitrum, erit

Log. CE	0.9030900
Sin. tot.	10.0000000
ME	0.0000000
Log. sin. MCE	9.0969100, cui in

Canone quam proxime respondent 7° 10' 50".

Jam cum sit sinus anguli MCE ad sinum anguli CEF ut 3 ad 2 (§. 26); reperietur sinus anguli CEF = 1249965 . 2 : 3 = 833310, cui in Canone quam proxime respondent 4° 46' 50". Est itaque angulus FEH 2° 24'. Tandem

Log. Sin. FEH	8.6219616
Sin. FEC	8.9208517
CE	0.9030900
	9.8239417
Log. CF	1.2019801, cui

in Canone respondent 1592 +

Est

Est ergo CF quam proxime 1° 5′ 9″ 2‴ seu 16′, consequenter BF = 2° 3′ 9″ 2‴ seu 24′.

Sit angulus inclinationis BCE = 3°, reperietur refractus CEF = 2° & angulus refractionis CFE = 1°, & hinc porro CF = 1° 5′ 9″ 9‴ seu 16′ consequenter BF = 2° 3′ 9″ 9‴ seu 24′.

THEOREMA 16.

Tab. I. Fig. 12. 90. *Si radius* DE *axi* AF *parallelus in superficiem convexam* KL *diaphani sphærici densioris incidit, distantia foci a superficie refringente* FB *est ad distantiam ejus a centro* FC *in ratione majore quam sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti. Quodsi tamen radii fuerint axi valde vicini, angulo inclinationis* BCE *paucorum graduum existente, distantiæ foci a superficie & centro* FB *&* FC *erunt quam proxime in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum refracti.*

DEMONSTRATIO.

FB > FE (§. 302. 303. *Geom.*). Sed FE est ad FC ut sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§. 88). Ergo FB ad FC rationem majorem habet quam sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§. 203. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi angulus inclinationis BCE fuerit paucorum graduum; erit FE ipsi BF propemodum æqualis, adeoque BF & FE eandem rationem propemodum habent ad FC (§. 168. *Arithm.*). Est itaque in eo casu BF ad FC quam proxime in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

91. Quodsi refractio ex aëre in vitrum contingit, erit in casu radiorum axi vicinorum BF : FC = 3:2 & in casu radiorum ab axe remotiorum BF : FC > 3:2 (§. 26), consequenter in priore BC : BF = 1 : 3 (§. 193. *Arithm.*) & hinc in posteriore BC : BF < 1 : 3.

SCHOLION 1.

92. *Convenit cum hisce calculus superior in probl.* (§. 89).

COROLLARIUM 2.

93. Si refractio ex aëre in aquam contingit, erit in casu priore BF : FC = 4 : 3 & in posteriore BF : FC > 4 : 3 (§. 28), consequenter in priore BC : BF = 1 : 4 (§. 193. *Arithm.*) & hinc in posteriore BC : BF < 1 : 4.

COROLLARIUM 3.

94. Quoniam radii solares sunt ad sensum paralleli (§. 94. *Optic.*); si in superficiem sphæræ vitreæ solidæ vel aqua repletæ incidunt, intra eam cum axe non concurrunt.

SCHOLION 2.

95. *Fallitur adeo* Vitellio, *dum sibi persvadet, radios Solis parallelos in super-*

perficiem sphæræ crystallinæ incidentes ad centrum refringi.

THEOREMA 17.

Tab. II. Fig. 13. 96. *Si radius* DE *axi* FA *parallelus ex medio densiore in diaphanum sphæricum rarius incidit; post refractionem ab axe divergit, estque distantia puncti dispersus a centro diaphani sphærici* FC *ad semidiametrum ejus* CE *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli refractionis, ad portionem vero radii refracti retroducti* EF *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam semidiameter CE ad superficiem sphæræ perpendicularis (§.38. *Analys. infin.*), erit ea axis refractionis (§.10) adeoque radius DE ab eo frangitur (§.38), consequenter refractus EN ab axe intra diaphanum sphæricum divergit & hinc in medium densius retro continuatus cum eodem concurrit (§.263. *Geom.*). *Quod erat unum.*

Quoniam DH ipsi FA parallela *per hypoth.* & CG ad superficiem KL perpendicularis (§.38. *Analys. infin.*); erit BCE angulo inclinationis DEG (§.233. *Geom.* & §.12. *Dioptr.*) & CFE angulo refractionis HEN (§. *cit. Geom.* & §.13. *Dioptr.*) æqualis. Erit itaque FC ad CE ut sinus anguli refracti CEN ad sinum anguli refractionis CFE & FC ad FE ut sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§.35. *Trigon.*). *Quod erat alterum.*

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

PROBLEMA 7.

97. *Data distantia* ME *puncti refractionis ab axe diaphani rarioris sphærici, in quod incidit ex medio densiori radius* DE *axi* FA *parallelus, una cum semediametro diaphani* CE, *invenire punctum dispersus* F. Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. Quoniam EM ad MC perpendicularis (§.225. *Geom.*), in triangulo ad M rectangulo ex datis lateribus ME & CE invenitur angulus inclinationis BCE (§.38. *Trigon.*).
2. Quia datur ratio sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§.14.36); per regulam trium porro reperitur sinus anguli refracti & hinc vi Canonis angulus refractus CEN.
3. Ab angulo refracto CEN subducendus est angulus inclinationis BCE, & relinquetur angulus refractionis CFE (§.239. *Geom.*).
4. Quare tandem (§.96) reperitur FC distantia puncti dispersus a centro, unde subducta semidia-

Ii metro

metro BC, ejus a superficie refringente KL distantia relinquitur.

E.gr. Sit ME = 1″, EC = 12″. Quoniam CE ad ME ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis; reperietur hic = 10000000 : 12 = 8333333 & hinc vi Canonis BCE = 4° 46′ 50″. Quodsi jam supponamus refractionem fieri ex vitro in aërem, erit sinus anguli refracti CEN = 3.8333333 : 2 = 12499999, cui in Canone quam proxime respondent 7° 10′ 50″. Unde F = 2° 24′, tandemque

Log. Sin. F.		86219615
	Sin CEN	90968979
	CE	10791812
		101760791

Log. FC = 15541176, cui in Canone quam proxime respondent 3′ 5″ 8‴ 2⁗ seu 36″. Est igitur FB = 2382⁗ seu 24″.

THEOREMA 18.

Tab. II. Fig. 13. 98. *Si radius* DE *axi* AF *parallelus in superficiem convexam* KL *diaphani sphærici rarioris ex medio densiori incidit, distantia puncti dispersus a centro* FC *ad distantiam ejus a superficie* FB *rationem majorem habet, quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis. Quodsi tamen radius* DE *fuerit axi* FA *valde vicinus, ratio erit quam proxime ea, quæ est sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

FC ad FE habet rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 96). Sed FE > FB (§. 302. *Geom.*). Ergo FC ad FB rationem majorem habet quam sinus angi refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 205. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi radius DE fuerit axi FA admodum propinquus, differentia rectarum FE & FB evadet tandem parvitatis contemnendæ, consequenter FC ad FB & FE eandem quam proxime rationem habet (§. 168. *Arithm.*). Sed FC est ad FE ut sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 96). Ergo etiam FC ad FB eandem quam proxime rationem habet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

99. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit in casu radiorum axi vicinorum FC : FB = 3 : 2. (§. 41) consequenter BC : FB = 1 : 2 (§. 193. *Arithm.*). In casu radiorum ab axe remotiorum FC : FB > 3 : 2 (§. 41).

COROLLARIUM 2.

100. Si refractio ex aqua in aërem contingit, erit in casu priore FC : FB = 4 : 3 (§. 41), consequenter BC : FB = 1 :

= 1 : 3 (§. 193. *Arithm.*). In casu posteriori FC : FB = 4 : 3 (§. 41).

COROLLARIUM 3.

101. Cum adeo punctum dispersus F a superficie refringente KL longius distet si radii ex aqua, quam si ex vitro in aerem erumpunt; radii paralleli in priore casu minus disperguntur, quam in posteriore.

SCHOLION.

102. *Cum his consentit calculus secundum problema 7 institutus* (§. 97).

THEOREMA 19.

Tab. II. Fig. 13. 103. *Si radius* DE *axi* AF *parallelus incidat in superficiem convexam* KL *diaphani sphærici rarioris ex medio densiori; erit distantia puncti dispersus a centro* FC *ad radium* BC *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli refractionis.*

DEMONSTRATIO.

Est enim FC ad CE in ratione sinus anguli CEN ad sinum anguli CFE (§. 35. *Trigon.*). Cum refractio fiat ex medio densiori in rarius, radius incidens DE refringitur ab axe in EN (§. 38), eritque CEN angulus refractus (§. 14) & NEH = EFC (§. 233. *Geom.*) ob parallelismum rectarum DH & AF CFE angulus refractionis (§. 13). Est itaque FC ad CE sive CB in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli refractionis. *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

104. *Si radius* HE *axi* FA *parallelus in superficiem concavam diaphani sphærici densioris ex medio rariori incidit; refractus* EN *dispergetur ex puncto axis* F, *ita ut* FE *habeat ad* FC *rationem sinus anguli inclinationis ad sinum refracti.* Tab. II. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Quoniam semidiameter CE secat KL ad angulos rectos, (§. 38. *Analys. infin.*) & BF ipsi EH parallela *per hypoth.* radius refractus EF cum BF concurrere debet §. (25) estque FE ad FC in ratione sinus anguli BCE = CEH (§. 233. *Geom.*) ad sinum anguli CEF (§ 35. *Trig.*), hoc est ut sinus anguli inclinationis ad sinum refracti (§. 14. *Dioptr.* & §. 22. *Catoptr.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

105. *Data distantia* ME *puncti refractionis* E *ab axe* AF *una cum semidiametro* CE *diaphani sphærici densioris* KL, *in cujus cavam superficiem radius* EH *axi parallelus ex medio rariori incidit, invenire distantiam puncti dispersus* F *a superficie refringente* FB. Tab. II. Fig. 12.

RESOLUTIO.

1. Cum in triangulo EMC angu-

lus M fit rectus (§. 225. *Geom.*), ex datis ME & CE reperietur angulus inclinationis MCE (§. 38. *Trig.*).

2. Quia ratio finus anguli inclinationis ad finum refracti datur (§. 24); per regulam trium invenietur finus anguli refracti, adeoque vi Canonis habetur ipfe angulus refractus CEF, qui

3. Ex angulo inclinationis BCE fubductus relinquit angulum refractionis CFE. (§. 233. *Geom.*).

4. Datis itaque in triangulo CEF omnibus angulis & latere CE, invenitur diftantia puncti difperfus FC a centro (§. 36. *Trigon.*).

E. gr. Sit EM = 1″, BC = 16″; erit finus anguli inclinationis = 10000000 : 16 = 625000.

Eft itaque BCE vi Canonis 3°35′. Quare fi ponamus refractionem fieri ex aëre in vitrum, erit finus anguli refracti (§. 26) 625000. 2 : 3 = 4166666, adeoque vi Canonis CEF = 2° 23′ 20″ & hinc CFE = 1° 11′ 40″. Quare tandem

Log. fin. CFE	83190218
CE	12041199
Sin. CEF	86199474
	98240673
Log. FC	15050545, cui

in tabulis quam proxime respondent 3′ 1″ 9‴ 9⁗ feu 32″. Ergo FB = 48″.

THEOREMA 21.

106. *Si radius* EH *axi* FB *parallelus in diaphani fphærici denfioris fuperficiem cavam* KL *ex medio rariori incidit; diftantia puncti difperfus a fuperficie refringente* FB *eft ad diftantiam ejus a centro* FC *in ratione majore quam finus anguli inclinationis ad finum anguli refracti. Quodfi tamen radii fuerint axi valde vicini, angulo* BCE *paucorum graduum exiftente; erit* BF *ad* CF *quam proxime in ratione finus anguli inclinationis ad finum anguli refracti.* Tab. II. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

BF > EF (§. 302. 303. *Geom.*). Sed FE eft ad FC in ratione finus anguli inclinationis ad finum anguli refracti (§. 104). Ergo FB ad FC rationem ifta majorem habet (§. 203. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodfi FE fuerit ipfi FB valde propinqua, differentia earum erit parvitatis contemnendæ, adeoque ratio rectarum FE & FB ad FC quam proxime eadem (§. 168. *Arithm.*). Sed FE eft ad FC in ratione finus anguli inclinationis ad finum anguli refracti (§. 104).

Ergo

Ergo FB ad FC in hoc casu quam proxime rationem eandem habet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

107. Quodsi refractio ex aëre in vitrum contingit, erit in casu radiorum axi vicinorum FB : FC = 3 : 2, in casu remotiorum ab axe FB : FC > 3 : 2 (§. 26), consequenter in priore CB : FC = 1 : 2 (§. 193. *Arithm.*).

SCHOLION.

108. *Consentit cum his calculus in problemate octavo* (§. 105).

COROLLARIUM 2.

109. Si refractio ex aëre in aquam contingit, erit in casu radiorum axi vicinorum FB : FC = 4 : 3 (§. 28), in casu remotiorum ab axe FB : FC > 4 : 3; consequenter in priore BC : FC = 1 : 3 (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

110. Quia punctum dispersus F a centro C longius distat, si refractio in aqua, quam si in aëre contingit (§. 107. 109); in posteriore casu radii refracti minus disperguntur quam in priore.

THEOREMA 22.

Tab. II. Fig. 12. 111. *In hypothesi theorematis praecedentis erit radius concavitatis* CE *ad distantiam puncti dispersus a centro* FC *in ratione sinus anguli refractionis ad sinum anguli refracti.*

DEMONSTRATIO.

Est enim CE ad FC in ratione sinus anguli CFE ad sinum anguli CEF (§. 35. *Trigon.*). Enimvero CFE = FEH (§. 233. *Geom.*) ob parallelismum EH & BF *per hypoth.* angulus refractionis (§. 13) & CEF angulus refractus (§. 14). Est igitur CE ad FC ut sinus anguli refractionis ad sinum anguli refracti. *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

112. *Si radius* HE *axi* AF *parallelus ex medio densiori in superficiem cavam* KL *diaphani sphaerici rarioris incidit, refractus in* FE *cum axe* AF *in* F *concurrit, ita ut distantia puncti concursus a centro* CF *sit ad radium refractum* FE *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.* Tab. II. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG secat KL ad angulos rectos (§. 38. *Analys. infinit.*) & ex C ducta CF sit radio incidenti parallela *per hypoth.* refractus EB eidem occurrere debet in F (§. 41), estque FC ad FE ut sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 35. *Trigon.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 9.

113. *Data distantia puncti re-*

Tab. II. Fig. 13. *fractionis* ME *ab axe diaphani sphærici* KL *rarioris, in cujus superficiem cavam radius* EH *axi* AF *parallelus ex medio densiore incidit, una cum semidiametro diaphani* CE, *invenire distantiam foci a superficie refringente* BF.

RESOLUTIO.

1. Ex datis in triangulo CME ad M rectangulo (§. 225. *Geom.*) lateribus ME & CM invenitur angulus inclinationis MCE (§. 38. *Trigon.*).
2. Et quia ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis datur (§. 24. 36), ille quoque per regulam trium facile invenitur.
3. Angulus inclinationis BCE ex refracto CEN subductus relinquit angulum refractionis HEN seu CFE (§. 235. *Geom.*).
4. Tandem ex datis in triangulo FCE præter latus CE angulis singulis reperitur FC (§. 36. *Trigon.*).

E. gr. Sit ME = 1″, CE = 10″; erit sinus anguli MCE = 10000000 : 10 = 1000000, cui in Canone quam proxime respondent 5° 44′ 20″. Quare si ponamus refractionem ex vitro in aërem fieri, reperietur sinus anguli CEN = 1000000. 3 : 2 = 1500000, cui in Canone quam proxime conveniunt 8° 37′ 40″. Et hinc angulus refractionis CFE 2° 53′ 20″. Quare tandem

Log. Sin. F	8.7024241
CE	10000000
Sin. FEC	9.1761337
	10.1761337
Log. FC	1.4737096, cui

in tabulis respondent quam proxime 2′ 9″ 7‴ 7⁗ seu fere 30″. Unde AB = 1′ 9″ 7‴ 7⁗ seu 20″.

THEOREMA 24.

114. *Si radius* HE *axi* AB *parallelus ex medio densiori in diphani sphærici rarioris superficiem cavam incidit; distantia foci a centro* FC *habet ad distantiam ejus a superficie refringente* FB *rationem majorem quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis; etsi radius fuerit axi vicinus, erit* FC *ad* FB *in ratione illorum sinuum.* Tab. II. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

FC est ad FE ut sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 112). Sed FB < FE (§. 302. *Geom.*). Ergo FC ad FB rationem majorem habet quam sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 195. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi radii axi AB fuerint valde vicini, erit differentia rectarum FB

FB & FE parvitatis contemnendæ; unde FC rationem eandem habet ad FB & FE (§.168. *Arithm.*) consequenter FC ad FB in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 112). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

115. Si refractio ex vitro in aerem contingit, in casu radiorum axi vicinorum erit FC ad FB ut 3 ad 2 (§.41), in casu remotiorum FC:FB > 3:2. Unde BC:FB = 1:2 (§.193. *Arithm.*) in casu priore.

COROLLARIUM 2.

116. Si refractio ex aqua in aerem contingit in casu radiorum axi vicinorum erit FC:FB = 4:3 (§.41), in casu remotiorum FC:FB > 4:3. Unde BC:FB = 1:3 (§.193. *Arithm.*) in casu priore.

THEOREMA 25.

Tab. II. Fig. 13. 117. *In hypothesi theorematis præcedentis, erit radius concavitatis* CE *ad distantiam puncti dispersus a centro* FC *in ratione sinus anguli refractionis* CFE *ad sinum anguli refracti* CEN.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis 22. (§. 111.).

LEMMA 2.

118. *Cosinus anguli septem graduum, & multo magis anguli minoris, a sinu toto in centesimis non differt. Cosinus vero viginti graduum nondum in decimis a sinu toto dissidet. Et idem de secantibus eorundem angulorum valet.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim sinus totus fuerit 10000, cosinus septem graduum est vi Canonis 9925. Differentia itaque $\frac{75}{10000}$ seu $\frac{7}{1000} < \frac{1}{100}$. *Quod erat unum.*

Similiter si sinus totus fuerit 10000, cosinus viginti graduum est vi Canonis 9396. Differentia itaque $\frac{604}{10000}$ seu $\frac{6}{100} < \frac{1}{10}$. *Quod erat alterum.*

Nec absimili modo idem de secantibus ostenditur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

119. Quoniam in triangulo MFE ad M rectangulo FEM est complementum anguli F ad rectum (§. 241. *Geom.*) & hinc FE ad FM ut sinus totus ad cosinum anguli F (§. 33. & 11. *Trigon.*); quamdiu angulus F septem gradus non excedit, differentia hypothenusæ FE & catheti FM centesima istius parte minor; & quamdiu idem angulus F viginti gradus non superat, differentia rectarum FE & FM decima longe minor. Tab. II. Fig. 13.

COROLLARIUM 2.

120. Quodsi ergo in triangulo rectangulo FME angulus F fuerit 7 graduum

dunm vel minor, & centesima hypothenusæ FE pars fuerit parvitatis contemnendæ, hypothenusa FE, & cathetus FM ad sensum æquales sunt. Eodemque modo patet, fore ad sensum FE = FM, si F 20° vel minor, & $\frac{1}{10}$ EF parvitatis contemnendæ.

THEOREMA 26.

Tab. II. Fig. 14. 121. *Si axis* AF *diaphani sphærici* LM *ita secetur in* N, *ut* NB *habeat ad* NC *rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* N *incidat radius* ND *per medium rarius in superficiem convexam diaphani densioris* LM, *angulo* N *paucorum graduum existente; refractus* DV *erit axi* AF *parallelus. Quodsi incidens* AD *ex puncto remotiori* A *emanet, refractus* DF *cum axe concurrit in* F*; si vero incidens* QD *ex puncto viciniori* Q *adveniat, refractus* DT *ab axe divergit punctum dispersus in* G *habens.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND ipsi NB admodum vicinus seu angulus BND paucorum graduum *per hypoth.* erit ND ipsi NB propemodum æqualis (§. 120). Quare cum NC ad NB habeat rationem sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti *per hypoth.* etiam NC ad ND eandem rationem habebit (§. 168. *Arithm.*). Sunt vero latera NC & ND ut sinus angulorum CDS & NCD (§. 35. *Trigon.*). Quoniam itaque CDS est angulus inclinationis (§. 12), erit NCD refracto CDV (§. 14.) æqualis, consequenter DV axi AF parallela (§. 255. *Geom.*). *Quod erat primum.*

Si radius AD ex puncto remotiori incidit, erit CDX angulus inclinationis (§. 12), CDF angulus refractus (§. 14). Quare si ex centro C demittantur perpendiculares CH & CO, itemque CI & CP; sumto CD pro sinu toto, erit CO sinus anguli inclinationis CDX & CH sinus refracti eidem respondentis CDF, similiterque CP sinus anguli inclinationis CDS radii ex N emanantis & CI sinus anguli refracti CDV eidem respondentis (§. 2. *Trigon.*). Est vero CP : CI = CO : CH (§. 26) adeoque CP : CO = CI : CH (§. 173. *Arithm.*). Quare cum CP > CO, quia angulus CDS > CDX (§. 84. *Arithm.*); etiam CI > CH, consequenter radius refractus DF a puncto axis C minus distat, quam parallela DV. Sed in puncto D eadem erat utrique ab axe distantia. Ergo distantia ipsius DF ab axe in progressu minuitur, adeoque DF cum eodem convergit (§. 83. *Geom.*)

tan-

tandemque alicubi veluti in F concurrere debet. *Quod erat secundum,*

Si denique radius QD ex puncto viciniori incidit, erit CDR angulus inclinationis & CDT refractionis (§. 12 & 14), demisſæque ex C perpendiculares CZ & CK, ſumto CD pro ſinu toto, eorundem ſinus (§. 2. *Trigon.*). Unde eodem, quo ante modo, oſtenditur, refractum DT ab axe divergere, adeoque punctum diſperſus in G habere. *Quod erat tertium.*

PROBLEMA 10.

Tab. II. Fig. 15. 122. *Si axis* AF *diaphani ſphærici* LM *ita ſecetur in* N, *ut* NB *ad* NC *habeat rationem ſinus anguli refracti ad ſinum anguli inclinationis & ex puncto remotiori* A *per medium rarius in ſuperficiem convexam diaphani denſioris* LM *radius incidat, angulo* BCD *exiguo exiſtente; determinare diſtantiam puncti concurſus a ſuperficie refringente* BF.

RESOLUTIO.

Ex Centro C demittantur perpendiculares CH & CI, quæ ſumto CD pro ſinu toto, erunt ſinus angulorum refracti CDF & inclinationis CDG (§. 2. *Trigon.* & §. 11 & 14. *Dioptr.*). Demittatur etiam ex D ad axem AF perpendicularis DK. Quoniam angulus BCD exiguus exiſtit *per hypoth.* erit CK ipſi CB æqualis (§. 120) & hinc etiam FK ipſi FB atque AK ipſi AB, immo etiam per eandem rationem perpendiculares ex C demiſſæ CH & CI æquales habentur perpendicularibus ex punctis I & H ad axem demiſſis.

Fiat itaque $AB = d$, $CB = a$, $CH = m$, $CI = n$, $FB = x$, erit $AC = a + d$, $FC = x - a$, conſequenter (*per monſtrata* & §. 268. *Geom.*).

$$FC : FK = CH : KD$$
$$x - a : x = m : \frac{mx}{x-a}$$
$$AC : AK = CI : KD$$
$$a + d : d = n : \frac{nd}{a+d}$$

Habemus adeo

$$mx : (x - a) = nd : (a + d)$$
$$max + mdx = ndx - nad$$
$$nad = ndx - max - mdx$$

Quæ ultima æquatio in analogiam reſoluta dabit.

$$(n - m)\, d - ma : na = d : x$$

hoc eſt $(n - m)\, AB - m\, CB : n\, CB = AB : FB$

Data adeo ratione refractionis $n : m$ (§. 24), in quolibet caſu ſpeciali

ciali per regulam trium invenietur FB.

E. gr. Si refractio ex aëre in vitrum contingit, $n:m = 3:2$ (§. 26). Sit $CB = 6$, $AB = 150''$; erit $n - m = 1$, $(n-m)\ AB - mCB = 150'' - 12'' = 138''$, $nCB = 18''$, consequenter $FB = 150.18:138 = 19\frac{13}{23} = 195''$ fere.

COROLLARIUM 1.

123. Ergo si refractio ex aëre in vitrum contingit, erit $AB - 2CB : 3\ CB = AB : FB$ (§. 26) & hinc $AB - 2CB : AC = AB : AF$ (§. 190. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

124. Si refractio ex aëre in aquam fit, erit $AB - 3CB : 4CB = AB : BF$ (§. 41) & hinc $AB - 3CB : AC = AB : AF$.

THEOREMA 27.

Tab. II. Fig. 15. 125. *Si axis diaphani sphærici* AF *ita dividatur in* N, *ut* NB *ad* NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis, & ex puncto* A *radius* AD *axi vicinus, (hoc est, angulo* A *paucorum graduum existente) per medium rarius in superficiem convexam diaphani densioris* LM *incidat; erit* $AN : NC = AB : FB$.

DEMONSTRATIO.

Sit ratio sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis $= m:n$; erit $NB : NC = m:n$ *vi hypoth.* & hinc $BC : NB = n - m : m$ (§. 193. *Arithm.*), consequenter $NB = mBC : (n-m)$, adeoque $NC = BC + mBC : (n-m)$ & $AN = AB - mBC : (n-m)$. Est itaque

$$AN : NC = AB - \frac{mBC}{n-m} : BC + \frac{mCB}{n-m}$$

hoc est $AN : NC = (n-m)\ AB - mBC : nBC$ (§. 178. *Arithm.*). Est vero $(n-m)\ AB - mBC : n\ BC = AB : FB$ (§. 122). Quare $AN : NC = AB : BF$ (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

126. Erit igitur etiam $AN : AC = AB : AF$ (§. 190. *Arithm.*) & ideo ulterius $AN : AB = AC : AF$ (§. 173. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

127. Est adeo etiam $AN : BN = AC : CF$ (§. 193. *Arithm.*).

PROBLEMA 11.

128. *Si axis* FP *ita fuerit divisus in* N, *ut* NB *ad* NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* A *in superficiem convexam* LM *diaphani sphærici densioris per medium rarius incidat radius* AD *axi vicinus; punctum dispersus* F *determinare.* Tab. II. Fig. 16.

RESOLUTIO.

Quoniam radius AD axi diaphani AC vicinus, adeoque angulus A exiguus supponitur; si DK ad AC,

AC, CH ad FE & CI ad AG perpendiculares demittantur, erit ad ſenſum AK = AB, FK = FB, & perpendiculares ex K ad AG, ex I & H ad AC demisſæ a normalibus DK, CI & CH ad ſenſum non different (§. 120). Quodſi CD ſumatur pro ſinu toto; erit CI ſinus anguli inclinationis CDG (§. 2. *Trig.* & §. 12. *Dioptr.*) & CH ſinus anguli refracti CDE (§. 2. *Trigon.* & §. 14. *Dioptr.*).

Fiat jam $AB = d$, $CB = a$, $CH = m$, $CI = n$, $FB = x$, erit $AC = a + d$, $FC = x + a$, conſequenter (*per demonſtrata* & §. 268. *Geom.*)

$$FC : FK = CH : KD$$
$$x + a : x = m : \frac{mx}{x+a}$$
$$AC : AK = CI : KD$$
$$a + d : d = n : \frac{nd}{a+d}$$

Habemus adeo

$$mx : (x + a) = nd : (a + d)$$
$$max + mdx = ndx + nad$$
$$max + mdx - ndx = nad$$

Hæc æquatio in analogiam reſoluta dabit

$$ma + (m-n) d : na = d : x$$
$$mBC + (m-n) AB : nCB = AB : FB$$

Data adeo ratione refractionis $m : n$ (§. 24), in dato quolibet caſu ſpeciali per regulam trium invenitur FB.

E. gr. Si refractio ex aëre in vitrum contingit; erit $n : m = 3 : 2$ (§. 26). Sit $CB = 6''$, $AB = 10''$, erit $mBC = 12$, $(m - n) AB = - 10$, $nCB = 18$, conſequenter $FB = 18 . 10 : 2 = 90''$.

COROLLARIUM 1.

129. Ergo ſi refractio ex aëre in vitrum contingit, erit $2BC - AB : 3CB = AB : FB$ (§. 26) & hinc $2BC - AB : AC = AB : AF$ (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

130. Si refractio ex aere in aquam fit, erit $3BC - AB : 4BC = AB : FB$ (§. 41) & hinc $3BC - AB : AC = AB : AF$ (§. 190. *Arithm.*).

THEOREMA 28.

131. *Si axis diaphani ſphærici* FP *ita ſecetur in* N, *ut* NB *habeat ad* NC *rationem ſinus anguli refracti ad ſinum anguli inclinationis & ex puncto viciniori quam* N *per medium rarius incidat radius* AD *axi vicinus* (*hoc eſt angulo* A *paucorum graduum exiſtente*) *in ſuperficiem diaphani denſioris convexam* LM; *erit* AN : NC = AB : FB. Tab. II. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Sit ratio ſinus anguli refracti ad ſinum anguli inclinationis $= m : n$;

 erit

erit NB : NC = $m:n$ *per hypoth.* adeoque BC:NC = $n-m:n$ & BC: NB = $n-m:m$ (§. 193. *Arithm.*), adeoque NC = nBC:$(n-m)$, & NB = mBC:$(n-m)$, consequenter AN = mBC:$(n-m)$ − AB. Est itaque NA:NC = $\frac{mBC-AB}{n-m} : \frac{nBC}{n-m}$ = mBC − $(n+m)$ AB : nBC (§. 178. *Arithm.*) = AB : FB (§. 128). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

132. Est itaque etiam NA : AC = AB : AF (§. 190. *Arithm.*).

PROBLEMA 12.

Tab. II. Fig. 16. 133. *Si radius* FC *ex puncto* F *axis* FP *per medium densius in superficiem convexam* LM *diaphani sphærici rarioris incidit; determinare punctum dispersus* A.

RESOLUTIO.

Ex antecedentibus constat, demissis CH & CI ex centro diaphani C perpendicularibus ad radium incidentem FE & refractum AG, fore CH sinum anguli inclinationis CDE & CI sinum anguli refracti CDG, & si fiat CH = m, CI = n, FB = d, BC = a, AB = x & hinc AC = $a+x$, FC = $a+d$, fore ulterius

$$AC : AB = CI : KD$$
$$a+x : x = n : \frac{nx}{a+x}$$
$$FC : FB = CH : KD$$
$$a+d : d = m : \frac{md}{a+d}$$

Habemus ergo

$$nx:(a+x) = md:(a+d)$$

$$nax + ndx = mad + mdx$$

$$nax + ndx - mdx = mad$$

Hæc æquatio in analogiam resoluta dabit

$$na + (n-m)\,d : ma = d : x$$

hoc est, nBC + $(n-m)$ FB : mBC = FB : AB.

E. gr. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit $n : m = 3 : 2$ (§. 41). Quare si BC = 8″, FB = 20″, erit nBC + $(n-m)$ FB = 24 + 20 = 44, mBC = 16, consequenter AB = 20 . 16 : 44 = $7\frac{3}{11}$.

COROLLARIUM 1.

134. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit 3BC + FB : 2BC = FB : AB (§. 41), adeoque FC : 2BC = FA : AB (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

135. Si refractio ex aqua in aërem fit, erit 4BC + FB : 3BC = FB : AB (§. 41) & hinc FC : 3BC = FA : AB (§. 193. *Arithm.*).

THEO-

THEOREMA 29.

Tab. II. Fig. 16. 136. *Si ex puncto* F *axis diaphani sphærici rarioris per medium densius incidat radius* FD *axi vicinus, sitque* A *punctum concursus radii refracti* DG *cum axe* FP *ita diviso, ut* BP *ad* PC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis; erit* FP : PC = FB : BA.

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli inclinationis ad refractum ut m ad n. Quoniam BP : PC = n : m *per hypoth.* erit BC : PC = $n-m$: m & BC : BP = $n-m$: n (§. 193. *Arithm.*), adeoque PC = mBC : $(n-m)$ & BP = nBC : $(n-m)$, consequenter FP = nBC : $(n-m)$ + FB. Est itaque FP : PC = $\frac{n\text{BC}}{n-m}$ + FB : $\frac{m\text{BC}}{n-m}$ = nBC + $(n-m)$ FB : mBC (§. 178. *Arithm.*) = FB : AB (§. 133). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

137. Est igitur etiam FP : FC = FB : FA (§. 193. *Arithm.*), & FP : FB = FC : FA (§. 173. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

138. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit 3BC + FB : FB = FC : FA (§. 41); si vero ex aqua in aërem, 4BC + FB : FB = FC : FA (§. *cit.*). Est enim FP = nBC : $(n-m)$ + FB.

PROBLEMA 13.

Tab. II. Fig. 17. 139. *Si radius* AD *ex puncto axis* A *per medium rarius in cavam superficiem diaphani sphærici densioris* LM *incidat, determinare punctum dispersus* F.

RESOLUTIO.

Sit CI sinus anguli inclinationis CDA = n, CH sinus anguli refracti CDF = m, AB = d, FB = x, CB = a; erit FC = $x - a$, AC = $d - a$ & ex antecedentibus constat fore

$$\begin{array}{ccccccc} AC & : & AB & = & CI & : & KD \\ d-a & : & d & = & n & : & \frac{nd}{d-a} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} FC & : & FB & = & CH & : & KD \\ x-a & : & x & = & m & : & \frac{mx}{x-a} \end{array}$$

Habemus ergo

$$nd : (d-a) = mx : (x-a)$$

$$ndx - nda = mdx - max$$

$$max + ndx - mdx = nda$$

Hæc æquatio in analogiam sequentem resolvitur

$$am + (n-m)\, d : na = d : x$$

$$m\text{BC} + (n-m)\,\text{AB} : n\text{BC} = \text{AB} : \text{FB}$$

 E. gr.

E. gr. Si refractio fit ex aere in vitrum, erit $n : m = 3 : 2$ (§. 26). Quare si $BC = 20''$, $AB = 80''$; erit $mBC + (n-m) AB = 40 + 80$, $nBC = 60$, adeoque $FB = 80.60 : 120 = 40$.

COROLLARIUM 1.

140. Si refractio ex aëre in vitrum contingit, erit $2BC + AB : 3BC = AB : FB$ (§. 26) & hinc $2BC + AB : AC = AB : AF$ (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

141. Si refractio ex aëre in aquam fit, erit $3BC + AB : 4BC = AB : FB$ (§. 28) & hinc $3BC + AB : AC = AB : AF$ (§. 193. *Arithm.*).

THEOREMA 30.

Tab. II. Fig. 17. 142. *Si radius* AD *ex puncto axis* A *per medium rarius in cavam superficiem diaphani sphærici densioris* LM *incidat &* CQ *ad* QB *habeat rationem sinus anguli inclinationis ad sinum refracti; erit* $AQ : CQ = AB : FB$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $CQ : QB = n : m$ *per hypoth.* erit $CB : CQ = n - m : n$ & $CB : QB = n - m : m$ (§. 193. *Arithm.*) atque hinc $CQ = nCB : (n - m)$ & $QB = mCB : (n - m)$, adeoque $AQ = mCB : (n - m) + AB$. Est itaque $AQ : CQ = \frac{mCB}{n-m} + AB : \frac{nCB}{n-m} = mCB + (n-m) AB : nCB$ (§. 178. *Arithm.*) $= AB : FB$ (§. 139). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

143. Est ergo $AQ : AC = AB : AF$ (§. 193. *Arithm.*) & hinc $AQ : AB = AC : AF$ (§. 173. *Arithm.*).

THEOREMA 31.

144. *Si axis* AB *diaphani sphærici concavi* DR *ita dividatur in* N *ut* BN *ad* NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* N *incidat radius* ND *axi vicinus per medium densius in rarius; erit refractus* DL *axi* AF *parallelus. Quodsi ex puncto ulteriori* A *incidat* AD, *refractus* DF *cum axe* AF *in puncto* F *concurret: si vero ex puncto propiori* I *vel* S *adveniat radius* ID *vel* SR, *refractus* DO *vel* ZR *ab axe* AF *divergit habens punctum dispersus in* Q *vel* T. *Si denique radius incidat ex centro* C, *nullam refractionem patitur.* Tab. II. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

Si radius DL axi parallelus & vicinus per medium rarius in superficiem convexam diaphani sphærici densioris DR incidit fueritque BN ad CN in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti; erit N punctum concursus post refractionem (§. 90). Quare si refractus DN sumatur pro incidente, sitque adeo angulus NDC angulus inclinationis, qui ante erat

rat refractus; erit nunc radius DL refractus, qui ante erat incidens (§. 37), consequenter refractus DL axi AF parallelus. *Quod erat primum.*

Demittantur jam ex centro C rectæ *Ca*, *Cb*, *Cd*, *Ce*, *Cf*, *Cg* ad ND, DG, DA, DH, DI, DQ perpendiculares; erunt *Ca*, *Cd*, *Cf* sinus angulorum inclinationis CDN, CDA, CDI (§. 2. *Trigon.* & §. 12. *Dioptr.*) & *Cb*, *Ce*, *Cg* sinus angulorum refractorum CDG, CDH, CDQ (§. 2. *Trig.* & §. 14. *Dioptr.*). Quare cum sit $Ca : Cb = Cd : Ce$ (§. 26 & 37) & $Cd > Ca$; erit etiam $Ce > Cb$, consequenter centrum C a radio refracto DH magis distat, quam a parallelo DG, & hinc DH ab axe AB divergit, adeoque DF cum BF convergit (§. 263. *Geom.*). *Quod erat secundum.*

Similiter quia $Ca : Cb = Cf : Cg$ (§. 26. 37) & $Cf < Ca$, erit quoque $Cg < Cb$, consequenter centrum C a radio refracto DQ minus distat, quam a parallelo DG & hinc DQ cum axe AB convergit, adeoque DO ab eodem divergit (§. 263. *Geom.*). Est itaque punctum dispersus in Q (§. 23). Quod vero incidentis RS punctum dispersus sit in T satis patet (§. 38). *Quod erat tertium.*

Si radius ex centro incidit, est ad LM perpendicularis (§. 38. *Analys. infinit.*). Transit ergo irrefractus (§. 25). *Quod erat quartum.*

PROBLEMA 14.

145. *Si axis diaphani sphærici ita dividatur in* O, *ut* BO *sit ad* OC *in ratione sinus anguli refractí ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* F *incidat radius* FD *axi vicinus per medium densius in superficiem cavam diaphani rarioris* LM; *determinare punctum concursus* A. Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

Ex centro C demittantur in radium incidentem DF & refractum DG (§. 38) perpendiculares CH & CI; sumto CD pro sinu toto, erit CH sinus anguli inclinationis (§. 2. *Trigon* & §. 12. *Dioptr.*) & CI sinus anguli refracti CDG (§. 2. *Trigon.* & §. 14. *Dioptr.*). Demittatur ex puncto refractionis D perpendicularis ad axem DK. Ex antecedentibus constat, fore ad sensum FK ipsi FB, & perpendiculares KD, CI & CH perpendicularibus ex puncto K ad AG & ex punctis I & H ad axem BF demissis æquales. Quare si fiat $CH = m$, $CI = n$, $FB = d$, $AB = x$, $CB = a$ erit

FC

FC $= d - a$, AC $= x + a$, adeoque (§.268. *Geom.*)

$$AC : CI = AB : KD$$
$$x+a : n = x : \frac{nx}{x+a}$$
$$FC : CH = FB : KD$$
$$d-a : m = d : \frac{md}{d-a}$$

Habemus igitur

$$nx : (x+a) = md : (d-a)$$

$$ndx - nax = mdx + mad$$

$$ndx - mdx - nax = mad$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam

$$(n-m)\, d - na : ma = d : x$$

hoc est, $(n-m)$ FB $- n$CB : mCB $=$ FB : AB

E. gr. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit $n:m = 3:2$ (§.41). Quare si FB $= 24''$, BC $= 6''$; erit AB $= 24.12:(24-18) = 48$.

COROLLARIUM. 1.

146. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit FB $-$ 3CB : 2CB $=$ FB : AB (§.41), adeoque, FB $-$ CB : 2CB $=$ FA : AB (§.190. *Arithm.*), hoc est, FC : 2CB $=$ FA : AB.

COROLLARIUM 2.

147. Si refractio ex aqua in aërem contingit, erit FB $-$ 4CB : 3CB $=$ FB : AB (§.41) adeoque FB $-$ CB : 3CB : $=$ FA : AB (§.190. *Arithm.*), hoc est, FC : 3CB $=$ FA : AB.

THEOREMA 32.

148. *Si axis diaphani sphærici* FB *ita dividatur in* O *ut* BO *ad* OC *sit in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* F *per medium densius in superficiem concavam diaphani rarioris* LM *incidat radius* FD*, erit* FO : CO $=$ FB : FA. Tab. II. Fig. 15.

DEMONSTRATIO.

Sit BO : OC $= n : m$; erit BC : OC $= n-m : m$ & BC : BO $= n-m : n$ (§.193. *Arithm.*), adeoque OC $= m$BC : $(n-m)$ & BO $= n$BC : $(n-m)$, atque FO $=$ FB $- n$BC : $(n-m)$. Est igitur FO : CO $=$ FB $- \frac{nBC}{n-m} : \frac{mBC}{n-m}$ $= (n-m)$ FB $- n$BC : mBC $=$ (§.178. *Arithm.*) $=$ FB : AB (§.145). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

149. Ergo FO : FC $=$ FB : FA (§.190. *Arithm.*), consequenter FO : FB $=$ FC : FA (§.173. *Arithm.*).

PROBLEMA 15.

150. *Si axis diaphani sphærici* AB *ita dividatur in* N *ut* BN *ad* NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* I *diaphano viciniori quam* N *incidat per medium densius in ejus superficiem cavam* Tab. II. Fig. 19.

LM

LM *radius axi vicinus* ID, *determinare punctum diſperſus* Q.

RESOLUTIO.

Demittantur ex centro C perpendiculares CH ad radium incidentem ID & CK ad refractum DQ: erit CH ſinus anguli inclinationis CDI (*ſ.* 2. *Trigon* & §. 12. *Dioptr.*) & CK ſinus anguli refracti CDK (*ſ.* 2. *Trigon.* & §. 14. *Dioptr.*). Demittatur etiam ex D recta DE ad axem AB normalis; erit eadem ob anguli Q parvitatem perpendiculari ex E ad QD demiſsæ æqualis: ob quam rationem etiam QE = QB. Quare ſi fiat CH = m, CK = n, BC = a, IB = d, QB = x, adeoque IC = $d-a$, QC = $x-a$; erit (*ſ.* 268. *Geom.*),

$$\begin{array}{ccccccc} QC & : & QB & = & CK & : & ED \\ x-a & : & x & = & n & : & \frac{nx}{x-a} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} IC & : & IB & = & CH & : & ED \\ d-a & : & d & = & m & : & \frac{md}{d-a} \end{array}$$

Habemus adeo

$$\frac{nx}{x-a} = \frac{md}{d-a}$$

$$ndx - nax = mdx - mad$$

$$mad = nax + mdx - ndx$$

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

Hæc æquatio in ſequentem abit analogiam:

$$na + (m-n)\ d : ma = d : x$$

$$nBC + (m-n)\ IB : mBC = IB : QB.$$

E. gr. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit $m : n = 2 : 3$ (§. 41). Quare ſi BC = 6″, IB = 10″; erit QB = 10.12 : (18 − 10) = 15.

Quodſi radius ex puncto S intra centrum C & ſuperficiem diaphani ſito incidat, continuetur RS in $ſ$ & RT in t atque ex C demittantur perpendiculares C$ſ$ & Ct, qui erunt ſinus anguli inclinationis CRS & refracti CRT. Quare cum ob verticales ad S & T ΔΔ CS$ſ$ & SRy, itemque CTt & RTy ſint ſimilia, & ob parvitatem angulorum S & T ſit Sy = SB & Ty = TB; reperietur eodem, quo ante modo, Tab. II. Fig. 18.

$$nBC + (m-n) SB : mBC = SB : TB.$$

COROLLARIUM 1.

151. Si refractio ex vitro in aërem contingit, erit, 3BC − IB : 2BC = IB : QB (§. 41), conſequenter IC : 2BC = QI : QB (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

152. Si refractio ex aqua in aërem contingit, erit 4BC − IB : 3BC = IB : QB (§. 41), conſequenter IC : 3BC = QI : QB (§. 193. *Arithm.*).

THEOREMA 33.

153. *Si axis diaphani ſphærici* AB *ita dividatur in* N, *ut* BN *ad* Tab. II. Fig. 19.

NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & ex puncto* I *superficiei viciniori quam* N, *per medium rarius in superficiem cavam diaphani sphærici densioris* LM *radius incidat; erit* IN : NC = IB : QB.

DEMONSTRATIO.

Si ratio refractionis ponatur ut supra $m:n$, erit NC : NB $= m:n$, *vi hypoth.* unde NC : CB $= m : n-m$ & NB : CB $= n : n-m$ (§. 193. *Arithm.*), adeoque NC $= m$CB : $(n-m)$ & NB $= n$CB : $(n-m)$ & IN $= n$CB : $(n-m)$ − IB. Est itaque IN : NC $= \frac{nCB}{n-m} - IB : \frac{mCB}{n-m} = nCB - (n+m)IB : mCB$ = IB : QB (§. 150). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

154. Ergo IN : IC = IB : IQ (§. 193. *Arithm.*).

PROBLEMA 16.

Tab. III. Fig. 20. 155. *Si radius* GA *tendens ad punctum* A *axis* BA *diaphani sphærici densioris incidat per medium rarius in ejus superficiem convexam* LM; *determinare punctum concursus* F.

RESOLUTIO.

Quia radius GA frangitur ad axem refractionis CD, est autem angulus refractionis ADF minor angulo inclinationis ADC (§. 25); evidens est, punctum concursus F esse inter centrum C & A. Quodsi ex centro C demittantur perpendiculares CH & CI, notenturque ea, quibus in antecedentibus jam sæpe usi fuimus, & fiat CH $= m$, CI $= n$, BC $= a$, AB $= d$, FB $= x$; erit FC $= x-a$, AC $= d-a$ atque

$$\begin{array}{ccccccc} AC & : & AB & = & CI & : & ED \\ d-a & : & d & = & n & : & \frac{nd}{d-a} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} FC & : & FB & = & CH & : & ED \\ x-a & : & x & = & m & : & \frac{mx}{x-a} \end{array}$$

Habemus adeo

$$mx : (x-a) = nd : (d-a)$$

$$mdx - max = ndx - nad$$

$$nad = ndx - mdx + max$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$(n-m)d + ma : na = d : x$$

hoc est $(n-m)$AB $+ m$CB : nCB = AB : FB.

E. gr. Si refractio ex aëre in vitrum contingit, erit $m:n = 2:3$. Quare si CB $= 10''$, BA $= 25''$, erit FB $= 25.30 : (25+20) = 16\frac{2}{3}$.

Tab. III. Fig. 21. Quodsi punctum A, ad quod radius AD tendit, fuerit inter centrum.

trum C & superficiem diaphani; tum quia radius DA ad perpendiculum DC refringitur, angulus tamen refractionis ADF minor est angulo inclinationis ADC (§. 25); refractus DF axi occurret inter A & C. Jam si DA & DF ultra axem producantur & in eas perpendiculares CI & CH demittantur; sumta DC pro sinu toto, erit CI sinus anguli inclinationis ADC (§. 2. *Trigon.* & § 10. *Dioptr.*) & CH sinus anguli refracti FDC (§. 2. *Trig.* & §. 14. *Dioptr.*) & ob parvitatem angulorum A & F (§. 120) AD = AE = AB; FD = FE = FB. Quare si fiat ut ante CI = n, CH = m, CB = a, AB = d, FB = x, erit AC = $a - d$, FC = $a - x$, & cum verticales ad A & F sint æquales (§. 156. *Geom.*), demissa ex D perpendiculari DE, erit (§. 267. *Geom.*)

$$AC : CI = AE : ED$$
$$a-d : n = d : \frac{nd}{a-d}$$
$$FC : CH = FB : ED$$
$$a-x : m = x : \frac{mx}{a-x}$$

Habemus itaque

$$nd : (a-d) = mx : (a-x)$$
$$nda - ndx = max - mdx$$
$$nda = ndx - mdx + max$$

Quæ æquatio cum superiori coincidit. Eadem igitur regula satisfacit determinando puncto concursus F, sive radius incidens ad punctum axis intra centrum & superficiem, sive ad aliud ultra centrum situm tendat.

COROLLARIUM 1.

156. Si refractio ex aere in vitrum contingit, erit AB + 2CB : 3CB = AB : FB (§. 26), adeoque AB + 2CB : AC = AB : AF (§. 193. *Arithm.*) Tab. III. Fig. 20.

COROLLARIUM 2.

157. Si refractio ex aëre in aquam contingit, erit AB + 3CB : 4CB = AB : FB (§. 28), adeoque AB + 3CB : AC = AB : AF (§. 193. *Arithm.*).

THEOREMA 34.

158. *Si radius* GD *tendens ad punctum* A *axis diaphani sphærici incidat per medium rarius in ejus superficiem convexam* LM *& post refractionem eidem occurrat in* F, *axe in* N *producto, donec* CN *habeat ad* NB *rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis, erit* AN : CN = AB : FB. Tab. III. Fig. 20 & 21.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CN : NB = $n : m$ *per hypoth.* erit CB : NB = $n - m : m$ & CB : CN = $n - m : n$ (§. 193. *Arithm.*), adeoque NB = mCB : $(n - m)$, CN = nCB:

$nCB:(n-m)$ & $AN = mCB:(n-m) + AB$. Est itaque $AN : CN = \frac{mCB + AB}{n-m} : \frac{nCB}{n-m} = mCB + (n-m) AB : nCB = AB : FB$ (155). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

159. Est adeo AN : AC = AB : AF (§. 193. *Arithm.*), consequenter AN : AB = AC : AF (§. 173. *Arithm.*).

THEOREMA 35.

Tab. II. Fig. 15. 160. *Si partes axis diaphani sphærici* OC *&* OB *fuerint in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti & radius* ED *axi vicinus ad punctum* F *ultra* O *situm tendens per medium densius in diaphani rarioris superficiem convexam* LM *incidat: refractus* DG *dispergetur ex puncto* A, *ita ut sit* FO : FB = FC : FA.

DEMONSTRATIO.

Si radius FD in concavam superficiem incidit & ab axe CD refringitur in DG, ex puncto A ita dispergitur, ut FO : FB = FC : FA (§. 149). Sed si radius ED incidit in diaphani rarioris convexam superficiem, angulus inclinationis idem, qui ante manet, & eadem quantitate ab axe refractionis CD refringitur (§. 36). Ergo is quoque refractus ex puncto A ita dispergi debet, ut sit FO : FB = FC : FA. *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

161. *Si fuerit in axe diaphani* NC : NB *in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti & radius* FD *ad punctum* I *inter centrum* C *& punctum* N *situm tendens per medium densius in superficiem convexam diaphani rarioris incidit, post refractionem is axi occurret in* Q, *ita ut sit* NI : IB = IC : IQ. Tab. II. Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Si radius ID ex medio densiori incidit in cavam superficiem, ab axe refractionis CD refractus axi diaphani in Q occurrit, ita ut NI : IB = IC : IQ (§. 154). Sed si radius DF in superficiem convexam diaphani ex medio densiori incidit, idem manet angulus inclinationis & radius ibidem ab axe CD eadem, qua ante, quantitate refringitur (§. 36). Ergo idem quoque post refractionem concurrit cum axe in Q, adeoque NI : IB = IC : IQ. *Q. e. d.*

THEOREMA 37.

162. *Si fuerit* NC *ad* NB *in ratione sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti & radius* PR *axi vicinus tendens ad punctum* S, *inter* Tab. II. Fig. 18.

inter centrum C *& superficiem diaphani sphærici rarioris* DR *situm, per medium densius in ejus superficiem convexam incidat, refractus* RT *cum axe in* T *concurrit, ita ut sit* SN:SB=SC:ST.

DEMONSTRATIO.

Si radius SR in superficiem cavam per medium densius incidit, refractus ab axe refractionis CR ex puncto T dispergitur, ita ut sit SN : SC = SB : ST (§. 150. 153), consequenter SN : SB = SC : ST (§. 173. *Arithm.*). Enimvero si radius PR per medium densius in superficiem convexam incidit, idem manet angulus inclinationis & radius ibidem ab axe sub eodem angulo refringitur (§. 36). Ergo refractus RT cum axe concurrit, ita ut sit SN : SB = SC : ST. *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

Tab. II. Fig. 15. 163. *Si* C *sit centrum superficiei sphæricæ* LM *atque* NB *ad* NC *habeat rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & radius axi vicinus* GD *tendens ad punctum* A *per medium rarius incidat in superficiem cavam diaphani sphærici densioris* LM; *refractus dispergetur ex puncto* F, *ita ut sit* AN : AB=AC:AF.

DEMONSTRATIO.

Si ex puncto A per medium rarius in superficiem convexam incidit radius AD, refractus ad axem refractionis CD ita occurrit axi diaphani in F ut sit AN : AB = AC : AF (§. 126). Sed si DG fuerit radius incidens, idem est angulus inclinationis GDC & ad axem refractionis CD eadem quantitate anguli GDF refringitur (§. 25. 26). Ergo refractus DE itidem axi in F occurrit, ita ut sit AN : AB = AC : AF, consequenter ex hoc puncto dispergitur (§. 23). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

164. *Si fuerit* NB *ad* NC *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & radius* DG *tendens ad punctum* A *inter* N *& superficiem diaphani situm, incidat per medium rarius in superficiem cavam diaphani densioris, refractus cum axe in* F *concurrit, ita ut sit* NA : AB = CA : AF. Tab. II. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Si ex puncto A per medium rarius in superficiem convexam incidit radius AD, refractus DE ad axem refractionis CD ex puncto F ita dispergitur, ut sit NA : AC = AB : AF (§. 132), adeoque NA :

 AB =

AB=CA:AF (§. 173. *Arithm.*). Sed si DG per medium rarius in superficiem cavam incidit, idem est, qui ante, angulus inclinationis GDC & refractio sub eodem angulo GDE ad axem refractionis CD contingit (§. 25. 26). Ergo radius refractus DF axi diaphani in F ita occurrit, ut sit NA: AB = CA: AF. *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

165. *Si fuerit* PB *ad* PC *in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis & radius* EF *axi vicinus tendens ad punctum* F *per medium densius incidat in superficiem cavam diaphani sphærici rarioris, refractus* AD *axi diaphani ita occurrit in* A *ut sit* FP: FB = FC: FA. Tab. II. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ demonstratio theorematis præcedentis (§. 137).

CAPUT IV.

DE

REFRACTIONE LUMINIS IN LENTIBUS CONVEXIS.

THEOREMA 41.

Tab. III. Fig. 21. 166. *Radius* EG *axi vicinus & parallelus incidens in superficiem planam lentis plano-convexæ luminoso directe oppositæ post refractionem cum axe concurrit in* F *& si* C *fit centrum convexitatis*, CF *ad* FL *habet rationem refractionis seu sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis.*

DEMONSTRATIO.

Quia superficies plana luminoso directe opponitur, *per hypoth.* radius EH ad AB perpendicularis, adeoque irrefractus transit usque in H (§. 25). Incidit adeo in superficiem cavam AHB adhuc axi parallelus. Quare cum ex lente densiori in medium rarius erumpat, axi lentis in F occurrit, estque CF ad FL in ratione refractionis, hoc est, in ratione sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis (§. 114). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

167. *Posthac constanter supponemus, lentem esse densiorem medio circumfuso & rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis vocabimus* rationem refractionis.

COROLLARIUM 1.

168. Si itaque refractio ex lente vitrea in aërem contingit, erit CF: FL = 3:2 (§. 41) adeoque FL = 2CL, hoc est, radii paralleli axi vicini cum eodem uniuntur in distantia diametri.

COROLLARIUM 2.

169. Si refractio ex lente aquea, hoc est, ex vitro plano-convexo & aqua pleno contingit, erit CF: FL = 4:3 (§. 41) adeoque FL = 3CL, hoc est, radii paralleli axi vicini cum eodem uniuntur in distantia sesquidiametri.

COROLLARIUM 3.

170. Ergo si in foco lentis plano convexæ, hoc est, in puncto F, quod a superficie convexa lentis vitreæ ALB distat intervallo diametri, a superficie vero lentis aqueæ intervallo sesquidiametri collocetur candela accensa, radii post refractionem erunt paralleli (§. 17).

COROLLARIUM 4.

171. Ope lentis plano-convexæ optime observari potest ratio refractionis ex vitro in aërem.

THEOREMA 41.

172. *Si radius* KI *axi lentis plano convexæ vicinus & parallelus incidat in superficiem convexam* AHB, *post duplicem refractionem axi occurret in* F, *ita ut* HG *ad* GC *&* GD *ad* FD *habeat rationem refractionis.* Tab. III. Fig. 23.

DEMONSTRATIO.

Quoniam radius KI axi EG parallelus, vi primæ refractionis in I tendit ad punctum G, ita ut GH ad GC habeat rationem sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti (§. 90). Ergo vi secundæ refractionis in L factæ cum axe in F concurrit, ita ut GD ad FD rationem sinus anguli refracti ad sinum anguli inclinationis habeat (§. 80). *Q. e. d.*

PROBLEMA 17.

173. *Data semidiametro* HC *crassitie* DH *lentis plano-convexæ* AB *& ratione refractionis, determinare focum* F, *radiorum axi parallelorum & vicinorum, in superficiem convexam* AHB *incidentium.* Tab. III. Fig. 23.

RESOLUTIO.

1. Sit brevitatis gratia ratio refractionis $= n : m$. Quoniam $n : m = HG : GC$ (§. 172); erit $n - m : n = HC : GH$ (§. 193. *Arithm.*), adeoque ratione refractionis & semidiametro datis inveniri potest

est GH. Est nempe generaliter $GH = nHC : (n-m)$.

2. Inde si subducatur crassities lentis DH, relinquetur $GD = nHC : (n-m) - HD$.

3. Quare cum porro sit $n : m = GD : FD$ (§. 172); ob datam rationem refractionis $n : m$, reperitur quoque FD, nempe universaliter $FD = \frac{mCH}{n-m} - \frac{mHD}{n}$ = (si $\frac{mHD}{n}$ parvitatis contemnendæ) $\frac{m}{n-m}CH$.

COROLLARIUM 1.

174. Si lens vitrea fuerit, erit $FD = 2CH - \frac{2}{3}HD$ (§. 26). Quare si duæ tertiæ crassitiei lentis fuerint parvitatis contemnendæ (quod in praxi plerumque accidit); radii paralleli axi uniuntur in distantia diametri a lente, etiam cum in superficiem convexam incidunt.

COROLLARIUM 2.

175. Perinde igitur est, sive superficiem planam, sive convexam luminoso radiorum parallelorum obvertas (§. 168).

SCHOLION.

176. *Constat tamen cum experientia, tum calculus trigonometricus juxta caput præcedens institutus evincit, plures radios in spatio minori uniri si superficies convexa, quam si plana luminoso obvertatur.*

COROLLARIUM 3.

177. Si lens aquea fuerit, erit $FD = 3CH - \frac{3}{4}HD$ (§. 26). Quare si $\frac{3}{4}$ HD parvitatis contemnendæ, erit $FD = 3CH$, aut si mavis $\frac{1}{4}$ HD contemnere, $FH = 3CH$. Uniuntur adeo radii axi paralleli & vicini in distantia sesquidiametri, si refractio in aqua fiat, etiam cum superficies convexa luminoso obvertitur.

THEOREMA 43.

178. *Si radius* DE *axi* AB *parallelus & vicinus in sphæram incidat, post duplicem refractionem axi continuato in* F *occurrit, ita ut semidiametro* CB *bifariam in* I *divisa* CF *ad* FI *sit in ratione refractionis.* Tab. III. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Quoniam radius DE axi AB vicinus & parallelus *per hypoth.* post refractionem in ingressu factam ad punctum G tendit, ita ut GA ad GC habeat rationem refractionis $n : m$ (§. 90). Quare cum etiam sit $n-m : n = AC : GA$ & $n-m : m = AC : GC$ (§. 193. *Arithm.*); erit $GA = nAC : (n-m)$, & $GC = mAC : (n-m)$. Quodsi jam radius alteram patitur refractionem in egressu, fiatque $BL : LC = n : m$; cum axe in F concurrit, ut sit $GL : GB = GC : GF$ (§. 105), adeoque BL: GB

GB = FC : GF (§. 193. *Arithm.*). Est vero CB : BL = n − m : n (§ cit.), adeoque BL = nCB : (n − m) = GA per demonstrata.

Ergo si fiat

AC = CB = a, FC = x, erit

$$GA : GB = FC : GF$$

$$\frac{na}{n-m} : \frac{na}{n-m} - 2a = x : \frac{ma}{n-m} - x$$

hoc est, $n : 2m - n = nx - mx : ma - nx + mx$ (§. 178. 181. *Arith.*).

$2m : n = ma : nx - mx$ (§. 190. *Arithm.*)

$1 : n = \frac{1}{2}a : (n - m)x$ (§ 181. *Arithm.*)

$n - m : n = \frac{1}{2}a : x$ (§. 181, 178. *Arith.*).

$m : n = x - \frac{1}{2}a : x$ (§. 193. *Arithm.*).

Quoniam FC = x & CI = ½ CB *per hypoth.* = ½ a; erit $x - \frac{1}{2}a$ = IF, adeoque

$m : n$ = IF : CF. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

179. Quoniam circulus est sectio cylindri pariter ac sphæræ, immo omnis solidi per rotationem figuræ curvilineæ circa axem geniti; si radii paralleli diametro sectionis basi solidi parallelæ post duplicem refractionem in F concurrunt, IF ad CF rationem refractionis habebit.

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 25. 180. Facile adeo observatur ratio refractionis in omnis generis fluido, si radiis solaribus, qui pro parallelis (*Wolfii Math. Tom.* 3.) haberi possunt (§. 94. *Optic.*) directe opponatur cylindrus AB liquore quocunque dato plenus & in charta opposita notetur punctum F, ubi radii concurrunt. Quodsi enim radium CB bifariam seces in I, exhibebit IF ad CF rationem refractionis desideratam (§. *prec.*).

COROLLARIUM 3.

181. Quoniam $n - m : n = \frac{1}{2}a : x$ (§. 178); erit $x = na : (2n - 2m)$ = FC. Data itaque ratione refractionis & semidiametro sphæræ refringentis CB, inveniri potest foci a centro distantia CF.

COROLLARIUM 4.

182. Si sphæra vitrea, erit CF = $\frac{3}{2}a$ = $\frac{3}{2}$ CB (§. 26), adeoque BF = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{4}$ AB. Focus adeo a sphæra vitrea quarta diametri parte distat.

COROLLARIUM 5.

183. Si sphæra aquea, erit CF = $\frac{4}{2}a$ = 2CB (§. 28), adeoque BF = CB = ½ AB. Focus adeo a sphæra aquea dimidia diametri parte distat, consequenter sphæra aquea focum duplo remotiorem habet quam vitrea.

THEOREMA 44.

184. *Si radius* HI *axi* DG *parallelus & vicinus incidit in lentem utrinque convexam, post duplicem refractionem eidem occurrit in* F, *sique tum* GE *ad* GC, *tum* DK *ad* DO *habuerit rationem refractionis, erit* GD : GK = GO : GF. Tab. III. Fig. 26.

DEMONSTRATIO.

Si EG ad GC habuerit rationem refractionis, radius HI axi lentis vicinus & parallelus tendit ad punctum G (§. 90), Quare si porro DK ad DO rationem refractionis habuerit, post alteram refractionem in egressu factam axi in F occurret, estque GD : GK = GO : GF (§. 165). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

185. Ergo etiam GK : DK = GO : FO (§. 193. *Arithm.*).

PROBLEMA 18.

Tab. III. Fig. 26. 186. *Datis semidiametris* CE & OK *lentis utrinque convexæ, una cum crassitie ejus* EK, *determinare focum* F *radiorum axi parallelorum & vicinorum.*

RESOLUTIO.

1. Si ratio refractionis fuerit = $n:m$, erit GE : GC = $n:m$ & DK : DO = $n:m$ (§. 184), adeoque $n-m:n$ = CE : GE & $n-m:n$ = KO : DK (§. 193. *Arithm.*). Quare si ratio refractionis & semidiametri CE atque KO dentur, inveniri possunt GE & DK.
2. Quare cum GD = DK + EG − EK & GK = GE − EK, denique GO = GE + KO − EK, sitque GD : GK = GO : GF (§. 184); GF quoque inveniri potest.
3. Quodsi vero GF ex GE subducas, relinquetur FE.

COROLLARIUM 1.

187. Si EK fuerit parvitatis contemnendæ (quod plerumque accidit); erit GD = DK + EG, GK = GE & GO = GE + KO, adeoque DK + EG : GE = GE + KO : GF (§. 184).

COROLLARIUM 2.

188. Ergo si refractio in lente vitrea contingit, cum sit GE = 3CE & DK = 3KO (§. 91); erit 3KO + 3CE : 3CE = 3CE + KO : GF (§. 187), consequenter KO + CE : CE = 3CE + KO : GF (§. 178. *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

189. Quare si fiat KO = a, CE = b, GF = x; erit $x = (3bb + ab) : (a + b)$, adeoque ob GE = 3 CE (§. 91) FE vel FK (in hypothesi nempe crassitiei EK contemnendæ) = $3b - \frac{3bb - ab}{a+b} = \frac{3ab + 3bb - 3bb - ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$. Est nempe summa semidiametrorum KO & CE ad unius duplum 2CE ut altera KO ad distantiam foci a lente FK.

COROLLARIUM 4.

190. Si refractio in lente aquea contingit, cum sit GE = 4 CE & DK = 4KO (§. 93); erit 4KO + 4CE : 4CE = 4CE + KO : GF (§. 187), con-

consequenter $KO+CE : CE = 4CE + KO : GF$ (§. 178. *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

191. Quare si fiat $KO=a$, $CE=b$, $GF=x$; erit $x=(4bb+ab):(a+b)$, adeoque ob $GE=4CE$ (§.93) in hypothesi præsenti crassitiei lentis contemnendæ FE vel $FK = 4b - \frac{4bb-ab}{a+b} =$

$$\frac{4ab + 4bb - 4bb - ab}{a+b} = \frac{3ab}{a+b}.$$

Est nempe summa semidiametrorum KO & CE ad alterutrius triplum 3CE ut altera KO ad distantiam foci a lente FK.

COROLLARIUM 6.

192. Si lens vitrea fuerit utrinque æqualiter convexa, erit $KO=CE$, adeoque $2CE:CE=4CE:GF$ (§.179), consequenter $CE : CE = 2CE:GF$ (§. 183. *Arithm.*). Est itaque $GF=2CE$.

COROLLARIUM 7.

193. Immo in eadem hypothesi $FK = 2a^2:2a = a = EC$ (§. 189), hoc est, focus a lente semidiametri intervallo distat.

COROLLARIUM 8.

194. Si lens aquea utrinque æqualiter convexa, erit ob $KO = CE$, $2CE:CE=5CE:GF$ (§. 190). Ergo $GF = \frac{5}{2} CE$ (§. 183. *Arithm.*).

COROLLARIUM 9.

195. In eadem hypothesi $FK=3aa:2a = \frac{3}{2}a$ (§.191), hoc est distantia foci a lente est ad semidiametrum in ratione sesquialtera.

COROLLARIUM 10.

196. Cum in ratione, per quam foci distantia a lente utrinque inæqualiter convexa, neglecta crassitie, determinatur, termini tres priores manent iidem, quæcunque convexitas luminoso obvertatur; foci quoque distantia eadem manere debet (§. 177. *Arithm.*)

THEOREMA 45.

197. ***Lumen solare in foco lentis convexæ, sive plano-convexæ, sive convexo-convexæ, valde intenditur.***

DEMONSTRATIO.

Quoniam radii solares sunt paralleli (§. 94. *Optic.*), axi vicini in foco lentium plano-convexarum atque convexo-convexarum, itemque sphærarum, uniuntur (§. 172. 184. 178). Radii igitur per integram lentem dispersi in spatium minus rediguntur, consequenter lumen solare in foco valde intenditur (§. 84. *Optic.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

198. Non igitur mirum, quod radii solares ope lentis convexæ aut sphæræ pellucidæ collecti ignem suscitent & liquabilia liquefaciant aliosque effectus edant, quæ igni vehementiori debentur.

SCHOLION 1.

199. *Nemo lentes causticas majores unquam paravit Illustri* Dn. de Tschirnhausen, *quarum inter alios sequentes prædicat effectus in Eruditorum Actis* (a). *Lignum durum, immo aqua humectatum, momento flammam concepit; aqua in vase parvo statim effervescere cœpit, metalla liquefacta sunt, lateres, pumex, porcellana Hollandica, asbestus in vitrum conversi; sulphur, colophonis, pix & id genus alia sub aqua colliquata, lignum rarius æstate sub eadem in carbonem conversum, cineres vegetabilium, lignorum aliarumque materiarum in vitrum transmutati. Verbo quæ foco admovit, vel fundi, vel in calcem verti, vel in auras abire deprehendit. Notat autem, omnia melius succedere, si carbonibus durioribus probeque excoctis materiæ vi ignis probandæ imponantur, & non modo gemmas, sed omnia etiam alia corpora præter metalla suis privari coloribus. Lentium diameter fuit trium*
Tab. *& quatuor pedum, lentique majori* AB
III. *addita est minor* CD, *quæ radios ad*
Fig. *punctum* G *tendentes in viciniori* F
27. *colligit, adeoque magis unitorum vires intendit.*

SCHOLION 2.

200. *Quamvis vero radiorum solarium vires adeo stupendas expertus est; lunæ tamen plenæ radii per eadem vitra caustica collecti nullum caloris incrementum præbuere.*

SCHOLION 3.

201. *Ceterum cum vis caustica lentium a convexitate earundem unice pendeat; mirum sane non est, quod etiam ex glacie paratæ ignem exicitent. Parantur autem istiusmodi lentes, si frustum glaciei cavitati scutellæ immittatur, ut carbonum calore ad liquefactionem dispositum figuram ejus induat.*

SCHOLION 4.

202. *Nec minus attoniti flammam flammæque effectus contuentur dioptrices ignari, quæ ope refractionis luminis in bulla vitrea aqua repleta factæ excitatur, propterea quod ignis aquæ auxilio excitatur.*

THEOREMA 46.

203. ***Si post sphæram diaphanam, aut lentem sive plano-convexam, sive convexo-convexam vel æqualiter, vel inæqualiter, in foco collocetur luminosum, radii post refractionem evadunt paralleli.***

DEMONSTRATIO.

Radii enim paralleli post refractionem in sphæra diaphana aut lente convexa factam in foco uniuntur (§. 197). Quare si luminosum fuerit in foco & ex eo radiet in lentem per radios inde divergentes, qui antea erant radii refracti

(a) A. 1697. p. 415, & seqq.

fracti, nunc fiunt incidentes, adeoque refracti evadunt, qui antea erant incidentes, consequenter refracti sunt paralleli. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

204. Hinc ope lentis convexæ aut bullæ vitreæ aqua repletæ lumen valde intensum ad magnam distantiam projicitur (§. 84. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

205. Quoniam tamen luminis per radios parallelos in aëre propagati intensitas continuo minuitur, ope refractionis in lente convexa factæ ad datam quamcunque distantiam propagari nequit.

COROLLARIUM 3.

206. Si luminosum in foco collocatum fuerit majoris amplitudinis, a punctis sensibiliter a se invicem distantibus incidentes radii inter se paralleli esse nequeunt, sed plures constituunt tramites radiorum inter se parallelorum.

SCHOLION.

207. *Hæc quoque aliqua ratio est, cur lumen per refractionem propagatum sensim sensimque languescat, dum nempe tramites luminosi a se invicem discedunt.*

PROBLEMA 19.

Tab. III. Fig. 28. 208. *Lucernam construere, quæ lumen valde intensum ad insignem distantiam projiciat.*

DEMONSTRATIO.

1. Lucernæ AB afferruminetur tubus CD, cui alius ductitius EF immittatur.
2. Huic inseratur lens vitrea utrinque convexa FE, diametro convexitatis unius circiter pedis, vel etiam majore, aut minore existente, pro magnitudine scilicet lucernæ.
3. Ex opposito tubi CD intus aptetur ad parietem lucernæ speculum concavum HI diametro concavitatis quinque circiter digitorum, vel etiam majore aut minore existente, pro magnitudine nimirum lucernæ. Ita autem aptandum est speculum, ut, si opus fuerit, remota capsa K, eximi possit.
4. In foco speculi constituatur ellychnium L & tubus ductitius cum lente extrahatur, donec lumen satis intensum ad distantiam desideratam projiciatur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ellychnium L in foco speculi concavi HI collocatur, *per hypoth.* radii post reflexionem sunt paralleli (§. 224. *Catoptr.*). Lumen itaque intensum in lentem FE reflexum (§. 84. *Optic.*) post refractionem constat radiis ad focum

lentis in distantia semidiametri convergentibus (§. 193) & inde rursus divergentibus. Quodsi vero ellychnium L fuerit quoque in foco lentis FE radii post refractionem sunt itidem paralleli (§. 103). Quare cum lumen hoc per se satis intensum cum altero non minus intenso concurrat, per intervallum diametri a lente lumen intensissimum (§. 84. *Optic.*). Et licet postea decrescat, quia tamen diversi tramites radiorum parallelorum cum divergentibus procul admodum progrediuntur (§. 206), lumen satis intensum ad insignem distantiam propagatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

209. *Lucernarum istiusmodi usus est, si nocturno tempore objecta procul dissita detegenda. Prosunt item, si cancri & pisces de nocte congregandi, ut capientur.*

COROLLARIUM.

210. Quodsi ad diversa loca, e. gr. per plures plateas, lumen una transmittendum, pluribus opus est tubis cum lentibus vitreis pluribusque speculis concavis iisdem oppositis.

THEOREMA 47.

Tab. III. Fig. 29. 211. *Si* H *fuerit centrum convexitatis superioris &* I *centrum convexitatis inferioris lentis utrinque convexæ,* CH *ad* CD *in ratione refractionis: radii ex* C *in lentem incidentes post refractionem in* E *concurrunt, ita ut* EI *ad* EF *sit in ratione refractionis.*

DEMONSTRATIO.

Etenim post primam refractionem intra lentem propagantur paralleli (§. 121): ergo post alteram uniuntur in E, ita ut EI ad EF sit in ratione refractionis (§. 121). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

212. Si lens vitrea fuerit; erit CD = 2DH (§. 26) & EF = 2IH (§. 41). Quare si punctum radians C a lente convexa AB distet intervallo diametri convexitatis ADB; punctum concursus E ab eadem distat intervallo diametri convexitatis alterius AFB.

THEOREMA 48.

213. *Si* C *sit centrum lentis plano-convexæ* LM *fueritque* NB *ad* NC *in ratione refractionis & ex puncto ulteriori* A *incidat radius* AD *axi vicinus; post duplicem refractionem eidem occurret in* F, *ita ut posita ratione refractionis* = n : m *sit* (n−m) AB − mBC : AB = m BC : EF. Tab. IV. Fig. 30.

DEMONSTRATIO.

Si enim fiat AB = *d*, BC = a; erit, GE = *nad* : [(*n*−*m*) *d* − *ma*] (§. 122).

122). Sed GE : FE = $n : m$ (§.80). Ergo EF = $mad : [(n-m) d - ma]$, consequenter

$$(n-m) d - ma : ma = d : EF$$

hoc est, $(n-m)$ AB $- m$ BC : m BC = AB : EF. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

214. Ergo si lens vitrea, erit AB − 2BC : 2BC = AB : EF (§. 26), adeoque cum 2BC sit distantia foci principalis, hoc est, radiorum parallelorum (§. 174), erit ut differentia distantiæ foci principalis a distantia puncti radiantis ad priorem, ita distantia posterior ad distantiam foci minus principalis seu radiorum divergentium.

COROLLARIUM 2.

215. Si lens aquea fuerit, erit AB − 3BC : 3BC = AB : EF (§. 28). Quare cum 3BC sit distantia foci principalis (§. 177); eadem regula lentibus vitreis & aqueis satisfacit.

THEOREMA 49.

Tab. IV. Fig. 31. 216. *Si C fuerit centrum convexitatis inferioris B & H superioris E, PE ad PH habeat rationem refractionis, sitque præterea* AP : PH = AE : EF *&* FP : PC = FB : BG; *erit G punctum concursus radiorum axi vicinorum & ex puncto A oblique incidentium.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AP : PH = AE : EF vi refractionis in D factæ (§. 125). Cum adeo radius DI in inferiorem superficiem incidens ad punctum F tendat, & ex medio densiore in rarius egrediatur *per hypoth.* erit FP : FB = FC : FG (§. 165). Est igitur etiam FP : FC = FB : FG (§. 173. *Arithm.*), consequenter FP : PC = FB : BG (§. 193. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 20.

217. *Data ratione refractionis* PC : PF *semidiametris convexitatum* CB *&* EH *atque distantia puncti radiantis* A *ultra centrum* C, *invenire punctum* G, *ubi radius* AD *axi vicinus & oblique incidens post refractionem cum eodem concurrit.* Tab. IV. Fig. 31.

RESOLUTIO.

1. Quæratur punctum concursus F, ad quod vi primæ refractionis tendit radius AD (§. 122).
2. Hinc investigetur punctum G, ad quod vi secundæ cum axe concurrit (§. 165).

Idem problema resolvitur utendo analogiis theorematis præcedentis, quamvis paulo prolixius, si calculo uti, non geometrica constructione contentus esse volueris. In hoc altero vero casu solutio posterior priori præfertur.

THE-

THEOREMA 50.

Tab. IV. Fig. 32. 218. *Si* C *fuerit centrum convexitatis superioris* B *&* H *centrum inferioris* I *lentis utrinque convexæ sive æqualiter, sive inæqualiter, &* NB *habeat ad* NC *itemque* OI *ad* OH *rationem refractionis, sitque præterea* AN : NC = AB : FB *&* FO : OH = FI : GI; *erit* G *punctum, ubi radius* AD *oblique ex* A *incidens cum axe post refractionem concurrit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam NB ad NC rationem refractionis habet & AN : NC = AB : FB, *per hypoth.* radius AD vi primæ refractionis ex puncto F dispergitur (§. 131). Quare cum porro sit OI ad OH in ratione refractionis & FO : OH = FI : GI *per hypoth.* erit G focus radiorum axi vicinorum ex A incidentium (§. 148). *Q.e.d.*

PROBLEMA 21.

Tab. IV. Fig. 32. 219. *Datis ratione refractionis, semidiametris convexitatum* BC *&* IH *atque distantia puncti radiantis* A *inter centrum* H *& lentem, invenire focum* G.

RESOLUTIO.

1. Quæratur punctum F, unde radius vi primæ refractionis in D tactæ dispergitur (§. 128).
2. Hinc ulterius investigetur punctum G, ubi radius post alteram refractionem cum axe concurrit (§. 145).

Si geometrica constructione contentus sis, per theorema præcedens optime absolvetur.

SCHOLION.

220. *Ex his abunde patet, quomodo in omni casu reliquo vi principiorum in capite præcedenti expositorum focus determinari possit, si nempe radius in lentem quamcunque convexam incidens ad punctum aliquod tendere supponatur: ea igitur ut prolixe hic persequamur superfluum esse videtur. Nimirum non alio fine refractionem in superficiebus sphæricis & planis pro diversitate radiorum incidentium & densitatis mediorum, per quæ ante & post refractionem propagatur, quam ut inde refractio in lentibus determinari possit. Consideremus itaque potius, quid accidat radiis a punctis extra axem lentium sitis incidentibus vel etiam ad puncta extra axem lentium sita tendentibus.*

PROBLEMA 10.

221. *Invenire focum radiorum ex puncto* K *extra axem* AF *sito in lentem utcunque convexam incidentium.* Tab. IV. Fig. 33.

RESOLUTIO.

Illud satis patet, si refractio in unica tantum superficie fiat, punctum radians K semper esse in axe, qui

qui eſt recta ex puncto dato K per centrum ſuperficiei, in quam incidit, ducta (§. 21). Unde per principia in capitibus præcedentibus tradita in omni caſu haud difficulter focus radiorum inde incidentium determinabitur: quod adeo unico in caſu demonſtraſſe ſuffecerit.

1. Sit itaque lens utrinque convexa AB, axis lentis AF, punctum extra axem K & Kf ducatur per centrum C convexitatis ſuperioris, radius KD irrefractus tranſibit & punctum f, ad quod vi primæ refractionis tendit radius KE, determinabitur (§. 122).

2. Ex f ducatur ad centrum convexitatis inferioris LEM recta Hf, quæ erit axis aliquis diaphani, cujus ſuperficies LM (§. 21). Cum adeo radius Bf ad punctum f tendat & in cavitate ex diaphano denſiori in rarius refringatur; punctum concurſus G determinabitur (§. 165): quod eſſe focum, in quo colliguntur radii ex K venientes, per ſe patet.

THEOREMA 51.

Tab. IV. Fig. 11. 222. *Foci* g *&* G *radiorum ex punctis* A *&* K *a centro ad ſenſum æqualiter diſtantibus in lentem quomodocunque convexam incidentium ab ea æqualiter ad ſenſum diſtant.* (*Wolfii Math. Tom. 3.*)

DEMONSTRATIO.

Quoniam CA = CK *per hypoth.* & CE = CD (§. 40. *Geom.*); erit EA = DK (§. 91. *Arithm.*). Eſt vero $(n-m)$ AE $-m$ CE : nCE = AE : FE & $(n-m)$ KD $-$ mDC : nDC = KD : Df (§. 122). Quamobrem cum ſit $(n-m)$ AE$-m$CE : n CE = $(n-m)$ KD$-m$ DC : n DC (§. 168. *Arithm*); erit AE : FE = KD : Df (§. 167. *Arithm.*), conſequenter EF = Df (§. 177. *Arithm.*) & ob CE = CD (§. 40. *Geom.*) CF = Cf (§. 91. *Arithm.*). Jam cum angulus ACK exiguus ſupponatur; erunt anguli fHC & CfH multo magis exigui (§. 239. *Geom.*), conſequenter Hf ipſis HC & Cf ſimul ſumtis ad ſenſum æqualis, & hinc Hf = HF (§. 88. *Arithm.*). Quare etiam Hg ipſi HG (§. 165) & inde ob HI = HB (§. 40. *Geom.*) porro Bg ipſi IG ad ſenſum æqualis (§. 91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 52.

223. *Focus radiorum divergentium a lente longius diſtat foco radiorum parallelorum & diſtantia foci in priori caſu major aut mi-* Tab. IV. Fig. 10.

nor est pro distantia puncti radiantis majore aut minore.

DEMONSTRATIO.

Ponamus refractionem fieri in lente plano-convexa, distantia foci radiorum parallelorum HE erit 2CB, si C sit centrum convexitatis (§. 168. 174). Sed distantia foci radiorum divergentium FE est 2BC. AB: (AB–2BC) (§. 214). Est itaque HE : FE = 2CB : 2CB. AB = AB–2BC: $\overline{\text{AB}-2\text{BC}}$ AB (§. 178. 181. *Arithm.*). Quare cum AB–BC < AB; erit HE < FE. *Quod erat unum.*

Sit 2BC = *b*, AB in casu uno = *a*, in altero = *ea*; erit *a* – *b* : *a* = *ea* – *eb*: *ea* (§. 178. *Arithm.*). Est vero *ea*–*eb* < *ea* – *b* (§. 92. *Arithm.*). Ergo *ea*–*eb* : *ea* (= *a*–*b* : *a*) < *ea* – *b* : *ea* (§. 182. *Arithm.*) adeoque HE ad FE in priori casu rationem majorem habet quam in posteriori (§. 203. *Arithm.*). Ergo distantia foci radiorum divergentium in casu priori minor, quam in posteriori (§. 206. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur utrumque in quocunque casu alio. *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

Tab. IV. Fig. 33. 224. *Objectorum lenti quomodocunque convexæ oppositorum imagines in foco ejus inverso situ depinguntur.*

DEMONSTRATIO.

Omnes enim radii a puncto A venientes in foco G concurrunt (§. 218); radii vero ex puncto K emanantes in foco *g*, & radii a punctis intermediis inter A & K adventantes in punctis intermediis inter *g* & G uniuntur (§. 222). Radii igitur ex puncto K propagati post refractionem quasi ex *g* radiant & a puncto A propagati quasi ex G emittuntur, consequenter punctum K in *g*, punctum A in G videri debet (§. 348. *Optic.*). Objecti adeo imago in foco situ inverso delineatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

225. Hinc si charta, in loco præsertim obscuro, lenti convexæ in distantia foci objiciatur; imagines objectorum in eam radiantium situ inverso quam distinctissime suisque nativis coloribus delineantur.

COROLLARIUM 2.

226. Imagines objectorum vicinorum in majori distantia distincte delineantur; imagines vero remotorum in minore (§. 223).

COROLLARIUM 3.

227. Neque focus adeo radiorum solarium aliud est, quam imago solis.

CO-

COROLLARIUM 4.

228. Hinc in ecclipsibus solaribus imago Solis deficientis jucundo spectaculo lentibus grandioribus ligno inuritur.

COROLLARIUM 5.

229. Quodsi ergo lentem quamcunque convexam objectis tam vicinis quam remotis obvertas & chartam eidem subjicias, in qua imago distincte repræsentatur; foci ab ea distantiam dimetiri & inde semidiametrum convexitatis (§. 168. 193) conjicere licebit.

SCHOLION 1.

230. *Hoc modo explicari possunt, quæ supra de focis demonstrata sunt.*

COROLLARIUM 6.

231. Quodsi speculum concavum ita constituas, ut imago inversa per refractionem formata sit inter centrum & focum, vel etiam ultra centrum; per reflexionem rursus invertetur, adeoque erecta apparebit, in priori casu ultra centrum (§. 253. *Catoptr.*), in posteriori intra centrum & focum (§. 254. *Catoptr.*)

SCHOLION 2.

232. *Hoc artificium debetur* Johanni Baptistæ Portæ (b).

COROLLARIUM 7.

Tab. IV. Fig. 34. 233. Si post lentem HI speculum planum CD sub angulo semirecto ad planum horizonti parallelum inclines atque planum horizontale FG ita substernas, ut $D\alpha = D\alpha$ & $Cb = C\beta$: imago, quæ remoto speculo inversa videretur in $\beta\alpha$, nunc situ erecto videbitur in ab, quia punctum A a puncto speculi D in a & B a puncto speculi C in b reflectitur (§. 24. *Catoptr.*).

COROLLARIUM 8.

234. Si post imaginem $\alpha\beta$ per refractionem in lente CD factam constituatur lens altera convexa EF, ita ut imago inversa $\alpha\beta$ sit extra focum ejus; imago hæc perinde ac objectum aliquod in eam radiabit (§. 348. *Optic.*). Per refractionem itaque in altera lente formabitur imago inversa $b\,a$ imaginis inversæ $\alpha\beta$ (§. 224), hoc est, erecta objecti AB. Unde patet novum artificium imagines erigendi, si duæ lentes utrinque convexæ tubo ductitio inserantur. Tab. IV. Fig. 35.

SCHOLION 3.

235. *Lentes vel ejusdem sunt sphæricitatis, vel (quod præstat) anterior majoris sphæræ segmentum existit. Sed cum non quavis vitrorum proportio commoda deprehendatur (lens enim interior si sphæræ exiguæ segmentum, imagines obscuræ evadunt); ideo ex* Zahnio (c) *proportionem diametrorum in particulis centesimis pedis huc apponere libet.*

(b) Magiæ Natural. lib. 17. c. 6.
(c) Oculi artific. fund. I. synt. 3. c. 4. f. m. 170.

Vitrum anterius utrinque convexum.	Vitrum anterius plano convexum.	Vitrum interius utrinque convexum.
50	25	40.45.50
55	27½	40.45.50.55
60	30	40.45.50.55.60
65	32½	45.50.55.60.65
70	35	50.55.60.65.70
75	37½	55.60.65.70.75
80	40	60.65.70.75.80
85	42½	65.70.75.80.85
90	45	70.75.80.85.90
95	47½	75.80.85.90.95
100	50	80.85.90.95.100
110	55	90.95. usq; ad 110
120	60	& ita porro.
130	65	
140	70	
150	75	
200	100	

Nimirum si lentis prioris diameter fuerit $\frac{50}{100}$ seu dimidii pedis; erit commode lentis posterioris diameter $\frac{40}{100}$, vel $\frac{45}{100}$, vel $\frac{50}{100}$. Et eadem manebit lentis posterioris diameter, si anterior fuerit plano-convexa & diameter ejus $\frac{25}{100}$ pedis.

PROBLEMA 24.

236. ***Cameram obscuram construere, in qua imagines objectorum externorum distinctissimæ suisque nativis coloribus situ vel inverso, vel si mavis erecto repræsententur.***

RESOLUTIO.

1. Cubiculum quodcunque, ex quo fenestra patet in locum multis objectis obsitum, totum obscuretur, nonnisi exiguo in fenestra foramine relicto.
2. Foramen muniatur lente vel plano-convexa, vel utrinque convexa, quæ sit majoris sphæræ segmentum.
3. In distantia debita, per experientiam facile definienda, collocetur charta vel telum expansum.

In hac enim objectorum imagines desideratæ delineabuntur inversæ (§. 224).

4. Quodsi vero easdem situ erecto comparere malueris; id vel ope speculi concavi (§. 231), vel ope speculi plani (§. 233), vel ope duarum lentium tubo ductitio inclusarum (§. 234) efficies.

Aliter.

Quodsi cameram obscuram portatilem aut cistulam parastaticam desideres

1. Ex ligno arido paretur cistula Tab.
ABCD figuram parallelepipedi V.
habens, cujus latitudo 9 circiter Fig.
digitorum, longitudo duo- 36.
rum vel plurium pedum, pro diversa magnitudine diametrorum lentium.
2. In plano AC applicetur tubus ductitius EF cum duabus lentibus,

bus, aut, ut imago minori a tubo intervallo diſtet, tribus utrinque convexis. Diametri anteriorum æquales e. gr. $\frac{60}{100}$ pedis, diameter interioris minor e. gr. $\frac{40}{100}$ (§. 235).

3. Intra ciſtulam perpendiculariter in debita a tubo diſtantia erigatur charta oleo imbuta & ſubſcudibus agglutinata GH, ut imagines in eam trajectæ transpareant.

4. Denique in I fiat foramen rotundum, ut ambobus oculis commode introſpicere poſſis.

Quodſi tubum objectis obvertas, lentibus rite collocatis, quarum diſtantiam experientia optime definit; in charta GH objecta ut ante delineabuntur ſitu erecto.

Aliter.

Tab. V. Fig. 37. 1. In medio ciſtulæ erigatur turricula rotunda vel quadrata HI verſus objectum AB aperta.

2. Pone aperturam inclinetur ſub angulo 45. graduum ſpeculum planum exiguum *ab*, quod

3. Radios A*a* & B*b* reflectat in lentem utrinque convexam G tubulo GL incluſam.

4. In diſtantia foci ſubſternatur tabula charta munda obducta EF imaginem *aβ* exceptura.

5. Denique in NM fiat foramen oblongum, per quod introſpicere poſſis.

SCHOLION.

237. *Uſus cameræ obſcuræ multiplex. Naturam viſionis optime declarat, ita ut non immerito oculus camera obſcura naturalis & viciſſim camera obſcura oculus artificialis appelletur. Jucundiſſima ſpectacula exhibet, tum quod imagines objectis ſuis ſimillimas ſuisque nativis coloribus tinctas repræſentet, tum quod motus quoscunque una exprimat, quod poſterius præſertim ars nulla imitari poteſt. Artis pictoriæ peritus ex contemplatione harum imaginum multa annotabit, quæ ad perfectionem illius tendunt: artis vero imperitus objecta quævis accurate delineabit, ſi præſertim tertiam ſtructuram a nobis expoſitam ſibi elegerit. Tum vero camera obſcura etſi portatilis tantæ amplitudinis conſtrui debet, ut homo tuto ingredi & commode juxta tabulam, in quam projicitur imago, ſedere poſſit.*

LEMMA 3.

238. *Si fuerint duæ lineæ parallelæ* AB *&* CD *& eas ſecent duæ aliæ* EF *&* HI *ita ut angulus* HKB *ſit ipſi* CLF *æqualis; erit* FL *ipſi* KH *parallela.* Tab. IV. Fig. 38.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $o = x$ (§. 233. *Geom.*) & $o = y$ *per hypoth.* Ergo $y = x$ (§. 87. *Arithm.*) Quare cum ſit $y = u$ (§. 156. *Geom.*); erit $u = x$

Nn 3 (§. *cit.*

(§. *cit. Arithm.*), adeoque KH ipsi LF parallela (§. 255. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 54.

Tab. IV. Fig. 39. 239. *Si angulus inclinationis* SDE *in egressu lentis fuerit æqualis angulo refracto* DEM *in ingressu, erit angulus refractus in egressu* KDN *angulo inclinationis in ingressu* HEG *æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Sit ratio sinus anguli MED ad sinum anguli HEG = $m : n$; erit sinus anguli SDE ad sinum anguli KDN itidem = $m : n$ (§. 37). Sed sinus anguli SDE æqualis est sinui anguli MED *per hypoth.* Ergo sinus anguli HEG sinui anguli KDN æqualis est (§. 177. *Arithm.*), consequenter anguli HEG & KDN æquales sunt, *Q. e. d.*

THEOREMA 55.

Tab. IV. Fig. 39. 240. *In vitro utrinque plano parallelarum basium* AB & PQ *radius* KD *post duplicem refractionem fit incidenti* IG *parallelus.*

DEMONSTRATIO.

Sint CN & HM axes refractionis. Quoniam AB ipsi PQ parallela *per hypoth.* & CN ad PQ atque HM ad AB perpendicularis (§. 10); erit quoque HM ad PQ perpendicularis (§. 230. *Geom.*), adeoque HM ipsi CN parallela (§. 256. *Geom.*). Cum adeo MED = SDE (§. 233. *Geom.*); erit etiam HEG = KDN (§. 239) & hinc KO ipsi IG parallela (§. 238). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

241. Quodsi PQ tangat arcum ADB in D, cujus centrum in C; erit QD ad CD perpendicularis (§. 308. *Geom.*). Quare cum etiam CN ad AB perpendicularis supponatur; erit PQ ipsi AB parallela. Radius igitur ED incidens in superficiem concavam BDA perinde refringitur ac si in planam QP incideret (§. 48) & hinc radius refractus DK incidenti GI parallelus (§. 240).

COROLLARIUM 2.

242. Eodem modo patet, si radius KD sit incidens, fore refractum GE eidem parallelum.

THEOREMA 56.

243. *Si* C *fuerit centrum convexitatis inferioris,* M *vero superioris & crassities lentis* IH *ita divisa in* S, *ut* MI : CH = IS : SH, *radius* KD *post duplicem refractionem in lente utrinque convexa factam erit incidenti* GE *parallelus.* Tab. IV. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Quia MI : CH = IS : SH *per hypoth.* erit etiam MI : IS = CH : SH (§. 173. *Arithm.*), & hinc MI : MS

MS=CH : CS (§. 193. *Arithm.*), hoc est, ob MI=ME & CD=CH (§. 40. *Geom.*), ME : MS=CD : CS (§. 168. *Arithm.*). Quare cum verticales ad S sint æquales (§. 156. *Geom.*), erit CDS=DEM (§. 237. *Geom.* Tangat jam recta AB lentem in puncto incidentiæ E in ingressu & PQ in puncto incidentiæ D in egressu: radius in GE in superficie convexa perinde refrangetur, ac in plana, quæ in E lentem tangit, & radius KD in superficie concava perinde refractus ac si incidisset in planam, quæ in puncto D lentem tangit (§. 48), eruntque MEA & CDQ anguli recti (§. 308. *Geom.*), adeoque æquales (§. 145. *Geom.*), consequenter AED = EDQ (§. 91. *Arithm.*). Est igitur AB ipsi PQ parallela (§. 255. *Geom.*) & hinc si DE sit radius per lentem transiens, erit post alteram refractionem radius DK incidenti GE parallelus (§. 240). *Q. e. d.*

THEOREMA 57.

Tab. V. Fig. 41. 244. *Imago ab objecti AB post lentem convexam FE delineata est ad ipsum objectum AB quoad diametrum in ratione distantiæ imaginis Cd ad distantiam objecti CD.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam quodlibet objecti punctum per totam lentem FE radiat; necessario radius unus ex A proveniens per punctum C transit, quod refractum Ca facit incidenti AC parallelum (§. 241. 242. 243). Eodem modo patet, radium aliquem Cb esse incidenti BC parallelum. Quodsi lentis crassities contemnatur, AC & Ca, itemque BC & Cb pro una recta haberi possunt. Quare cum ob parallelismum AB & *ab*, *o* = *x* (§. 233. *Geom.*) & verticales ad C sint æquales (§. 156. *Geom.*), triangulum *a*C*b* alteri ACB simile est (§. 267. *Geom.*), adeoque *ba* : AB = C*d* : CD (§. 396. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

245. Quia imago objecti remotioris minus distat a lente quam vicinioris (§. 226), imogo remotioris minor est quam vicinioris.

COROLLARIUM 2.

246. Quoniam distantia imaginis a lente major est, si lens DE fuerit majoris sphæræ segmentum, quam si minoris extiterit (§. 168. 193); imago quoque in casu priore major est, in posteriore minor.

COROLLARIUM 3.

247. Imago igitur *ab* tantæ magnitudi-

tudinis eſt, quantæ foret, ſi objectum AB radiaret in locum obſcurum per exiguum foramen in parietem eodem intervallo remotum, quo focus a lente diſtat (§. 120. *Optic.*).

COROLLARIUM 4.

248. Quando objectum minus diſtat a lente foco radiorum parallelorum, imaginis diſtantia major eſt quam objecti (§. 224. 219), alias vero diſtantia imaginis minor quam objecti exiſtit (§. 214). In caſu itaque priore imago major eſt objecto, in poſteriore minor (§. 246).

COROLLARIUM 5.

249. Quia omnes radii ab axe non nimis remoti in eodem puncto uniuntur per refractionem, ſi ab eodem inciderint; ſi pars aliqua lentis prope axem tegatur, aut bullæ quædam, vel arenulæ, vel denique nævi quidam polituræ in lente obſerventur, nihil tamen horum in unam imaginis partem magis redundat, quam in reliquam.

SCHOLION 1.

250. *Si imagines objecto majores fiunt, non ſatis diſtinctæ apparent, quia tum pauciores ſunt radii, quæ in eodem puncto poſt refractionem concurrunt, unde contingit radios a diverſis punctis objecti emanantes in eodem imaginis puncto terminari. Sed hæc cauſa confuſionis* (§. 76. Optic.).

SCHOLION 2.

251. *Hinc apparet, non eandem in quovis caſu admitti lentis aperturam, ſi arcere volueris radios diſtinctioni nocituros. Quamvis autem tum imago maxime diſtincta, ſi radiis tantum prope axem concedatur ingreſſus; ob radiorum tamen defectum obſcurior eſt: obſcuritas vero etiam obſtat, quo minus imago ſatis diſtincta appareat.*

THEOREMA 58.

252. *Si oculus fuerit in foco* F *lentis utcunque convexæ, objectum* AB *ſitu videt erecto & auctum in ratione diſtantiæ ejus ab oculo* FM *ad oculi a lente diſtantiam* FL, *ſi vicinum fuerit; in infinitum, ſi fuerit remotum.* Tab. V. Fig. 42.

DEMONSTRATIO.

Sit radius ML in axe lentis: erit ergo ad utramque ſuperficiem perpendicularis (§. 21) adeoque per utramque irrefractus tranſit (§. 25). Ducatur BN axi ML parallelus. Quia in F focus eſt radiorum parallelorum *per hypoth.* radius BN refringetur in F (§. 22). Objectum igitur MB videtur per radios refractos ſub angulo LFN. Sed per irrefractos videtur ſub angulo MFB: in priore itaque caſu auctum apparet (§. 209. *Optic.*), ſitu tamen erecto, quia punctum dextrum B per radium FN videtur verſus dextram; ſiniſtrum vero M per radium FL verſus ſiniſtram. *Quod erat unum.*

Quo-

Tab. V. Fig. 42. Quoniam arcus LN exiguus, ut pro recta haberi possit & ob angulos ad L & M rectos *per hypoth.* BM ipsi LN parallela (§. 256. *Geom.*); erit FM : FL = MB : LE (§. 268. *Geom.*). Sed ob parallelismum rectarum ML & BN *per hypoth.* MB = LN (§. 226 *Geom.*) & objectum apparens est ad verum ut LN ad LE, tantæ nimirum magnitudinis videntur verum & apparens, quantæ LE & LN in distantia FL videntur (§. 209. *Optic.*). Est igitur diameter apparentis ad diametrum veræ ut FM ad FL (§. 168. *Arith.*). *Quod erat alterum.*

Si distantia objecti nimis longinqua, ratio FL & FM quavis data tandem major evadit, adeoque imago in infinitum augetur. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 59.

Tab. V. Fig. 43. 253. *Si oculus* G *fuerit in axe lentis convexæ* MF, *sed inter focum* O *& lentem* DE, *objectum videtur situ erecto, sed auctum quoad diametrum in ratione composita distantiæ puncti* F, *ad quod radius* BE *irrefractus tendit, a lente* FL *ad distantiam oculi ab eadem* GL *& distantiæ objecti* AB *ab oculo* GM *ad distantiam ejusdem objecti a puncto, ad quod radii irrefracti tendunt,* FM, *hoc est, ut* FL . GM *ad* GL . FM.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum demonstratione theorematis 13. (§. 83).

COROLLARIUM.

254. Si objectum AB fuerit longinquum, GF respectu ipsius GM tandem evanescit, adeoque FM ipsi GM redditur physice æqualis, consequenter magnitudo apparens ad veram quoad diametrum in ratione FL ad GL.

SCHOLION.

255. *Punctum* F, *ad quod radius* BE *irrefractus tendit per superiora determinari potest. Immo data latitudine objecti* MB *una cum angulo* MBE, *qui ob parallelismum rectarum* LI *&* MB *ipsi* LIB *æqualis, si nempe* LI *sit normalis ad* GM; *in triangulo ad* M *rectangulo reperietur* FM (§. 36. Trigon.).

THEOREMA 60.

256. *Si oculus* G *ultra focum* O *constitutus per lentem utcunque convexam videat objectum* AB *fitque* F *punctum, unde radius ab extremo* B *incidens* BE *divergit remotius à lente ipso objecto* AB; *objectum videbitur situ erecto & auctum in ratione composita* FL *ad* EM *&* GM *ad* GL. Tab. V. Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Quonjam objectum MB per radios

dios refractos sub angulo LGE, per irrefractos vero sub angulo LGN videtur; in priore casu auctum videri debet (§. 209. *Optic.*). Et quia punctum extremum B per radium GE videtur, M vero per radium GM; dextrum extremum videtur versus dexteram, sinistrum vero versus sinistram, hoc est, objectum situ erecto videtur. *Quod erat unum.*

Patet vero ex theorematis 58. demonstratione (§. 252); magnitudinem veram esse ad apparentem quoad diametrum ut LN ad LE & LE haberi posse pro recta ipsi MB parallela. Est itaque (§. 268. *Geom.*).

$$FM : FL = MB : LE$$
$$GM : GL = MB : LN$$

Ergo $LE = MB\,FL : FM$ & $LN = MB.GL : GM$, consequenter

$$LE : LN = \frac{MB.FL}{FM} : \frac{MB.GL}{GM}$$

hoc est, $LE : LN = GM.FL : FM.GL$ (§. 178. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 61.

Tab. V. Fig. 41. 257. *Si objectum* AB *a lente convexa adeo distet, ut radius* BE, *qui in oculum* G *refringitur, ex puncto axis* F *inter lentem & objectum sito ab eo divergat; situ videbitur inverso, estque magnitudo apparens* LE *ad veram* LN *in ratione composita* FL *ad* EM *&* GM *ad* GL.

DEMONSTRATIO.

Quia objectum AB ita situm est, ut radius BE in oculum G refractus axem secet in F; punctum B videbitur per radium GE adeoque versus sinistram. Et quia M per radium GM videtur, idem versus dexteram apparet. Ergo BM situ inverso videtur. *Quod erat unum.*

Ex antecedentibus vero constat, magnitudinem veram ad apparentem esse in ratione LN ad LE. Quare cum EN vi antecedentium demonstrationum haberi possit pro recta ad FL perpendiculari & ipsi AB parallela; erit $GM : GL = MB : LN$ (§. 268. *Geom.*), adeoque $LN = MB.\,GL : GM$, & cum anguli ad L & M recti, verticales ad F æquales (§. 156. *Geom.*), $FM : FL = MB : EL$ (§. 267. *Geom.*), adeoque $LE = FL.\,MB : FM$. Quare

$$LE : LN = \frac{FL.\,MB}{FM} : \frac{MB.\,GL}{GM}$$

hoc est, $LE : LN = FL.\,GM : GL.\,FM$ (§. 178. 181. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

CO-

COROLLARIUM 1.

258. Si fiat GM$=a$, GL$=b$, FM $=c$, FL$=d$, fueritque $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; erit $\frac{ad}{bd} > \frac{cb}{bd}$ (§. 235. *Arithm.*), consequenter $ad > cb$ (§. 182. *Arithm.*). In hoc itaque casu, in quo GM ad GL rationem majorem habet, quam FM ad FL, LE > LN (§. 257), hoc est, objectum MB videtur auctum.

COROLLARIUM 2.

259. Si fuerit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; erit $\frac{ad}{bd} < \frac{cb}{bd}$ (§. 235. *Arithm.*), consequenter $ad < cb$ (§. 182. *Arithm.*). In hoc igitur casu, in quo GM ad GL rationem minorem habet, quam FM ad FL, LE < LN (§. 257), hoc est, objectum MB videtur minutum.

COROLLARIUM 3.

260. Si fuerit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; erit $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ (§. 235. *Arithm.*), consequenter $ad = bc$ (§. 93. *Arithm.*). In hoc igitur casu, in quo GM ad GL rationem eandem habet, quam FM ad FL, LE = LN (§. 257), hoc est, objectum MB tantæ magnitudinis oculo armato apparet, quantæ a nudo videtur.

THEOREMA 62.

Tab. V. Fig. 42. 261. *Si oculus fuerit in foco* F *visibile* AB *ejusdem constanter magnitudinis apparet, quantocunque intervallo a lente removeatur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam radius BN axi MF parallelus, in focum F refringitur (§. 22), & distantia LF constans supponitur; angulus visorius LFN semper idem manet. Objectum igitur MB ad quamcunque distantiam LM ejusdem semper magnitudinis apparet (§. 209. *Optic.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO 23.

262. *Polyedrum* est lens ex superficiebus planis in convexitatem dispositis composita.

THEOREMA 63.

263. *Si radii* EF, AB, CD *paralleli incidunt in superficiem polyedri; post refractionem etiam sunt paralleli.* Tab. V. Fig. 46.

DEMONSTRATIO.

Quia superficies polyedri componitur ex planis in convexitatem dispositis (§. 262) & radii paralleli incidunt, post refractionem in ingressu factam etiam sunt paralleli (§. 49). Cum adeo in superficiem planam LM paralleli incidant; post alteram itidem refractionem paralleli sint necesse est (§. cit.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

264. Quodsi polyedrum fuerit regulare, LH, HI, IM sunt veluti

tangentes lentem sphæricam convexam in F, B & D, consequenter radii in puncta contactus incidentes axem intersecant (§. 166). Quare cum reliqui sint iisdem paralleli (§. 263); iidem quoque prope G se mutuo intersecare debent.

COROLLARIUM 2.

265. Quodsi ergo oculus ibi constituatur, ubi radii paralleli decussantur, a singulis hedris radii paralleli ab eodem objecto promanantes in eum propagantur. Quare cum humor crystallinus, utpote lenticula convexa (§. 34. *Optic.*), radios parallelos uniat (§. 178); in totidem diversis retinæ punctis *a*, *b*, *c* uniuntur radii, quot sunt vitri LBM hedræ, consequenter oculus per vitrum polyedrum toties videre potest objectum, quot sunt hedræ, si debito loco constituatur (§. 70. *Optic.*).

COROLLARIUM 3.

266. Quoniam radii ab objectis longinquis venientes sunt paralleli (§. 93. *Optic.*), objectum remotum per vitrum polyedrum toties videtur, quot sunt hedræ ipsius (§. 265).

THEOREMA 64.

Tab. V. Fig. 47. 267. *Si a puncto radiante* A *in diversa polyedri regularis plana incidant radii* AB, AC, AD, *post refractionem in* G *decussantur & a singulis planis venientes ad singulas plagas tendunt nonnihil divergentes.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI ipsi KL parallela & AB ad HI perpendicularis *per hypoth.* erit etiam eadem ad KL normalis (§. 230. *Geom.*); adeoque radius A*b* irrefractus transit (§. 25). Cum vero KH, HI, IL considerari possint instar tangentium lentem convexam, radii in puncta contactus incidentes axem A*b* post refractionem secant (§. 213). Incidat jam radius AK in idem planum, in quod incidere supponitur AC ad punctum contactus, sintque PQ & RS ad planum perpendiculares, hoc est, axes refractionis (§. 10). Quoniam $o > x$ (§. 188. *Geom.*); cum sit $o + u = y + x$ (§. 233. *Geom.*), erit $y > u$ (§. 92. *Arithm.*), consequenter $n > m$ (§. 26). Quamobrem cum anguli QCK & SKC simul sumti sint duo recti *per demonstr.* erunt TCK & OKC simul sumti duobus rectis minores (§. 90. *Arithm.*) & ideo radii KO & CT post primam refractionem divergunt (§. 261. *Geom.*): non tamen multum divergunt, quia ob parvitatem anguli A o & x non multum differunt (§. 239. *Geom.*) adeoque & u atque y tanquam complementa ad rectos, consequenter m atque n ab æqualitate parum absunt (§. 26).

Tab. V. Fig. 48.

Radi-

Radius itaque KO etiam post alteram refractionem a radio CT nonnihil divergit (§ 68). Cum adeo radii per puncta contactus transeuntes axem secent *per demonstrata*; reliqui ipsis vicini post refractionem parum divergentes similiter sese in vicinia intersecare debent & ideo post refractionem, qui ab uno plano veniunt, ad eandem quoque plagam tendunt; qui veniunt ab alio, ad aliam progrediuntur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

265. Quodsi oculus ibi constituatur, ubi radii a diversis planis advenientes decussantur; a singulis planis propagantur in eum radii nonnihil divergentes, hoc est, veluti ex diver-
Tab. sis punctis emanantes. Quare cum
V. humor crystallinus, utpote lenticula
Fig. convexa (§.34. *Optic.*), radios a pun-
47. cto emanantes in uno puncto iterum colligat (§. 216); in totidem diversis retinæ punctis *a, b, c* uniuntur radii, quot sunt vitri LBM hedræ, consequenter oculus in foco G constitutus per polyedrum toties videt objectum etiam vicinum, quot sunt hedræ (§. 70. *Optic.*).

SCHOLION 1.

269. *Cum in demonstratione usi simus theorematibus, in quibus objecta ultra focum remota supponuntur; objectum quoque multiplicandum ultra focum distare debet, ejus nempe lentis, quæ est segmentum sphæræ, cui polyedrum inscribi potest.*

SCHOLION 2.

270. *Me non monente statim apparet, imagines quoque objectorum in camera obscura multiplicari, si foramini apponatur lens polyedra & et in debita distantia jungatur convexa.*

SCHOLION 3.

271. *Illud quoque prætereundum non* Tab.
est, quod radii solares in superficiem V.
LM *incidentes, post refractionem per* Fig.
singulas hedras colorati dispergantur, 46.
ita ut in parietem præsertim album illapsi aut charta munda excepti, totidem maculas coloratas exhibeant, quot sunt hedræ polyedri, tanto quidem splendidiores, quo obscurior fuerit locus, ubi experimentum capitur. Sæpissime id expertus sum ope polyedri LNM *tubo* Tab.
LMIH *inclusi, ita ut* HI *esset pla-* VI.
num, in quo radiorum per lentem pro- Fig.
pagatorum decussatio juxta superiora 50.
contingit, tantæ adeo amplitudinis, ut omnes radios per polyedrum refractos caperet. Radios autem solares per aperturam tubi HI *in casu præsenti immisi.*

SCHOLION 4.

272. *Magis jucunda spectacula exhibere poteris in camera obscura, si radios a refractione in prismate trigono facta coloratos* (§. 183. Optic.) *polyedro paulo majore* h. e. *latitudinis 3 aut 4 digitorum excipias. Quodsi lens a prismate trium vel quatuor pedum intervallo removeatur, in pariete aut charta vicina maculæ, de quibus dixi,*

coloratæ multo illustriores apparebunt, gemmarum quemvis splendorem longe superantes. In foco autem polyedri, hoc est, ubi radii decussantur (in hoc enim experimento radii excipiuntur a superficie convexa polyedri) stella quædam splendoris prorsus admirandi conspicitur. Non tamen in radiorum concursu colores ita confunduntur, ut in lumen abeant, sed ubi rursus divergunt, distincti denuo observantur.

SCHOLION 5.

273. *Cæterum quamvis in demonstratione supposuerimus, vitrum polyedrum esse regulare & habere planum*
Tab. V. Fig. 46. *unum* HI *alteri* LM *parallelum; haud difficulter tamen apparet, eas quoque aliis polyedris sphæræ circumscriptibilibus applicari posse, modo radius unus* AG *supponatur axis sphæræ. Quodsi planum unum fuerit ipsi* LM *parallelum, radii per ipsum refracti non erunt colorati.*

SCHOLION 6.

274. *Ut objectum verum digito attingere possis, ita quidem dirigendus, ut ad singulas imagines digiti singuli tendere videantur: ita nimirum verus quoque digitus ad objectum tendet. Hoc qui non observant, frustra objectum attingere conantur. Nonnulli polyedrum movent in gyrum observantes, quodnam visibilium maneat immotum: id enim objectum verum est, apparentibus loca mutantibus, si plana refringentia loca mutent.*

SCHOLION 7.

275. *Quodsi duas lentes polyedras in conspicilla aptes, ut instar aliorum conspicillorum naso imponi possint; gemino oculo aperto objecta multiplicata videntur: quod gratius accidit, quam si oculo uno per polyedrum transpiciente alter claudi debet.*

SCHOLION 8.

276. *Si in planis polyedri in convexitatem dispositis pingantur imagines coloribus aqua dilutis & lens ad foramen cameræ obscuræ aptetur; radii solares per eam transeuntes secum ferent species istarum imaginum easque in parietem oppositum projicient, multo quidem nitidiores, si lente convexa in foco polyedri posita denuo refractio fiat (§. 268). Hoc artificium simile est alteri, quo candelæ pariter ac Solis lumine imago in charta depicta in cameram obscuram projicitur. Scilicet charta, in qua imago depicta, oleo perungitur & ne rugas contrahat, tigillis ligneis agglutinatur: quo facto ante foramen cameræ obscuræ constituitur, candela accensa pone illam collocata, nisi Solis lumine illustretur. Radii nimirum luminis per chartam pellucidam transeuntes speciem imaginis, cum suis coloribus in cameram obscuram secum ferent.*

PROBLEMA 25.

277. *Imaginem deformare, quæ per vitrum polyedrum adspecta formosa appareat.* Tab. V. Fig. 47.

RESOLUTIO.

1. Super tabula horizontali ABCD erigatur alia AEFD ad angulos rectos.

2. Ta-

2. Tabula tam horizontalis, quam verticalis habeat incisuras juxta longitudinem dispositas, ita ut intra incisuras horizontalis AB & DC fulcrum BHC huc illucque moveri, intra incisuras vero verticalis ED & FA charta munda alii compactiori agglutinata demitti & denuo extrahi possit.

3. Ad fulcrum BHC aptetur tubus ductitius IK, lente polyedra plano-convexa, ex 24. planis triangularibus non nimis magnis in parabolæ fere convexitatem dispositis constante in I instructus. In K tubus sit obturatus & exiguo tantum foramine præditus, quod paulo ultra focum a lente remotum.

4. Fulcrum BHC a tabula verticali removeatur, ut ultra foci intervallum ab ea distet, eo quidem magis, quo major imago dissipata per lentem recolligenda.

5. Ante foramen tubi K lampas collocetur (non candela, quia hujus flamma non constanter eadem), & areolæ luminosæ in tabula verticali seu charta eidem applicata plumbagine notentur. Ne tamen facile aberres, in iis designandis, oculari continuo opus est observatione, ut nimirum appareat, utrum per lentem conspectæ unum continuum exhibeant, nec ne.

6. In areolis istis pingantur partes, quæ conjunctæ totius cujusdam imaginem exhibeant, oculari semper adhibita observatione, ut per lentem singulæ bene ordinatæ compareant. Interjecta vero spatia alia pictura repleantur, opera inprimis data, ut libero etiam oculo conspecta pictura imaginem rei cujusdam ab ea, quæ per polyedrum videtur, diversæ exhibeat.

Quodsi per foramen K picturam contuearis, partes per areolas dispersæ unam continuam exhibebunt imaginem, quæ vero in spatiis intermediis depicta sunt, plane non videntur.

SCHOLION.

278. *Si basis tubi* K *amplior fiat & pluribus foraminibus pertundatur, in eadem tabula* EFDA *plures imagines dissipari possunt, ita ut per singula foramina inspicienti singulæ diversæ appareant imagines. Sed majori artificio opus est ad plurium, quam ad unius dissipationem.*

CAPUT

CAPUT V.

DE

REFRACTIONE LUMINIS IN LENTIBUS CONCAVIS ET MENISCIS.

THEOREMA 65.

Tab. VI. Fig. 51. 279. *Si radii paralleli in lentem plano-concavam* KL *incidunt, &* FC *ad* FB *fuerit in ratione refractionis; erit* F *focus virtualis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam radius HI axi FB parallelus *per hypoth.* axis vero FB ad KL perpendicularis (§. 21. *Dioptr.*); erit etiam radius HI ad KL perpendicularis (§. 130. *Geom.*) adeoque irrefractus transit usque ad E (§. 25). Quare cum FC ad FB sit in ratione refractionis *per hypoth.* erit F focus virtualis (§. 98). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

280. Si lens fuerit vitrea, erit FB = 2BC (§. 99), hoc est, focus virtualis F a lente KL diametri intervallo 2BC distat.

COROLLARIUM 2.

281. Si refractio in aqua contingit, erit FB = 3CB (§. 100) hoc est, focus virtualis F a lente KL intervallo sesquidiametri 3BC distat.

THEOREMA 66.

282. *Si radius* AE *axi* FP *parallelus incidat in lentem utrinque concavam & tam* FC *ad* FB *quam* IP *ad* PH *rationem refractionis habeat; atque* FP : PH = FB : BH; *erit* G *punctum dispersus seu focus virtualis.* Tab. VI. Fig. 52.

DEMONSTRATIO.

Quia radius AE per medium rarius in superficiem cavam diaphani densioris incidit & FC ad FB rationem refractionis habet *per hypoth.* radius refractus DE ex puncto F dispergitur (§. 104). Cum itaque in superficie convexa ex diaphano densiori in medium rarius refringatur & IP ad PH in ratione refractionis atque FP : PH = FB : BG, *per hypoth.* erit G punctum, unde post alteram refractionem DN dispergitur (§. 136). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

283. Si ergo ratio refractionis $= n:m$, $CB = a$, $IH = b$; erit $FB = na:(n-m)$ & $PI = nb:(n-m)$ (§. 190. *Arithm.*), consequenter neglecta lentis crassitie $FP = FB + IP = (na + nb):(n-m)$ & $PH = PI - IH = nb:(n-m) - b = (nb - nb + mb):(n-m) = mb:(n-m)$. Quare (§. 282)

$$\frac{n(a+b)}{n-m} : \frac{mb}{n-m} = \frac{na}{n-m} : BG$$

h. e. $a+b : \frac{mb}{n-m} = a : BG$ (§. 183. 184. *Arithm.*) seu $(n-m)(a+b) : mb = a : BG$ (§. 178. *Arithm.*), hoc est, $(n-m)\,CB + IH : m\,IH = CB : BG$.

COROLLARIUM 2.

284. Si refractio in lente vitrea contingit, erit $m = 2$, $n = 3$ (§. 26), adeoque $a + b : 2b = a : BG$, hoc est, summa semidiametrorum CB & HI ad diametrum concavitatis alterutrius 2HI ita semidiameter alterius CB ad distantiam foci virtualis a lente BG.

COROLLARIUM 3.

285. Quodsi $a = b$, hoc est, si semidiametri HI & CB æquales, erit $BG = 2a^2 : 2a = a$, seu distantia foci virtualis a lente BG semidiametro CB vel HI æqualis.

COROLLARIUM 4.

286. Si refractio in lente aquea contingit, erit $m = 3$, $n = 4$ (§. 28), adeoque $a + b : 3b = a : BG$, hoc est, summa semidiametrorum CB & HI ad sesquidiametrum concavitatis alterutrius 3HI ita semidiameter alterius CB ad foci virtualis a lente distantiam BG.

COROLLARIUM 5.

287. Si $a = b$, hoc est, $HI = CB$, erit $BG = 3a^2 : 2a = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}$ CB hoc est, distantia foci virtualis a lente BG est ad semidiametrum BC in ratione sesquialtera.

THEOREMA 67.

288. *Si radii solares in lentem concavam incidunt, lumen post refractionem debilitatur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim radii solares ad sensum sint paralleli (§. 94. *Optic.*), post refractionem in lente concava factam divergunt (§. 279). Lumen igitur debilitatur (§. 87. *Optic.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

289. Effectus igitur lentium concavarum effectui convexarum contrarius est (§. 197).

PROBLEMA 16.

290. *Invenire punctum dispersus* F *radii* CD *ex puncto axis* C *in lentem plano-concavam* AB *incidentis, superficie plana puncti* C *obversa.* Tab. VI. Fig. 18.

RESOLUTIO.

1. Quia radius CD ex puncto C in

superficiem planam diaphani densioris per medium rarius incidit; punctum G, ex quo post primam refractionem dispergitur, invenitur per theor. 8. (§. 62).

2. Quare cum radius simplicem refractionem passus DI veluti ex puncto axis G in superficiem convexam incidat & ex medio densiori in rarius refringatur; punctum F, ex quo radius IK post alteram refractionem dispergitur; seu focus virtualis invenietur per probl. 12. (§. 133) aut per theor. 29 (§. 136).

COROLLARIUM.

291. Quoniam per ea, quæ cap. 2 & 3. tradita sunt, semper determinari potest punctum dispersus vel concursus radii in superficie plana, convexa & concava ex medio rariori in densius & ex densiori in rarius refracti & ante refractionem vel ex puncto quodam axis divergentis, vel ad id convergentis; eodem prorsus modo focum lentium concavarum in omni casu reliquo invenire licet, sive radii ex puncto quodam axis ante primam refractionem emanent, sive ad punctum quoddam axis tendant.

SCHOLION.

292. *Ne igitur præter necessitatem prolixi simus, cum speciales regulæ de refractione radiorum divergentium & convergentium in lentibus concavis non tam frequenter usui sint, quam quæ de lentibus convexis capite superiori habentur; eas eruat, qui opus iisdem habuerit.*

THEOREMA 68.

293. *Objectum* AB *per lentem cavam videtur situ erecto & imminutum in ratione composita* FL. FM & GL. GM, *si nempe* F *sit punctum, ad quod radius* BE *irrefractus tendit*, G *vero oculus.* Tab. VI. Fig. 54.

DEMONSTRATIO.

Quia radius refractus GI, per quem punctum B videtur, post refractionem in I ad punctum G tendit, *per hypoth.* incidens EI ante refractionem in I factam ad punctum lenti vicinius K tendebat (§. 161. 162). Similiter cum radius EI post refractionem in E ad punctum K tendat, *per demonstrata* BE ante refractionem in E factam ad punctum F axi vicinius quam K, consequenter multo vicinius quam G, tendebat (§. 77). Ergo radius BG, qui irrefractus ad G perveniret, lente remota, secabit lentem in puncto N ab axe LM remotiori, quam BE, consequenter angulus LGO, sub quo refracte videtur MB, minor est angulo LGN, sub quo eadem MB directe in G videtur. Nec absimili modo idem in aliis casibus ostenditur, si lens utrin-

utrinque concava, vel plano-concavæ superficies cava objecto obvertatur. Quare objectum per lentem cavam imminutum videtur (§. 209. *Optic.*). *Quod erat primum.*

Et quia punctum M videtur per radium GM utpote irrefractum (§. 25); B vero per radium dexteriorem GI: objecti extremum superius loco superiore, inferius inferiore videtur. Objectum itaque situ erecto apparet. *Quod erat secundum.*

Quoniam LO videtur sub eodem angulo, quo MB refracte; & LN sub eodem, quo MB directe; diameter objecti apparens erit ad diametrum veram ut LO ad LN (§. 209. *Optic.*). Est vero LN perpendicularis ad MG (§. 21): quare cum etiam MB ad MG normalis ponatur, erit MB ipsi LN parallela (§. 256. *Geom.*), & hinc GM : GL = MB : LN & FM : FL = MB : LO (§. 268. *Geom.*), adeoque LN = GL. MB : GM & LO = FL. MB : FM. Ergo

$$LO : LN = \frac{FL.\,MB}{FM} : \frac{GL.\,MB}{GM}$$

h. e. LO : LN = FL. GM : GL. FM (§. 178. 181. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

294. Quodsi objectum MB adeo procul distet, ut GF respectu ipsius FM fiat parvitatis contemnendæ; erit GM ipsi FM ad sensum æqualis, adeoque LO : LN = FL : GL (§. 181. *Arithm.*).

THEOREMA 69.

295. *Si radius* EH *axi* AF *parallelus in menisco* LM *refringatur atque diameter convexitatis* CB *diametro concavitatis* OD *æqualis; refractus* GI *erit axi* AF *itidem parallelus.* Tab. VI. Fig. 55.

DEMONSTRATIO.

Quia radius EH axi parallelus incidit in superficiem convexam diaphani densioris per medium rarius, post refractionem in H factam ad aliquod axis punctum veluti F tendet (§. 87). Sed quia OD = BC *per hypoth.* & crassities lentis BD supponitur parvitatis contemnendæ; ad idem punctum F radius EH tenderet, si in puncto I ex medio rariori in densius refringeretur (§. 90). Quare cum radius HF contraria ratione refractus cum incidente coincidat (§. 37); erit GI axi AF parallelus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

296. Cum adeo menisci, quarum diameter concavitatis diametro con-

 vexi-

vexitatis æqualis est, radios nec colligant, nec dispergant; earum in dioptrica nullus est usus.

COROLLARIUM 2.

297. Quoniam radii paralleli in vitro utrinque plano refracti post refractionem itidem sunt paralleli (§. 49); menisci, quorum diameter convexitatis æqualis est diametro concavitatis, vitris utrinque planis æquipollent.

PROBLEMA 27.

Tab. VI. Fig. 56. 298. *Invenire focum* Q, *ubi radius* OK *axi menisci semidiametrum concavitatis* HE *semidiametro convexitatis* CB *majorem habentis parallelus & vicinus cum axe concurrit.*

RESOLUTIO.

1. Sit ratio refractionis $= m:n$, HE $= b$, CB $= a$. Quoniam radius KO post primam refractionem in O ad punctum I tendit, ita ut $n:m =$ IB : IC (§. 88), erit quoque $n-m:n =$ CB : IB (§. 193. *Arithm.*), adeoque IB $= na:(n-m)$.

2. Quodsi KO in superficiem convexam PE incideret, distantia foci a lente NE foret $nb:(n-m)$, vi demonstratorum, atque hinc focus N longiori intervallo a superficie PE distat, quam I, adeoque ob NI : IH = IB : IQ (§. 161. *Dioptr.* & §. 173. *Arithm.*), erit (§. 190. *Arithm.*) neglecta lentis crassitie NI : NH = IB : EQ. Habemus itaque

$$\frac{nb-na}{n-m} : \frac{nb}{n-m} - b = \frac{na}{n-m} : \text{EQ}$$

h.e. $$b-a : \frac{mb}{n-m} = a : \text{EQ}$$

(§. 183. 184. 235. *Arithm.*). Est itaque EQ $= mab:(n-m)(b-a)$.

COROLLARIUM 1.

299. Si meniscus ex vitro constet, erit $m:n = 2:3$ (§. 26), adeoque EQ$=2ab:(b-a)$, consequenter $b-a:a = 2b:$EQ, hoc est, ut differentia semidiametrorum convexitatis CB & concavitatis HE ad semidiametrum convexitatis CB, ita diameter concavitatis 2HE ad foci a menisco distantiam EQ.

COROLLARIUM 2.

300. Aquea si fuerit meniscus, erit $m:n = 3:4$ (§. 28), adeoque EQ$=3ab:(b-a)$, consequenter $b-a:a = 3b:$EQ, hoc est, neglecta lentis crassitie, HC : CB = 3HE : EQ, seu ut differentia semidiametrorum convexitatis & concavitatis ad semidiametrum convexitatis ita sesquidiameter concavitatis ad distantiam foci a menisco.

COROLLARIUM 3.

301. Si semidiameter concavitatis HE tripla fuerit semidiametri convexitatis CB, hoc est, $b=3a$; erit distan-

ſtantia foci a meniſco vitrea EQ $= 6aa:2a = 3a =$ HE, hoc eſt ſemidiametro æqualis (§. 299), adeoque meniſcus æquipollet lenti utrinque æqualiter convexæ (§. 193).

COROLLARIUM 4.

302. Eodem modo, ſi meniſcus aquea fuerit, in eadem hypotheſi reperitur QE $= 9aa:2a = \frac{9}{2}a = \frac{6}{2}a + \frac{3}{2}a = $ HE $+ \frac{1}{2}$ HE (§. 300), hoc eſt, diſtantia foci a meniſco EQ eſt ad ſemidiametrum concavitatis HE in ratione ſeſquialtera, adeoque meniſcus lenti utrinque æqualiter convexæ æquipollet (§. 195).

SCHOLION.

303. *Haud obſcurum eſt artificium, quomodo inveniatur, quando meniſcus lenti utrinque æqualiter convexæ æquipollet. Tum enim in præſenti caſu* QE $= \frac{3}{2}$ HE (§. 195), *hoc eſt*, 3ab:(b−a) $= \frac{3}{2}$b. *Hæc æquatio reducta dat* b $= 3a$. *Eodem modo in lente vitrea* QE $=$ HE (§. 193), *hoc eſt*, 2ab:(b−a) $=$ b. *Unde reperitur* b $=$ 3a, *ut ante. Et hoc artificio utendum quoque eſt, ubi reperire volueris, quando meniſcus lenti plano-convexæ, quando ſphæræ, quando lenti quomodocunque cavæ æquipolleat.*

COROLLARIUM 5.

304. Si ſemidiameter concavitatis HE dupla fuerit ſemidiametri convexitatis CB, hoc eſt, $b = 2a$; erit diſtantia foci a meniſco vitrea EQ $= 4aa:a = 4a = 2$HE, hoc eſt diametro, æqualis (§. 299), adeoque meniſcus æquipollet lenti plano-convexæ (§. 168).

COROLLARIUM 6.

305. Eodem modo, ſi meniſcus aquea fuerit, in eadem hypotheſi EQ $= 6aa:a = 6a = 3$HE (§. 300), adeoque meniſcus denuo æquipollet lenti plano-convexæ (§. 169).

COROLLARIUM 7.

306. Si ſemidiameter concavitatis HE quintupla fuerit ſemidiametri convexitatis CB, hoc eſt, ſi $b = 5a$; erit diſtantia foci a meniſco vitrea $= 2.5aa:4a = \frac{5}{4}a = \frac{1}{4}$ HE (§. 298) adeoque meniſcus ſphæræ vitreæ æquipollet (§. 182).

COROLLARIUM 8.

307. Eodem modo ſi meniſcus aquea fuerit & ſemidiameter concavitatis HE quadrupla ſemidiametri convexitatis CB, hoc eſt, ſi $b = 4a$, erit diſtantia foci $= 3.4aa:3a = 4a =$ HE, adeoque meniſcus ſphæræ aqueæ æquipollet (§. 183).

COROLLARIUM 9.

308. Quodſi diſtantia foci fuerit ad ſemidiametrum concavitatis in ratione data $m:1$; erit in meniſco vitrea $2ab:(b-a) = mb$ (§. 298), adeoque $b = \frac{(2+m)a}{m}$, ſeu $b:a = m+2:m$. E. gr. Si focus diſtare debet a meniſco triplo ſemidiametri concavitatis intervallo; erit $m = 3$, conſequenter ſemidiameter concavitatis in ratione 5 ad 3 exiſtit.

COROLLARIUM 10.

309. Similiter ſi diſtantia foci a meniſco vitrea fuerit ad ſemidiametrum con-

convexitatis in ratione data $m:1$; erit $2ab:(b-a) = ma$ (§. 298), adeoque $b = ma:(m-2)$, seu $b:a = m:m-2$. E. gr. si focus distare debet triplo semidiametri convexitatis intervallo, erit semidiameter concavitatis illius tripla.

COROLLARIUM II.

310. Data igitur semidiametro convexitatis inveniri potest semidiameter concavitatis, quæ focum a menisco removeat dato intervallo.

SCHOLION.

311. *Eadem omnia inveniuntur, si ponamus menisci superficiem cavam lumini obverti.*

PROBLEMA 28.

Tab. VI. Fig. 17. 312. *Invenire punctum dispersus radiorum axi parallelorum in meniscum incidentium, quæ habet semidiametrum concavitatis* KI *minorem semidiametro convexitatis* BC.

RESOLUTIO.

1. Quoniam radius DE axi AB vicinus & parallelus in superficiem convexam diaphani densioris per medium rarius incidit, posita ratione refractionis $= n:m$, axi AF in F post refractionem occurret, ita ut sit $n:m = FB:FC$ (§. 88), consequenter $n-m:n = BC:FB$ (§. 183. *Arithm.*). Quare si fiat $BC = a$; erit $FB = na:(n-m)$.

2. Quia semidiameter concavitatis IK minor semidiametro convexitatis CB *per hypoth.* si radius DE in convexitatem superficiei LIM incideret ac inde in medium densius refringeretur, focus O ab ea minori intervallo distaret quam F, foretque (si $KI = b$) $OI = nb:(n-m)$ *per modo demonstrata.* Quare radius EH tendens ad punctum F ex diaphano densiori in rarius refractus dispergetur ex A, ita ut sit $FO:FI = FK:FA$ (§. 160) seu $FO:FK = FI:FA$ (§. 173. *Arithm.*), consequenter (§. 190. *Arithm.*).

$$FO:OK = FI:BA$$

hoc est, $$\frac{na-nb}{n-m} : \frac{nb-b}{n-m} = \frac{na}{n-m} : BA$$

$$a-b : \frac{mb}{n-m} = a : BA \text{ (§. 178.}$$

181. *Arithm.*), quia nempe neglecta lentis crassitie $FI = FB$ & $FO = FI - OI$ atque $OK = OI - IK$.

Habemus igitur $BA = mab:(n-m)(a-b)$.

COROLLARIUM I.

313. Quodsi meniscus fuerit vitrea, erit $BA = 2ab:(a-b)$, hoc est, ut differentia semidiametrorum convexitatis & concavitatis ad semidiametrum

metrum convexitatis ita diameter concavitatis ad distantiam foci virtualis (§. 26).

COROLLARIUM 2.

314. Quodsi meniscus aquea fuerit, erit $BA = 3ab : (a - b)$ hoc est, ut differentia semidiametrorum concavitatis & convexitatis ad semidiametrum convexitatis, ita sesquidiameter concavitatis ad distantiam foci virtualis (§. 28).

COROLLARIUM 3.

315. Si meniscus fuerit vitrea & semidiameter concavitatis IK semidiametri convexitatis CB subtripla, erit $a = 3b$, consequenter $AB = 6bb : 2b = 3b = 3IK = CB$, hoc est, distantia foci virtualis a menisco est semidiametro convexitatis æqualis (§. 313). Æquipollet adeo meniscus lenti utrinque concavæ (§. 285).

COROLLARIUM 4.

316. Si meniscus aquea fuerit, erit in eadem hypothesi $9bb : 2b = \frac{9}{2} b = \frac{3}{2} a = \frac{3}{2}$ CB (§. 313), adeoque meniscus denuo æquipollet lenti aqueæ utrinque concavæ (§. 286).

COROLLARIUM 5.

317. Si meniscus vitrea fuerit & semidiameter concavitatis semidiametro convexitatis subdupla, hoc est, $a = 2b$, erit $AB = 4bb : b = 4b = 2a =$ CB (§. 313), hoc est, distantia foci virtualis a menisco est diametro convexitatis æqualis. Æquipollet adeo meniscus lenti vitreæ plano-concavæ (§. 280).

COROLLARIUM 6.

318. Si meniscus aquea fuerit, erit in eadem hypothesi $6bb : b = 6b = 3a = 3$CB (§. 313), adeoque meniscus æquipollet lenti aqueæ plano-concavæ (§. 281).

COROLLARIUM 7.

319. Si distantia foci virtualis a menisco vitrea fuerit ad semidiametrum concavitatis in ratione data $m : 1$; erit $2ab : (a - b) = ma$ (§. 313). Unde elicitur $b = \frac{ma}{m+2}$. E. gr. si focus virtualis distare debet triplo semidiametri convexitatis intervallo; erit $b = \frac{3}{5} a$.

COROLLARIUM 8.

320. Data igitur semidiametro convexitatis inveniri potest semidiameter concavitatis, quæ focum virtualem a menisco removeat dato intervallo.

SCHOLION 1.

321. *Eadem omnia inveniuntur, si ponamus menisci superficiem cavam lumini obverti.*

SCHOLION 2.

322. *Solent autem menisci, quæ diametrum convexitatis minorem habent diametro concavitatis, a nonnullis dici,* menisci propriæ: *quæ vero diametrum convexitatis majorem habent diametro concavitatis*, menisci impropriæ *appellantur.*

SCHOLION 3.

323. *Cæterum qua methodo focum* rad-

radiorum parallelorum in meniscis investigavimus; eadem quoque investigantur foci radiorum divergentium & convergentium, ut adeo iis expressius docendis merito supersedeamus.

SCHOLION 4.

324. *Quia menisci propriæ lentibus convexis æquipollent* (§. 301. & seqq.), *in numero vitrorum causticorum locum habent & in cameris quoque obscuris adhiberi possunt.*

SCHOLION 5.

325. *Cartesius lentes hyperbolicas plano-convexas & convexo-convexas, itemque meniscos ellipticas & hyperbolicas commendat* (a), *quia radios axi parallelos vel ab aliquo ejus puncto emanantes in eodem præcise puncto uniant. Enimvero cum non modo difficillimum sit lentes istiusmodi satis exactas parare, verum etiam radios a puncto extra axem lentis sito emanantes minus accurate colligant quam lentes sphaericæ; vitra objectiva sphaerica iis præferuntur, non refragante viro summo* Newtono (b) *& experientia id comprobante* Millieto Dechales (c). *Supervacaneum igitur ducimus de hoc lentium genere in his elementis agere. Alias enim haud difficile foret theoriam refractionis in superficiebus sphaericis ope Algebræ extendere ad quamlibet curvam & inde lentium istarum proprietates demonstrare. Dedit jam istiusmodi theoriam generalem* Guisnée (d) *& aliam ab ea diversam* Johannes Craige (e).

CAPUT VI.

DE

TUBIS SEU TELESCOPIIS.

DEFINITIO 4.

326. *Telescopium* seu *tubus* est instrumentum dioptricum ex lentibus compositum, per quod remota tanquam vicina spectantur.

SCHOLION.

327. *Telescopiorum inventum longe utilissimum portenta universi nobis revelavit & eam Astronomiæ perfectionem conciliavit, quam antea sperare nefas erat. Casui autem debetur, non meditationi, ut adeo in inventore felicitatem*

(a) in Dioptr. c. 8. p. m. 111.
(b) in Princip. Phil. nat. Mathem. lib. 1. prop. 98. schol. p. 229. edit. tert. Londin.
(c) Diopter. lib. 2. prop. 69. f. 686. Tom. 3. Mund. Math.
(d) in Comment. Acad. Reg. Scient. Parif. A. 1704. p. 31. edit. Amstelod.
(e) in Optica Analytica lib. 2.

tatem magis prædicent, quam ingenium admirentur, qui ultra vulgi captum sapiunt. Hinc parum interest nosse, cuinam primum contigerit esse tam felici, ut in inventum nunquam pro dignitate deprædicandum primus incideret. Primus dubio procul tubum opticum construxit Joannes Baptista Porta. *Neapolitanus, ita enim* (a): si utrumque, inquit, (*vitrum nempe concavum & convexum*) recte conjungere noveris, & longinqua, & proxima majora & clara videbis. Non parum multis amicis auxilii præstitimus, qui & longinqua obsoleta, proxima turbida conspiciebant, ut omnia perfectissime contuerentur. *Enimvero* Porta *inventum suum, quod casui acceptum ferebat, non satis intellexit, adeoque nec magis id industria perfecit, nec ad observationes cælestes transtulit. Quindecim ab hinc annis, postquam liber* Portæ *prodierat, in quo illa scripserat*, Hugenio *autore* (b) *circa annum* 1609. *artifex quidam Medioburgensis apud Selandos tubum construxit &* Mauritio *Principi Nassoviæ obtulit, quem* Joannem Lippersein *fuisse*, Sirturus (c) *contendit*, Petro Borello (d) *hanc gloriam vindicante* Zachariæ Hansen, *artifici itidem Middelburgensi. Post eos quoque telescopia confecit* Jacobus Metius, *Alcmariensis, cui* Adrianus Metius *Matheseos Professor Franeckeranus frater* Jacobi *laudem inventionis tribuit. Sed cum tubos sesquipedalibus non majores conficerent artifices isti, mox in Germania* Simon Marius, *in Italia &* Galilæus *majores paravere ac meliores ad contemplanda phænomena cælestia iisdem usi sunt: quorum observationes inexspectata invento tam egregio magis perficiendo ansam dedere.*

DEFINITIO 5.

318. *Vitrum objectivum* est lens, quæ objecto obvertitur.

DEFINITIO 6.

319. *Vitrum oculare* est lens, quæ oculo vicinior.

SCHOLION.

330. *Quodsi telescopium ex pluribus quam duabus lentibus componatur, nonnisi una dicitur objectiva, reliquæ omnes dicuntur oculares.*

DEFINITIO 7.

331. *Tubus Hollandicus* seu *Galilæanus* est telescopium ex lente objectiva convexa & oculari concava compositum.

SCHOLION.

332. *Nomen inde est, quod in Batavia primum constructus* (§. 327): *Galilæus autem primus fuit, qui observationes telescopicas publici juris fecit ac plurima in cælo antea nobis ignota revelavit* (e).

(a) Magiæ Natur. lib. 17. c. 10.
(b) in Dioptrica p. 163, 164.
(c) in Telescopio A. 1618. edito part. 2. c. 1.
(d) in Tractatu de vero telescopiorum inventore A. 1655. edito c. 12.
(e) in Nuncio sidereo.

DEFINITIO 8.

333. *Tubus astronomicus* est telescopium ex lente objectiva convexa & oculari itidem convexa compositum.

SCHOLION.

334. *Nomen astronomici inde est, quia hoc tuborum genus ad contemplationem rerum cælestium, seu observationes astronomicas adhibetur, propterea quod majorem visionis campum admittat, quam telescopium Galilæanum, etsi objecta inverse repræsentet.*

DEFINITIO 5.

335. *Tubus terrestris* est telescopium ex pluribus, quam duabus, lentibus, communiter ex objectiva convexa & tribus ocularibus itidem convexis, compositum, seu telescopium objecta situ erecto spectanda exhibens, ab Hollandico tamen diversum.

SCHOLION.

336. *Nomen inde est, quod ad spectanda corpora terrestria remota adhibetur, quia objecta situ erecto repræsentat.*

PROBLEMA 29.

337. *Tubum ductitium in usum telescopii construere.*

RESOLUTIO.

In constructione horum tuborum sollicite cavendum est, ne pondere fiant molesti & ne facile distorqueantur situm lentium eversuri. Unde non quilibet tubi in quolibet casu commendantur.

I. Si tubi fuerint minores, ex laminis ferreis stanno obductis parantur, fistulis pluribus pro longitudine telescopii sibi invicem immissis, ita ut nec nimis facile, nec difficulter nimis diduci possint.

II Quodsi tubi fuerint longiores, minime consultum est, ut ex laminis ferreis parentur, quia ponderosiores evadunt, nec commode de loco in locum transportari, nec ad visibile dirigi possunt. Unde aliqui eos ex charta conficere solent hunc in modum:

1. Ex ligno tornetur cylindrus ligneus ejus longitudinis, quanta est charta, ex qua tubus fieri debet. Diameter vero tanta sit, quanta esse debet cavitatis fistulæ minimæ.

2. Cylindro circumducatur charta nigra & huic agglutinetur alia, donec fistula censeatur satis firma: quæ tandem charta Turcico more colorata obducatur. Ut citius atque commodius istiusmodi fistulas parare possis; duo aut tria folia in usum futurum super

tabula

tabula conglutinentur & sub prelo compressa siccentur.

3. Fistula una exsiccata, eodem artificio parentur aliæ, & una super aliam compingatur, donec diductæ exhibeant tubum longitudinis desideratæ.

4. Denique annuli lignei tornatoris arte parati fistularum extremis exterioribus agglutinentur, ut tubus extrahi possit.

III. Cum tubi chartacei id incommodi habeant, ut, si ductus fuerint angusti, tempestate humida adeo coarctentur, ut vix ac ne vix quidem extrahi possint; si vero ductus fiant satis laxi, tempestate sicca nimis amplientur, consequenter in utroque casu situs lentium facile depravetur; præterea iidem facile distorqueantur damnumque patiantur; optimam tuborum construendorum rationem hanc ego judico.

1. Cylindro ligneo membrana tenuis (Pergamenam vulgo vocant) circumducatur & conglutinetur, ne pulviculis detritis lentes maculentur. Sitque membrana ista nigredine infecta, ne radii reflexi confusionem aliquam pariant.

2. Ex ligno fagino parentur asserculi admodum tenues & in cylindrum curvati membranæ cum cura agglutinentur.

3. Fistula hæc lignea vestiatur membrana pergamena alba & circa extremum exterius fiat annulus exiguus AB ex duplici membrana pergamena conglutinatus, ut tubus commode diduci possit. Tab. IV. Fig. 58.

4. Eodem artificio fiat fistula alia super priore & ita porro, donec diductæ exhibeant tubum longitudinis desideratæ.

5. Singularum fistularum extremis interioribus aptetur annulus ligneus, ut radii spurii ad latera tubi allisi arceantur: id quod majoris momenti deprehenditur in telescopiorum usu, quam experientia nondum convictis videri poterat. Juvat autem annulos istos cochleis fœminis instrui iis in locis, ubi lentes aptandæ.

6. Denique ex ligno rariori tornatoris manu paretur operculum CD, quo Vitrum objectivum contra pulverem tegi possit, ipsumque vitrum an-

nulo ligneo inclusum mediante cochlea ad tubum firmetur.

7. Ejusdem tornatoris industria ex eodem ligno fiat tubulus EFG tantæ longitudinis, quanta esse debet oculi a lente oculari distantia, & alteri tubi extremo decenter aptetur.

IV. *Hevelius* (*f*) commendat tubos ex ligno sicco tornatos, nec e multis partibus ductibusque compactos, ut parallela lentium linea non turbetur.

SCHOLION 1.

338. *Si ductus tubi juxta tertium artificium parati commode extrahi nequeant, sapone veneto affricari debent.*

SCHOLION 2.

339. *Gluten, quoad tubos ex charta conficiendos opus est, ita præparatur. Aquæ calidæ, sed nondum ferventi, immittatur farina triticea & cochleari agitetur, donec ab eodem extracto instar fili defluat. Hinc igni admotum coquatur & continuo cochleari agitetur, donec satis spissum evaserit.*

PROBLEMA 30.

340. *Telescopium Batavum construere.*

RESOLUTIO.

1. Tubo constructo (§. 337) inseratur lens objectiva convexa, sive plano-convexa, sive utrinque convexa, modo sit majoris sphæræ segmentum.

2. Eidem inseratur lens ocularis utrinque concava, quæ sit minoris sphæræ segmentum, ita ut ante imaginem lentis objectivæ in distantia foci virtualis collocetur.

Dico, oculo valentes & presbytas per telescopium visuros objectum distincte, situ erecto & auctum in ratione distantiæ foci virtualis lentis ocularis ad distantiam foci lentis objectivæ: ut vero myopes videant objectum distincte, lentem ocularem objectivæ propius admovendam esse.

DEMONSTRATIO.

Quoniam per telescopium objecta valde remota spectantur (§. 327), radii ab eodem puncto in lentem objectivam incidentes sunt paralleli (§. 94. *Optic.*), consequenter cum lens objectiva sit vel plano-convexa, vel utrinque convexa *per construct.* post lentem concurrunt (§. 166. 172. 184). Jam cum focus virtualis radiorum parallelorum in lente oculari utrinque concava *per construct.* semidia-

(f) Selenogr. Proleg. f. 16.

diametri intervallo distet (§. 285), radii in eam incidentes *vi construct.* ad centrum concavitatis inferioris A tendunt. Quodsi ergo fiat AN = AB = BC; habebit NC ad NB rationem refractionis 3 : 2 (§. 26), consequenter radius GD ad punctum A tendens post refractionem axi occurrit in F, ita ut NA : AB = CA : AF (§. 164), hoc est, ob NA = AB *per demonstrata*, adeoque CA = AF = 2BA in foco virtuali radiorum parallelorum in cavitatem inferiorem incidentium (§. 280). Refractus ergo in egressu ML erit axi CF parallelus (§. 37). Quamobrem cum oculi valentes atque presbytæ distincte videant objecta per radios parallelos (§. 94. 379. 381. *Optic.*); per telescopium ita dispositum distincte vident objecta valde remota. *Quod erat unum.*

Tab. VI. Fig. 59.

Tab. VII. Fig. 60. Ponamus in A esse focum lentis objectivæ. Quoniam illorum radiorum, qui ab extremo dextro objecti per tubum visi ad lentem pertingunt, unus per A transire debet; sit radius iste AC. Erit ergo refractus CE axi BI parallelus (§. 203), consequenter post refractionem in cava factam, ex foco virtuali F, hoc est, centro concavitatis superioris dispergetur (§. 285). Quare cum omnes radii ab eodem extremo ad oculum post lentem cavam constitutum pertingentes sint ipsi EL qui vero a puncto medio adveniunt, axi FG paralleli, per ea, quæ primo loco demonstrata sunt, punctum medium videbitur in directum axi GA, dextrum vero extremum versus dextram, in directum lineæ LN vel ipsi parallelæ, hoc est, situ erecto. *Quod erat secundum.*

Quoniam vero rectæ ipsi LN parallelæ axem sub eodem angulo secant (§. 233. *Geom.*), semidiameter objecti per telescopium sub angulo AFN, seu EFI (§. 156. *Geom.*), videtur: radii nimirum LE & GI oculum perinde ingrediuntur, ac si pupilla in F constitueretur. Quodsi oculus nudus esset in A, semidiametrum objecti videret sub angulo cAb, seu CAB (§. 156. *Geom.*). Quoniam vero objectum valde remotum supponitur, distantia AF ejus respectu evanescit, adeoque oculus nudus etiam in F sub angulo ipsi A æquali, hoc est, ducta FM ipsi AC parallela, sub angulo IFM (§. 233. *Geom.*), objecti semidiametrum videt. Est itaque semidiameter objecti nudo oculo visa ad eam, quæ armato vide-

videtur, ut IM ad IE. Ducatur KE ipsi FM parallela: erit IM : IE = IF : IK (§. 268. *Geom.*). Quare cum EK etiam ipsi AC parallela existat (§. 232. *Geom.*); & CE sit ipsi AK parallela *per demonstr. n. 1.* erit AK = CE (§. 257. *Geom.*). Sed quia situs lentium supponitur parallelus, EC = BI (*§. cit.*). Ergo IB = AK (§. 87. *Arithm.*), consequenter IK = AB (§. 88. *Arithm.*). Quamobrem IM : IE = IF : AB, *per demonstr.* hoc est, semidiameter nudo oculo visa est ad semidiametrum per telescopium visam in ratione distantiæ foci virtualis lentis ocularis FI ad distantiam foci lentis objectivæ AB. *Quod erat tertium.*

Quoniam myopes habent retinam ab humore crystallino nimis remotam (§. 401. *Optic.*), radii vero divergentes ad majorem distantiam colliguntur, quam paralleli (§. 223), qui denique paralleli erant, divergentes evadunt, si lens ocularis objectivæ propius admoveatur (§. 164); ut myopes per telescopium objecta distincte videant, lens ocularis objectivæ propius admoveri debet. *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM 1.

341. Ut objectum integrum videatur, semidiameter pupillæ non minor esse debet distantia radiorum LE & GI, alias enim ab extremo dextro objecti radios non excipiet, adeoque nec illud videbit (§. 42. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

342. Quo magis itaque pupilla fuerit ampliata, eo major area per telescopium uno obtutu comprehenditur & contra.

SCHOLION 1.

343. *Hinc si oculum claudas, antequam eundem telescopio admoveas, ut pupilla in tenebris multum dilatetur, intuitu primo latiorem campum comprehendes, quam ubi ob lucis fulgorem rursus coarctatur.*

COROLLARIUM 3.

344. Quia radiorum EL & IG major distantia in loco a lente remotiore; major quoque erit area uno obtutu comprehensa, si oculus fuerit propior lenti concavæ.

COROLLARIUM 4.

345. Quia focus lentis objectivæ plano-convexæ & focus virtualis lentis ocularis plano-concavæ est in distantia diametri (§. 168. 280), focus vero lentis objectivæ utrinque convexæ & focus virtualis lentis ocularis utrinque concavæ in distantia semidiametri (§. 193. 285); si lens objectiva fuerit plano-convexa & ocularis plano-concava, telescopium auget diametrum objecti in ratione diametri concavitatis ad diametrum convexitatis: si lens objectiva utrinque

que convexa & ocularis utrinque concava, amplificatio contingit in ratione semidiametri concavitatis ad semidiametrum convexitatis: si lens objectiva plano-convexa & ocularis utrinque concava, semidiameter objecti crescit in ratione diametri convexitatis ad semidiametrum concavitatis: si denique lens objectiva utrinque convexa, ocularis plano-concava, augmentum fit in ratione diametri concavitatis ad semidiametrum convexitatis (§. 340).

COROLLARIUM 5.

346. Quoniam semidiametrorum eadem est ratio, quæ diametrorum (§. 181. *Arithm.*), telescopia eodem modo diametrum objecti amplificant, sive fuerit lens objectiva plano-convexa & ocularis plano-concava; sive illa utrinque convexa, hæc utrinque concava (§. 345).

COROLLARIUM 6.

347. Quia semidiameter concavitatis ad diametrum convexitatis minorem rationem habet, quam ejus diameter (§. 203. *Arithm.*); telescopium magis amplificat, si lens ocularis utrinque concava quam si plano-concava (§. 345. *Dioptr.* & §. 205. *Arithm.*).

COROLLARIUM 7.

348. Quia semidiameter pariter atque diameter concavitatis ad diametrum convexitatis minorem rationem habet, quam ad ejus semidiametrum (§. 203. *Arithm.*); telescopium magis amplificat, si lens objectiva plano-convexa, quam si utrinque convexa (§. 345. *Dioptr.* & §. 205. *Arithm.*).

COROLLARIUM 8.

349. Quo major fuerit diameter lentis objectivæ & quo minor semidiameter lentis ocularis; eo minorem rationem habet diameter objecti nudo oculo visa ad semidiametrum armato visam (§. 345), consequenter eo major videtur diameter objecti per telescopium (§. 205. *Arithm.*).

COROLLARIUM. 9.

350. Quia objecti semidiameter amplificatur pro ratione anguli EFI (§. 340.), quo major vero angulus EFI, eo minorem objecti partem oculus uno obtutu comprehendit (§. 341); telescopium eo minorem objecti partem oculo spectandam exhibet, quo magis ejus diametrum amplificat. Tab. VII. Fig. 60.

SCHOLION 2.

351. *Atque hæc est ratio, cur de alio telescopio inveniendo cogitaverint Mathematici, postquam imperfectionem ejus, quod casu inventum fuerat, distincte cognoverant: nec successu caruit eventus, quemadmodum ex subsequentibus plenius constabit.*

SCHOLION 3.

352. *Quodsi rationem nimis parvam habuerit semidiameter vitri ocularis ad semidiametrum objectivi; objectum per telescopium non satis clarum apparet, quia nimia fit radiorum distractio, ut penicilli quotlibet objecti puncta in retina*

tina depingentes ex nimis paucis radiis constent. Defectu vero claritatis confunditur visio. Illud quoque compertum est, lentes objectivas æquales non eandem ferre lentem ocularem, si vel diaphaneitatis fuerint diversæ, vel non eadem industria elaboratæ. Certe lens objectiva minus diaphana, vel etiam minus accurate elaborata, lentem ocularem requirit sphæricitatis majoris quam magis diaphana, vel etiam accuratius elaborata. Neque difficulter ratio reddi potest. Etenim si lens objectiva fuerit minus diaphana, pauciores radii transmittuntur. Quamobrem cum constet, lentes oculares acutiores obscurius exhibere objectum, quia pauciores radios ab eodem objecti puncto ad oculum refringunt, & easdem magis dispergere radios, quam minus acutas, consequenter radios a diversis objecti punctis venientes & per lentem objectivam non satis a se invicem separatos facile confundere; lentes oculares nimis acutæ nocent visioni distinctæ. Et quoniam si lens ocularis fuerit acutior, manente eadem objectiva, objectum magis amplificatur, quam ubi minus acuta fuerit (§. 349), si vero magis amplificatur nævi ex irregulari refractione orti magis fiunt conspicui; patet lentem ocularem minus acutam esse debere, si lens objectiva non fuerit adeo perfecte elaborata.

SCHOLION 4.

353. *Quamvis adeo per experientiam constet [quemadmodum observat* Dechales] (g), *telescopium bonum haberi, si distantia foci lentis objectivæ fuerit sex digitorum, diameter lentis ocularis plano-concavæ digiti unius & lineæ unius, vel utrinque æqualiter concavæ digiti unius cum dimidio; non tamen suadendum est artifici, ut huic vel alteri cuicunque combinationi, quæ experientiæ fide laudatur, nimis fidat. Præstat igitur cum eadem lente objectiva conjungere oculares & majores, & minores data, & ex iis eam eligere, per quam objectum maxime clarum atque distinctum videtur. Ita demum obtinentur tubi præstantes; ut adeo errent præstantiam ex sola longitudine æstimantes.*

SCHOLION 5.

354. Hevelius (h) *commendat lentem objectivam utrinque convexam, cujus diameter 4 pedum Gedanensium, lentem ocularem utrinque concavam, cujus diameter 4½ digitorum. Ait autem pedem Gedanensem esse ad Parisiensem Regium ut 914 ad 1055, ad Rhenanum ut 914 ad 1000. Juxta eundem vitro objectivo utrinque æqualiter convexo, cujus diameter 5 circiter pedum, convenit oculare, cujus diameter 5½ digitorum. Idem oculare satisfacere observat objectivo utrinque convexo, cujus diameter 8 pedum, immo majori, cujus nempe diameter 10 pedum. Egregium prorsus telescopium haberi & quod siderum observationibus perquam idoneum sit, monet, si eidem ocu-*

(g) Dioptr. lib. 2. prop. 54. f. 711. Tom. 3. Mund. Math.
(h) in Proleg. Selenograph. f. 12 & 13.

oculari jungatur vitrum objectivum 12 pedum vel utrinque convexum, vel plano-convexum. Enimvero cum nimis angusta sit area, quam istiusmodi telescopia uno obtutu spectandam exhibent, si ultra tres aut quatuor pedes extendantur; nunc quidem nullus eorum amplius est in observationibus astronomicis usus: nec ad objecta terrestria spectanda adhibentur, nisi quæ 4 aut 5 digitorum longitudinem non excedunt. Et ad tam exigua telescopia Hugenius (i) *commendat rationem semidiametri lentis objectivæ ad semidiametrum ocularis quadruplam, immo dupla non majorem.*

COROLLARIUM 10.

355. Quoniam distantia lentis objectivæ & ocularis est differentia inter distantiam foci virtualis ocularis & distantiam foci objectivæ (§.340); longitudo telescopii habetur, si illam ab hac subtrahas: nempe longitudo telescopii est differentia inter diametros lentium objectivæ & ocularis, si illa plano-convexa, hæc plano-concava (§.168. 280); differentia inter semidiametros lentis objectivæ & ocularis, si illa utrinque convexa, hæc utrinque concava (§.193.285); differentia inter semidiametrum objectivæ & diametrum ocularis, si illa utrinque convexa, hæc plano-concava (§.193.280); differentia denique inter diametrum objectivæ & semidiametrum ocularis, si illa plano-convexa, hæc utrinque concava (§. 168.285).

SCHOLION 6.

356. *E. gr. Si lentis objectivæ utrinque convexæ diameter 4 pedum, ocularis utrinque concavæ diameter $4\frac{1}{2}$ digitorum; longitudo telescopii erit 1 pedis & $7\frac{1}{2}$ digitorum seu 1′ 8″.*

COROLLARIUM 11.

357. Quoniam denique per hoc telescopium objectum videtur magnum, clarum atque distinctum (§. 340); vicinum quoque apparere debet (§. 21. 314. *Optic.*).

PROBLEMA 51.

358. *Telescopium astronomicum construere.*

RESOLUTIO.

1. Tubo constructo (§. 337) inseratur lens objectiva convexa, sive plano-convexa, sive utrinque convexa; modo sit majoris sphæræ segmentum.
2. Eidem inseratur lens ocularis utrinque convexa, quæ sit minoris sphæræ segmentum, in distantia communi focorum.

Dico oculum prope focum lentis ocularis constitutum visurum objectum distincte, situ everso & auctum in ratione distantiæ foci lentis

(i) Dioptr. prop. 49. p. 178.

tis ocularis ad distantiam foci lentis objectivæ.

DEMONSTRATIO.

Quoniam per telescopium objecta valde remota spectantur (§. 326), radii ab eodem puncto in lentem objectivam incidentes sunt paralleli (§.94. *Optic.*), consequenter post lentem concurrunt (§. 166. 172. 184). Jam cum concursus fiat in foco lentis ocularis, *per construct.* iidem radii refractione in hac facta evadent paralleli (§. 203). Quamobrem cum oculi valentes atque presbytæ distincte videant objecta remota (§. 379. 381. *Optic.*), adeoque per radios parallelos (§. 94. *Optic*); per telescopium ita dispositum distincte vident objecta valde remota. *Quod erat unum.*

Tab. VII. Fig. 61. Sit jam focus communis lentium in F, fiatque AB = BF. Quia radiorum unus AC, qui a dextro objecti latere emanant, per A transire debet; erit radius CE axi AI parallelus (§. 203), adeoque a lente oculari per refractionem concurret in ejus foco G. Quare cum oculus prope eum constituatur *per hypoth.* & omnes radii reliqui ab eodem puncto objecti egressi, ad quod pertinet radius EG, huic paralleli refringantur, *per modo demonstrata:* punctum in latere dextro objecti videbitur in recta EG. Et eodem modo patet, punctum medium videri in axe GB. Objectum ergo situ everso apparet. *Quod erat secundum.*

Constat vero ex hactenus demonstratis, semidiametrum objecti per telescopium videri sub angulo EGI, quæ nudo oculo in A, hoc est, quia objectum valde remotum supponitur, etiam in G sub angulo *bAc*, seu BAC (§. 156. *Geom.*), spectatur. Fiat jam IF distantiæ foci IG æqualis. Quoniam anguli recti ad I æquales (§. 145. *Geom.*); erit EGF = EFI (§. 179. *Geom.*). Ducatur FM ipsi AC parallela: erit IFM = BAC (§. 233. *Geom.*). Est igitur semidiameter nudo oculo visa ad semidiametrum armato visam ut IM ad IE. Ducatur KE ipsi FM parallela: erit IM : IE = IF : IK (§. 264. *Geom.*). Sed ob lentium parallelismum CE = BI (§. 230. 226. *Geom.*) = BF + FI = AB + FI (§. 91. *Arithm.*) ob AB = BF *per construct.* & ob parallelismum rectarum CA & EK *per construct.* CE = AK (§. 257. *Geom.*). Ergo BI = AK (§. 87. *Arithm.*), consequenter ob AK + KI = AB + BI (§. 87. *Arithm.*) AB = KI

(§. 91.

(§. 91. *Arithm.*). Quare IM : IE = IF : AB, hoc est, semidiameter nudo oculo visa est ad semidiametrum armato visam in ratione distantiæ foci lentis ocularis IF ad distantiam foci lentis objectivæ AB. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

359. Quia telescopium astronomicum situ everso objecta exhibet (§. 358); ad contemplanda sidera commode quidem eodem utimur (quæ an situ erecto contemplemur, an inverso parum interest), sed non æque ad spectanda objecta terrestria, quia situs eversus sæpe non permittit, ut objectum agnoscatur.

COROLLARIUM 2.

360. Quodsi inter lentem ocularem & ejus focum G speculum planum LN, ex metallo paratum probeque politum (§. 201. *Catopr.*), longitudinis pollicaris, figuræ ovalis, sub angulo semirecto ad axem inclinetur; radii EP & MQ ita reflectentur, ut in *g* concurrentes efficiant angulum ipsi PGQ æqualem. Est enim LPE = *g*PQ (§. 24. *Catoptr.*) = GPQ (§. 156. *Geom.*) & IQP = GQN (§. 156. *Geom.*) = *g*QN (§. 24. *Catoptr.*), adeoque PQG = PQ*g* (§. 147. *Geom.*) consequenter PGQ = P*g*Q (§. 246. *Geom.*). Oculus itaque in *g* ejusdem magnitudinis objectum videt, quantæ ipsi apparet in G (§. 209. *Optic.*), situ tamen erecto (§. 71. *Catoptr.*). Addito igitur speculo, telescopium ad spectanda objecta terrestria commode adhibetur.

SCHOLION 1.

361. *Speculum metallicum esse debet, non vitreum, quia multiplex refractio in speculis vitreis confusionem parit* (§. 89. Catoptr.).

COROLLARIUM 3.

362. Quia focus vitri utrinque convexi semidiametri (§. 193), plano-convexi diametri intervallo a lente distat (§. 168. 174); si lens objectiva utrinque convexa, telescopium semidiametrum objecti amplificat in ratione semidiametri lentis ocularis ad semidiametrum lentis objectivæ; si vero lens objectiva plano-convexa, in ratione semidiametri lentis ocularis ad diametrum lentis objectivæ (§. 358).

COROLLARIUM 4.

363. Quare cum semidiameter lentis ocularis ad semidiametrum objectivæ majorem rationem habeat, quam ad ejus diametrum (§. 205. *Arithm.*); telescopium semidiametrum objecti magis amplificat, si lens objectiva fuerit plano-convexa, quam si utrinque convexa existat (§. 206. *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

364. Ratio semidiametri lentis ocularis ad diametrum vel semidiametrum objectivæ eo minor, quo minoris sphæræ segmentum fuerit vitrum oculare & quo majoris objectivum: telescopium itaque eo magis amplificat diametrum objecti, quo

lens objectiva majoris, ocularis vero minoris sphæræ segmentum fuerit.

SCHOLION 2.

365. *Necesse tamen est, ne ratio semidiametri lentis ocularis ad semidiametrum objectivæ sit justa minor; alias enim pauciores radios ab eodem objecti puncto ad oculum refringet, nec a diversis punctis emanantes probe separabit, sicque visio evadet obscura & confusa. Præterea hic quoque valent, quæ de telescopio Batavo schol. 3 & 4 probl. 30 (§. 352. 353) monuimus.* Dechales (k) *observavit, lenti objectivæ* $2\frac{1}{4}$ *pedum convenire ocularem* $1\frac{1}{2}$ *digiti; lenti objectivæ 8, imo 10 pedum, ocularem 4 digitorum. Lenti objectivæ 8 pedum ocularem 4 digitorum junxit* Eustachius de Divinis, *qui in elaborandis propria manu perspicillis excelluit.* Hugenii *telescopium, quo veram Saturni faciem & unum e comitibus ipsius primus detexit, constat ex vitro objectivo 12 pedum & oculari paulo minori, quam 3 digitorum: mox tamen ad eadem phænomena observanda usus est telescopio 23 pedum, quod duo habebat vitra ocularia* $1\frac{1}{4}$ *digitum diametro æquantia juncta invicem, ut æquipollerent uni radios parallelos ad intervallum 3 circiter digitorum cogenti* (l). *Idem observavit* (m) *lenti objectivæ 30 pedum convenire ocularem* $3\frac{1}{10}$ *digitorum & tabulam sequentem a nobis contractam pro telescopiis astronomicis construendis exhibet:*

Foci distantia vitri objectivi	Diameter aperturæ,	Foci distantia vitri ocularis.	Amplific. sec. diam.
Pedes Rhenani.	Decim. & cent. dig.	Dec. & centes. digit.	
1	0.55	0.61	20
2	0.77	0.85	28
3	0.95	1.05	34
4	1.09	1.20	40
5	1.23	1.35	44
6	1.34	1.47	49
7	1.45	1.60	53
8	1.55	1.71	56
9	1.64	1.80	60
10	1.73	1.90	63
15	2.12	2.33	72
20	2.45	2.70	89
25	2.74	3.01	100
30	3.00	3.30	109
40	3.46	3.56	126
50	3.87	4.26	141
60	4.24	4.66	154
70	4.58	5.04	166
80	4.90	5.39	178
90	5.05	5.56	183
100	5.48	6.03	199

Construxit autem banc tabulam per regulam sequentem: Foci distantia lentis exterioris, quem numerum pedum habebit, is numerus ducatur in 3000; facti radix erit diameter aperturæ quæsitæ in centesimis pollicum (seu digitorum). Eadem si augeatur

(k) Dioptr. lib. 2. prop. 21. cor. 1, f. 699. Tom. 3. Mund, Mathem.
(l) System. Saturnin. p. 3 & 4.
(m) Dioptr. prop. 56. p. 211.

tur decima sui parte, dabit foci distantiam lentis ocularis iisdem centesimis expressam. Apparentes vero rei visæ latitudines sunt sicut diametri aperturarum. *Demonstrationem vide apud inventorem* Hugenium.

COROLLARIUM 6.

366. Si in duobus vel pluribus telescopiis eadem fuerit ratio lentis ocularis ad objectivam; objectum eodem modo amplificatur (§. 358).

SCHOLION 3.

367. *Forte hinc concludent nonnulli, in elaborandis perspicillis majoribus inanem operam sumi. Enimvero probe tenendum ex scholiis superioris, quod lens ocularis ad objectivam majorem in ratione minore esse possit quam ad objectivam minorem.* E. gr. *In telescopio* Hugeniano *25 pedum vitrum oculare est trium digitorum. Servata hac proportione, in telescopio 50 pedum idem foret 6 digitorum: sed tabulæ inspectio docet, sufficere vitrum oculare 4½ digitorum. Hinc vi ejusdem tabulæ telescopium pedum 50 amplificat in ratione 1:141; telescopium pedum 25 nonnisi in ratione 1:100. Negandum tamen non est, lentem objectivam minorem exacte elaboratam præferendam esse majori minus exacte elaboratæ. Cum enim illa non modo acutiorem lentem ocularem ferat, verum etiam aperturam majorem, radiosque satis accurate colligat; fieri sane potest, ut telescopium minus, si non magis amplificet objectum, quam majus, idem tamen & clarius, & magis distinctum exhibeat: quod utrumque facit, ut rectius agnoscatur. Sane non apparet, quid tandem* Hevelius (n) *prægrandi suo 140 pedum telescopio lente, ut apparet, non satis exacte elaborata instructo, fuerit assecutus, cum non modo* Hugenius *telescopio 23 pedum veram Saturni figuram & ejus satellitum quartum; verum etiam* Cassinus *telescopiis 35, 40 & 70 pedum reliquos Saturni Lunas aliaque phænomena detexerit* (o). *Enimvero si lentes prægrandes accurate fuerint elaboratæ, qualis est illa 123 pedum, quam* Hugenius *Societati Regiæ Anglicanæ donavit, & illa* Campani *centorum palmorum, qua maculas Veneris contemplatus* Franciscus Blanchinus (p), *ipsa experientia loquitur, iisdem patere, quæ aliis minoribus latent.*

COROLLARIUM 7.

368. Quia lentium distantia aggregato ex distantiis focorum lentis objectivæ & ocularis æqualis (§. 358), focus vero vitri utrinque convexi semidiametri (§. 193), planoconvexi diametri intervallo a lente distat (§. 168. 174); longitudo telescopii æquatur aggregato semidiametrorum lentium, si objectiva utrin-

(n) Vide Mahin. cœlest. Tom. 1. c. 21. f. 403. & seqq.
(o) Vid. Du Hamel in Philos. Vet. & Nov. Tom. 5. Phys. part. 2. Tract. 1. diss. 3. c. 9. p. m. 109. & seqq.
(p) Vid. Hesperi & Phosphori nova phænomena.

trinque convexa; summæ semidiametri lentis ocularis & diametri objectivæ, si objectiva plano-convexa.

SCHOLION 4.

369. *Quoniam semidiameter lentis ocularis respectu diametri vel semidiametri objectivæ admodum exigua* (§. 365); *longitudo telescopii ex distantia lentis objectivæ ordinarie censetur, hoc est, ex ejus diametro, si fuerit plano-convexa, ex ejus semidiametro, si utrinque convexa. Ita dicimus telescopium* 12 *pedum, si lentis objectivæ utrinque convexæ semidiameter* 12 *pedum, aut lentis plano-convexæ diameter itidem* 12 *pedum, semidiameter* 6 *pedum.*

COROLLARIUM 8.

370. Cum myopes probe videant objecta vicina (§. 384. *Optic.*) per radios divergentes radiantia (§. 337. *Optic.*); lentem ocularem objectivæ propius admovere debent, ut radii per eam refracti fiant magis divergentes.

SCHOLION 5.

371. *Ut majorem campum uno obtutu comprehendere liceat, quidam lentem ocularem geminant, ita tamen ut prior sit majoris sphæræ segmentum, quam posterior. Neque tamen eadem ratione lentes oculares collocant. Quidam nimirum tubo astronomico juxta problema præsens constructo addunt lentem ocularem alteram acutiorem, ita ut intra focum prioris constituatur: alii contra lentem ocularem priorem ita collocant, ut sit intra focum objectivæ. Sed de his fusius agere non attinet, quia tubi ex binis vitris ordinarie adhibentur.*

SCHOLION 6.

372. *Illud tamen notatu dignum est, si duæ lentes immediate jungantur, ita ut una alteram contingat, focum ad duplam distantiam ejus removeri, ad quam focus unius pertingit. Hinc* & Hugenius, *ut supra notatum est, loco vitri convexi ocularis unius duo adhibuit contigua & acutiora.*

COROLLARIUM 9.

373. Quia tubus astronomicus objecta clara, distincta & aucta exhibet (§. 358), ideo etiam vicina apparere debent.

COROLLARIUM 10.

374. Cum objectum veluti ex foco objectivæ, ubi imago ejus consistit, in lentem objectivam radiet; si in foco communi lentium objectivæ atque ocularis collocetur objectum aliquod, illud cum altero per tubum visum eodem in loco apparere debet (§. 348. *Optic.*).

SCHOLION 7.

375. *Non difficultate caret fulcrorum constructio, quibus tubi majores imponendi, ne pandare possint, nec nimia difficultate huc illucve moveantur. Multum ea in re desudavit* Hevelius (q), & P. Cherubin (r) *duplex excogitavit istiusmodi fulcrorum genus: quo-*

(q) in Machina cœlesti Tom. 1. c. 19. 20. 21. 22. f. 179. & seqq.
(r) Dioptrique Oculaire, part. 3.

quorum minus postea describemus. Si enim lentes objectivæ fuerint maximarum sphærarum segmenta; telescopia a tubi molimine liberari præstat ex Hugeniano *invento, paulo post distinctius exponendo. Aliam adhuc machinam erigendi & dirigendi telescopia majora a* Campano *inventam repræsentat* Blanchinus (s). *Quidam telescopia in brevitatem contrahere allaborarunt: quemadmodum sequenti problemate docetur.*

PROBLEMA 33.

376. ***Telescopium astronomicum contrahere, hoc est, tubum astronomicum construere, qui minoris sit longitudinis communi, visibilis tamen diametrum æque amplificet.***

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 62. 1. Tubo ductitio constructo (§. 337) inseratur lens objectiva EG, mediocris sphæræ segmentum.

2. Lens ocularis prima BD sit utrinque concava & ita collocetur in tubo, ut focus objectivæ A sit pone ipsam, centro tamen concavitatis G propior. Dico imaginem jam fore in Q, ita ut sit GA:GI=AB:QI.

3. Denique lens ocularis altera utrinque convexa, sphæræ minoris segmentum, ita collocetur, ut ejus focus sit in Q.

Dico, hunc tubum magis amplificaturum diametrum objecti, quam si lens objectiva convexa ad eandem distantiam EQ imaginem exprimeret, consequenter breviorem hac ratione constructum æquipollere longiori communi.

DEMONSTRATIO.

Fiat NC:NB=3:2, ut nempe NC ad NB habeat rationem refractionis (§. 26); erit NC:BC=3:1 (§. 193. *Arithm.*), consequenter si fiat BC=GI=a & AB=d, erit NC=$3a$, NA=$2a-d$, & NA:AB=AC:AF (§. 164). Quamobrem NA:AC=AB:AF (§. 173. *Arithm.* & ideo (§. 190. *Arithm.*).

$$\begin{array}{ccccccc} NA & : & NC & = & AB & : & FB \\ 2a-d & : & 3a & = & d & : & \frac{3ad}{2a-d} \end{array}$$

Quodsi esset $d=a$, tum foret FB=$3aa:a=3a$. Sed quia $d < a$, nempe AB < GB *per construct.* (supponimus enim GB=GI, quia crassities lentis censetur parvitatis contemnendæ): erit FB < $3a$ (§. 180. 182. *Arithm.*). Quare si fiat LI=$3a$, punctum L ultra F cadet, cum-

(s) in libro paulo ante laudato Tab. VIII.

cumque ſit LG : LI = 2 : 3, hoc eſt, in ratione refractionis (§.26); poſt alteram refractionem radius axi occurret in Q, ita ut ſit LF : FI = FG : FQ (§.161), hoc eſt, LF : FG = FI : FQ (§.173. *Arithm.*), & hinc (§.190. *Arithm.*) LF : LG = FI : QI.

Eſt vero FL minor quam LG: ergo etiam FI, hoc eſt (neglecta craſſitie lentis BI) FB minor quam QI.

Patet adeo focum per lentem concavam removeri ex F in Q, atque adeo imaginem objecti in Q exiſtere. *Quod erat unum.*

Ponamus jam lentem aliquam convexam GE ad eandem diſtantiam QE imaginem objecti exprimere Qm, ita ut radius ab altero ejus extremo adveniens ſit Em, axem interſecans intra lentem E & incidenti in directum jacens (§. 241). Jam radius EH in ingreſſu in lentem concavam frangitur ad perpendiculum HC (§.25) & hinc refractus HK ab axe EQ magis divergit, quam Em. Porro HK in egreſſu a perpendiculo KG refrangitur (§.37), adeoque refractus KM ab axe magis divergit quam KH, conſequenter multo magis quam Em. Radii igitur KM & BQ majorem imaginem intercipiunt, quam Hm & DQ, conſequenter lens concava HD & convexa EG æquivalent lenti objectivæ, quæ majoris ſphæræ ſegmentum & imaginem ipſi QM æqualem ad majorem diſtantiam quam EQ exprimit. *Quod erat alterum.*

Aliter.

Vir ſummus, *Iſaacus Newtonus* (t) compendioſam tuborum conſtructionem invenit. Tab. VII. Fig. 63.

1. Fiat tubus ABCD in AD apertus, in BC vero clauſus, intus nigerrimus, tantæ circiter longitudinis, quanta eſt foci a ſpeculo concavo EF diſtantia.
2. Ad fundum BC aptetur ſpeculum metallicum concavum maximo, quo fieri poteſt, ſtudio politum, aut, ut objecta clariora exhibeantur, ſpeculum vitreum, ab anteriore ſui parte concavum, a poſteriori ex æquo convexum, convexa ſuperficie argento vivo induta. Niſi enim ubique eandem habuerit craſſitiem, ſpecies objectorum coloratas & minus diſtinctas reflectit.
3. Ab altera tubi extremitate ad ejus fere medium deſcendat anſa

(t) Optic, lib. 1, part. 7 & 8. p. 85.

ſa ferrea HL, cui agglutinetur ſpeculum planum metallicum vel, quod melius eſt, priſma trigonum vitreum aut cryſtallinum G, cujus augulus ſuperior G rectus, reliqui duo ſemirecti. Facies in angulum G coëuntes debent eſſe quadratæ: tertii figura eſt parallelogrammum rectangulum. Ita autem collocari debet hoc priſma, ut radius a ſpeculo reflexus per mediam faciem GM tranſiens eam ſecet ad angulos rectos, ad rectangulum vero MN inclinetur ſub angulo ſemirecto, ea vero ſit illius a ſpeculo concavo EF diſtantia, ut radii reflexi *a c* & *b d* a concavo poſt alteram reflexionem in baſi priſmatis factam concurrant in *e*, hoc eſt, ut diſtantia foci *e* a ſuperficie reflectente priſmatis & hujus a ſpeculo concavo diſtantia ſit diſtantiæ foci a ſpeculo concavo æqualis, vi eorum, quæ ſupra (§. 360) demonſtrata ſunt.

4. In I ſit lenticula plano-convexa, cujus focus in *e*, ut radii reflexi oculum ingrediantur paralleli (§. 203).

5. Hæc denique lenticula tegatur lamella plumbea vel orichalcea, tenui foramine rotundo inſtructa, ut radii peregrini arceantur, confuſionem cauſaturi (§. 76. *Optic.*). Sit vero foramen ea magnitudine, quæ tantum luminis tranſmittat, quantum ad claram viſionem ſufficit.

SCHOLION 1.

377. *Primum teleſcopii genus egregium eſt, modo lentes ſint ſatis accurate elaboratæ, quia lens concava, præſertim quæ minoris ſphæræ ſegmentum, radios valde diſpergit: unde & minus clarum, & confuſum apparere ſolet objectum, ſi lens objectiva non ſatis ſeparat radios ab eodem puncto venientes & cava nimium eosdem diſpergit.*

COROLLARIUM.

378. Quia lens concava convexæ juncta magnam objecti imaginem in exigua diſtantia exprimit (§. 376); hoc artificium egregie conducit ad cameras obſcuras portatiles (§. 236).

SCHOLION 2.

379. *Quoniam uſus cameræ obſcuræ poſtulat, ut imagines delineentur claræ & diſtinctæ quantum fieri poteſt; ideo & danda opera, ut lentes probe elaborentur, & cavendum, ne lens concava nimis acuta radios nimium diſpergat. Quid fieri conducat, tentando rectius definietur, quemadmodum jam ſupra* (§. 353) *in caſu ſimili annotavimus.*

SCHOLION 3.

380. *Cum vir excelſi ingenii* Newtonus *de conſtructione teleſcopii ſui primum cogitaret, non tam de tubo contra-*

bendo, quam de imperfectionibus tuborum ex refractione oriundis tollendis sollicitus erat. Quoniam enim radios diversæ refrangibilitatis esse primus repererat (§. 199. Optic.); *facile quoque videbat, fieri non posse, ut omnis aberratio radiorum avertatur, quantacunque cum cura lentes poliantur. In primo, quem construxit, tubo speculi cavi metallici semidiameter erat* $12\frac{2}{3}$ *digitorum, a quo adeo focus distabat* $6\frac{1}{3}$ *digitorum intervallo: lenticulæ ocularis diameter erat* $\frac{1}{8}$ *unius digiti, ut adeo diametrum objecti amplificaret in ratione* 1 *ad* 38 (u). *Deprehendit autem, objecta aliquanto obscuriora exhiberi. Unde suasit postea* (x), *ut vitrea specula metallicis substituantur: nec quicquam amplius in hoc negotio desiderari putat, quam ut ars vitra poliendi magis perficiatur, observavit enim inæqualitates quasdam, quæ lentibus objectivis non officiunt, speculis tamen multum obesse ac impedire, quo minus objecta distincte cernantur. Prima inventi hujus idea ex* Jacobi Gregorii *Optica promota ipsi advenit, qui simile quid ante ipsum meditatus.*

SCHOLION 4.

381. *Monet præterea* Newtonus (y), *si longitudo instrumenti sit* 6 *pedum, adeoque semidiameter speculi concavi pedum* 12 (§. 209. Catoptr.), *aperturam in speculo esse debere* 6 *unciarum, & rem objectam amplificari in ratione* 1 *ad* 200 *vel* 300. *Si longius breviusque fiat, aperturam esse debere ut cubum radicis quadrato-quadratæ longitudinis & amplificandi potentiam ut aperturam. Speculum fieri jubet uncia una aut duabus latius quam aperturam. Olim* (z) *pro constructione istiusmodi telescopiorum sequentem exhibuit tabellam:*

Semid. Speculi concavi.	Apertura.	Diameter vitri ocularis.	Semid. Speculi concavi.	Aperturæ.	Diameter vitri ocularis.
$\frac{1}{2}$ ped.	100	100	6 ped.	645	186
1	168	119	8	800	200
2	283	141	10	946	211
3	338	157	12	1084	221
4	476	163	16	1345	238
5	562	178	20	1591	251

Nullum tamen est dubium, quin eadem hic valeant, quæ superius de ocularibus vitris ad objectiva rite proportionandis dicta sunt. Johannes Hadlejus *istiusmodi telescopium catadioptricum maximo successu construxit: etenim cum esset nonnisi pedum quinque cum parte quarta, in observationibus tamen astronomicis Satellitum Jovis atque Saturni, nec non annuli Saturnini paria præstitit cum Hugeniano centum & viginti trium pedum.* (a). *Erat nimirum radius concavitatis speculi* 10′ $5\frac{1}{8}$″. *Speculum planum ex eodem cum concavo metal-*

(u) Philos. Transact. n. 81. p. 4004.
(x) Optic. l. c. p. 89.
(y) loc. cit. p. 91. 92.
(z) Phil. Transact. n. 81. p. 4032.
(a) Philos. Transact. n. 378. p. 382. & seqq.

metallo confectum erat ovale: Crassities ejus $\frac{1}{13}$ seu $\frac{1}{18}$ unius digiti, latitudo dimidii circiter digiti, longitudo ad latitudinem ut 1 ad $\sqrt{2}$. Vitrum oculare triplex adhibuit; uni erat distantia foci $\frac{1}{3}$, alteri $\frac{1}{10}$, tertio $\frac{11}{40}$ circiter unius digiti, ita ut in casu primo diameter objecti amplificaretur in ratione 188 *vel* 190 *ad* 1, *in altero in ratione* 208 *ad* 1, *in tertio denique in ratione* 228 *seu* 230 *ad* 1 (b).

PROBLEMA 30.

381. ***Fulcrum construere, quo telescopia 15, 20 aut 25 pedum sustentari, commode ad objectum datum dirigi & in situ suo immota retineri possunt.***

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 64. Placet nobis illud fulcri genus, quod R. P. *Cherubin* (c) invenit. En ejus constructionem.

1. Basis fiat ex tribus partibus A, B, C in figuram trianguli firmiter inter se junctis: ut ex schemate satis patet.
2. Basi infigatur columna lignea intus cava DE: cui
3. Immittatur virga ferrea dentata EF, cujus ope tubus elevari ac deprimi potest.
4. Hæc virga ex cavitate columnæ educenda & in eam reducenda ope manubrii G, cujus axis, ut in antlia pneumatica (§. 40. *Aërom.*) rotula dentata, ex altera figuræ parte latente, instructa.
5. Ne autem eadem sua sponte relabatur, pondere tubi pressa, vel ope rotæ hamatæ, qualis in molis ferrariis (§. 992. *Mechan.*) occurrit, atque elateris, vel aliis artificiis mechanicis impediendum.
6. Fiat globus concavus ex ligno nuceo H tubulo TF affixus, & circa axem convertibilis, ut telescopium in omnem plagam dirigi possit.
7. Huic globo immittatur alius convexus, cui cochlea afferruminetur, ut tubi sustentaculum ad eum aptari possit, sitque concavus crena aliqua instructus, ut tubus sub angulo quocunque ad horizontem facile inclinari queat: quod artificium cum in fulcris instrumentorum geodæticorum obvium sit, ut hic distinctius exponatur opus non est.
8. Sustentaculum ML ex tribus partibus componatur, quarum me-

(b) ibid. n. 376. p. 303. 304. 306.
(c) Dioptr. Oculaire part. 3, sect. 9. c. 1, fol. 271. & seqq.

media IK est quadrata intusque cava instar canalis, altitudine & latitudine 3 digitorum, longitudine duorum circiter pedum cum dimidio, ut telescopium in cavitate reponi possit. Duæ laterales MI & KL ex assere non nimis tenui paratæ, ne mediæ similes pondus præter necessitatem augeant.

9. Ut tamen telescopium firmiter incumbat, non modo segmenta annularia lignea prope extremitates affigenda, sed telescopium quoque in medio utriusque partis V & X alligandum.

10. Ut vero idem in situ suo retineri possit, hastæ ferreæ NO sustentaculo infigendo immittatur cubus orichalceus intus cavus Q, ut sursum deorsumque libere protrudi possit. Superficiei superiori afferruminatus sit axiculus rotundus per foramen in basi inferiore cubi orichalcei alterius P trajiciendus, ut is circa hunc libere moveri possit.

11. Denique per cubum P trajiciatur regula lignea ER, mediantibus cochleis partim ad cubum Q, partim ad columnam ED parte sui superiore ferro obductam firmanda.

Ita nimirum telescopium elevari ac deprimi, in quamcunque plagam dirigi, ad horizontem quomodocunque inclinari & in omni suo situ firmiter retineri facile potest: quæ singula ex ipsa structura per se manifesta sunt. Neque quicquam amplius a tubi fulcro desiderari potest.

PROBLEMA 35.

383. *Telescopia longiora a tubi molimine liberare.*

RESOLUTIO.

Egregii hujus problematis solutionem sequentem dedit celeberrimus *Hugenius* (d):

1. Malus AB ejus fere longitudinis, quæ foret tubi, normaliter in terram defigatur & antequam erigatur, latus unum dolabra complanetur atque ibi regulæ binæ affigantur inter se parallelæ ac sesquipollice distantes, itaque canalem efficientes, interius paulo latiorem, qui a summo malo ad imum fere pertingat. Tab. IIX. Fig. 65.

2. In cacumine mali imponatur orbiculus A circa axem mobilis & in

(d) in Astroscopia compendiaria.

& in eum funis Gg ducatur dupla mali longitudine, crassitudine minimi digiti dimidia, in se rediens & plumbum H pondere æquali adjectum habens, quantum est brachii mobilis cum lente imposita, utque, si opus sit, ascendi possit, triangula lignea æqualibus spatiis defigantur, quæ in schemate omissa sunt.

3. Asserculus bipedalis CD uno latere ita incidatur, ut intra canalem liberrime moveri queat.

4. Hujus medio affigatur brachium E ligneum, pedem unum a malo exstans, in cujus extremo aliud sesquipedale Ff media sui parte ad angulos rectos conjungatur. Utrumque horizonti parallelum extendatur.

5. Lens objectiva includatur in cylindrum cavum IK, 4 digitos longum & ex bractea ferrea fabricatum.

6. Huic cylindro affigatur bacillus pedalis KL, digiti crassitudine infistens, globulo æneo M avellanæ magnitudine, qui in subjecto moduli sui cavo liberrime volui possit. Cavum, uti fieri solet, ex duabus partibus constat, cochlea constringendis.

7. Ut lens æqualiter librata exigua vi moveri possit, pondus unius circiter libræ N ex filo æneo crassiore semipedali suspendatur cujus flexu facile obtinetur, ut centrum commune gravitatis ejus & lentis coincidat cum centro sphærulæ.

8. Bacillo KL infigatur stylus æneus L digiti longitudine & deorsum flexo, donec cuspide sua tantundem ac centrum globuli infra bacillum descendat, filum tenue bombycinum LV alligetur, quod adeo erit bacillo KL parallelum.

9. Lens ocularis O cylindro brevi includatur eique bacillus PV affigatur.

10. Infra eum appendatur pondus exiguum S, quantum opus est ad faciendum libramentum.

11. In Q sit capulus R, qui axiculum transversum ferat, manu observatoris apprehendendus & bacillus PV versus lentem objectivam directus filo LV alligetur.

12. Filum per foramen V trajectum verticillo T circumvolvatur, qui medio bacillo infixus, ut ejus conversione longitudo fili contrahi producique possit, quantum opus fuerit.

13. Ut observator lentem ocula-

rem immotam tenere possit, fulcrum X brachiis supponatur, cujus structura ex inspectione figuræ satis manifesta. Ejus altitudo 4′ 9″.

14. Ut in tenebris stellæ telescopio facile reperiantur, laterna opus est, cujus constructionem supra docuimus (§. 208).

15. Denique ut lux quædam tenuis ab aëre ad oculum manans excludatur, perforatus apponatur orbiculus Y, brachiolo mobili flexilique affixus.

SCHOLION.

384. *Quanti fieri debeat præclarum hoc* Hugenii *inventum, non illi modo experiuntur, qui telescopiis majoribus sidera contemplari animum inducunt; verum etiam a praxi alienus facile judicabit, qui speculum* Hevelii (e) *regiis sumtibus eum in finem exstruendum consideraverit.*

PROBLEMA 36.

385. ***Telescopium catadioptricum construere, quo in observationibus cœlestibus commode uti licet.***

RESOLUTIO.

Constructio, quam dedit *Hadlejus* (f) huc redit:

Tab. XII. Fig. 98. n. 1. 1. Speculum concavum A collocetur in fine tubi octangularis BB, tantæ longitudinis, quantam requirit distantia foci speculi, v. gr. 6 pedum & amplius, si diameter speculi 10½ circiter pedum; tantæ vero latitudinis, ut speculum commode recipere possit.

2. Tubi interior superficies nigredine inficiatur, & in fine, ubi speculum A collocatur, fiat incisio longitudinis 6 vel 7 digitorum, ut tubus ope operculi C ibidem operiri & claudi possit, quando speculum eidem vel inserere, vel ex eo eximere volueris.

3. In fundo octangulari D fiat itidem incisura *d* ⅓ circiter unius digiti lata & ad centrum usque extensa, ut ansæ speculo affixæ locus sit, qua idem tenetur, dum tubo inseritur, vel ex eo eximitur, extra hunc usum claudenda.

4. Speculum ita collocetur, ut axis ejus congruat axi tubi, ope trium confibularum lignearum, quarum duæ conspiciuntur in *aa*, tertia fundo tubi affixa, & in situ suo detineatur ope trium cochlearum, quarum una in *b* conspicitur. Cavendum tamen, ne

(e) Machin. cœlest. Tom. I. c. 22. f. 419.
(f) Philosoph. Transact. num. 376.

ne cochleæ nimia vi ſpeculum ad confibulas apprimant. Speculum autem hoc pacto inſeritur tubo, ut extra uſum eximi poſſit, ne ſplendos ejus obfuſcetur.

n. 2. 5. Speculum planum ope cochlearum affigatur brachio ferreo B, quod altero ſui extremo firmetur intra lignum mobile EE, ut ope cochleæ GG ſecundum tubi longitudinem ab ejus fundo removeri, vel eidem propius admoveri poſſit, donec exacta ſpeculorum a ſe invicem diſtantia obtineatur pro diverſa vitrorum ocularium, quibus uteris diſtantia (§. 376).

n. 2. 6. In medio ligni mobilis EE fiat cavitas cylindrica D, cujus axis ad ſuperficiem interiorem & exteriorem exacte perpendicularis, ut lens ocularis eidem immitti poſſit.

7. Brachium ferreum ad diſtantiam duorum circiter digitorum ad ſuperficiem ligni EE perpendiculare planis terminetur ſuperficiebus, ita ut latus alterutrum obvertat radio a puncto radiante ad ſpeculum tendenti; in *b* vero plana ſuperficies eundem reſpiciat, latere contrarium ſitum obtinente, & ita inflectatur, ut, ſi averſa ſpeculi plani ſuperficies ope cochlearum Cc ad idem firmetur, axis cavitatis cylindricæ D incidat in centrum ſuperficiei anterioris ſpeculi ſub angulo ſemirecto (§. 376).

8. Ut ſitus ſpeculi plani A accurate obtineri poſſit, in *i i* duæ adſunt cochleæ, quarum auxilio ſpeculum elevari ac deprimi tantillo poteſt brachio immoto, donec axis cum eodem angulum ſemirectum faciat.

9. Tubulus H, cui inſeritur lenticula ocularis, cochlea inſtruatur, ut eidem aptari poſſit ſegmentum ſphæræ cavæ, quod oculi bulbum recipiat, ne lumine a latere illabente officiatur viſioni objecti teleſcopici.

10. In ſuperiori tubi parte affigatur teleſcopium dioptricum commune H, cujus longitudo octodecim digitorum, ita ut axis ejus ſit parallelus axi tubi, & in foco communi vitri ocularis & objectivi erigantur duo capilli in axe ſeſe interſecantes. n. 1.

11. In foco vitri ocularis non procul a ſpeculo plano collocetur circulus, qui determinet partem objecti viſibilem; in altero vero ejusdem foco, qui oculum reſpicit,

ſpicit, lamina ferrea exiguo foramine pertuſa, ne ab interioribus tubi parietibus reflexi radii in oculum illabantur, conſequenter ne diſtinctæ viſioni officiatur.

12. Apertura denique limitetur annulo chartaceo ante ſpeculum concavum intra tubum collocando: quæ cum pro diverſitate viſibilis eadem non ſit, plures iſtiusmodi annuli ad manus eſſe debent. Diameter aperturæ in iis, quibus uſus eſt *Hadlejus*, fuit $5\frac{1}{2}$, 5 & 4. digitorum. Jam ut tubus commode ad objectum dirigi & in ſitu ſuo immotus detineri poſſit, peculiari machinamento opus eſt. Itaque

n. 1. & 3. 13. Baſis FF fiat ex robuſto aſſere longitudinis trium aut duorum ac dimidii pedum, latitudinis 14 digitorum.

14. In altero ejus extremo excitetur perpendiculariter arca quadrilatera III, cujus altitudo duorum circiter pedum, lateribus duobus aſſeri in *aa* & operculo in *dd* infixis, reliquis vero ad hæc ope cochlearum firmatis.

15. In operculo fiat foramen circulare, cujus diameter paulo major 3 digitis, per quod transeat columna verſatilis P axiculo ferreo in *c* inſtructa & ferro excavato in *b* inſiſtens.

16. Pars columnæ ſuperior ultra operculum unius circiter ac dimidii digiti intervallo emineat & capitulo K inſeratur, cujus longitudo 8, latitudo & craſſities 4 vel 5 digitorum.

17. Capitulo affigantur ſuſtentacula dentata LL 14 vel 15 digitos alta, quæ ab axe columnæ diſtant utrinque 5 digitorum intervallo, dentibus a ſe invicem æqualibus intervallis remotis, quibus incumbit axis ferreus C tubum ſuſtentans, juxta tubi inferiora latera incurvatus. Habent autem dentes diverſas altitudines, ut tubus pro diverſa objecti elevatione ſupra horizontem ad commoditatem oculi elevari poſſit.

18. Axis tubi $2\frac{1}{2}$ circiter digitis altior axe motus & centrum gravitatis ſpeculo cavo A intus collocato ab eodem 3 digitis retro diſtet. Et ne tubus, dum elevatur, retro deſcendat, duabus confibulis retineatur.

19. Affrictus columnæ, dum in gyrum agitur intra foramen operculi impediatur ſectore cylindrico, 65 circiter vel 70 gradus con-

continente & digitum circiter alto in parte ſuperiori D: intra cujus cavitatem in angulo quadrati applicetur lamina chalybea in medio juxta eundem angulum incurvata *oo* & vertex anguli internus intra duas laminæ partes ſit in axe columnæ & gyretur ſuper apice indurato ferri cuneiformis *f*, cujus baſis cochleis robuſtis ad ciſtam firmetur.

n. 2. 20. Capitulum ſecum vehat brachium planum, cujus longitudo 27 circiter, latitudo anterior, quæ altera paulo minor, 4 digitorum, ſuſtentatum ligno tenui O ad latus infra agglutinatum & fulcro N a columna rotatili per aperturam ciſtæ in P procedens & extremo brachii occurrens intervallo 9 digitorum ab ejus extremo.

21. In altero baſis FF extremo perpendiculariter erigatur tabula Q 12 circiter digitos lata, 26 vel 27 vero alta, retinaculo R in ſitu ſuo firmiter detinenda.

22. Pars ſuperior tabulæ in ſuperficie exteriori referat ſegmentum cylindri, cujus axis idem eſt cum axe columnæ verſatilis, ut ſuſtentare poſſit ſuſtentaculum brachii, in quo ejus extremum incedit, dum columna convertitur.

23. Suſtentaculum SS eandem habeat figuram cylindricam, quæ ope quatuor cochlearum eidem conciliatur transeuntium per utrumque ejus extremum & aliud fruſtum ligni T ejusdem cum illo longitudinis. Latus ejus ſuperius eſt complanatam, ne ſcabrities affrictum cauſetur in inceſſu brachii: ad quem imminuendum, porro

24. Brachium in V duobus inſtruitur rotulis circa axiculos ſuos verſatilibus (*§. 956. Mech.*), qui in linea per axem columnæ verſatilis transeunte ſiti.

25. Ad orbiculos illos ſuſtentaculum SS ad motum ſervetur ope cochlearum WW, quarum matrices XX tabulæ Q affigantur.

26. Motus tubi dirigatur ope duorum paxillorum ferreorum Y & Z. Primus Y a brachii extremo diſtet intervallo 10 vel 11 digitorum & filum, quod eidem circumvolvitur, infra trochleam *f* verticaliter tabulæ extremo affixam ductum, alligetur tubo in *g*. Ope hujus paxilli anterior tubi pars debite elevatur. Quodſi vero contingat objecti eleva-

tionem supra horizontem esse magnam; filum alligetur baculo quadrato levi in *h*, cujus pars inferior incumbit brachio, ut impediatur, ne motu vibratorio fili tubus vacillet motum tremulum visibili conciliaturus: huc enim facit & fili brevitas, & baculi brachio adjacentis levis affrictus.

27. Paxillus alter Z inservit motui tubi horizontali: quem in finem filum, quod eidem circumvolvitur, juxta trochleam pone alteram horizontaliter erectam, quam in figura exprimere non licuit, ductum pendeat a clavo capitulo minori *k* infixo. Ita autem collocetur paxillus Z, ut altera manu observatoris facile moveri possit, dum altera circa paxillum Y occupatur.

28. Ut paxilli Y & Z commode moveri possint, in inferiori brachii superficie firmentur frusta ligni foramine instructa, ita ut unum quodque ope ferræ in altero foramine extremo scindatur in duas partes, ut ope cochleæ *m* paxilli pede inserto coarctari possit foramen, quantum usus requirit.

29. Agit autem paxillus Z adversus duos elateres *m* & *n* intra cistam III, collocatos, quorum dexter *m* columnam vertit versus sinistram, ope funis elateri alligati & verticillo P circumvoluti, vi cujus debite extenditur. Et eodem modo sinister *n* inservit columnæ in partem contrariam vertendæ.

SCHOLION.

386. *Quoniam telescopium* Newtonianum *quinquaginta propemodum annos neglectum fuit, quod tamen insignem prorsus usum spondet in observationibus astronomicis, ita ut non melius a tuborum opticorum prægrandium molimine liberari queamus, quam ubi ab hac imperfectione liberetur telescopium catadioptricum, quod specula metallica nitorem suum facile amittant; ideo consultum duximus apparatum illum prolixius describi, qui cura* Hadleji *accessit & quo telescopii hujus usus promtus redditur & expeditus.*

PROBLEMA 37.

387. *Telescopium terrestre construere.*

RESOLUTIO.

1. Tubo constructo (§. 337) inseratur lens objectiva vel utrinque convexa, vel plano-convexa, quæ sit majoris sphæræ segmentum.

2. Eidem jungantur tres lentes oculares utrinque convexæ & æqua-

qualium sphærarum segmenta, ita quidem ut binarum quarumcunque distantia sit aggregatum ex distantiis focorum earundem.

Dico, oculum lenti ultimæ in distantia foci ejus admotum videre objectum distinctum, situ erecto & amplificatum in ratione distantiæ foci lentis unius ocularis LK ad distantiam foci objectivæ AB. Tab. VII. Fig. 66.

DEMONSTRATIO.

Cum per tubum objecta remota spectentur (§. 326), adeoque radii ab uno puncto emanantes in lentem objectivam paralleli incidant (§. 94. *Optic.*), in distantia foci principalis delineabitur objecti imago situ inverso (§. 214). Quare cum hæc imago sit in foco lentis ocularis primæ, *per constrūct.* radii post refractionem alteram erunt paralleli (§. 203), qui in lentem tertiam incidentes post tertiam refractionem imaginem inversam imaginis inversæ, hoc est, erectam objecti in foco ejus formabunt (§. 224). Quoniam itaque hæc imago in foco lentis ocularis tertiæ existit, *per constrūct.* radii post quartam refractionem erunt paralleli. Oculus adeo objectum per radios parallelos videt: unde liquet ex demonstrationibus anterioribus, quod idem distinctum videre debeat. *Quod erat unum.*

Quando imago inversa in foco lentis oculo proximæ constituta in eam radiat, objectum situ inverso apparet (§. 358). Ergo cum imago erecta ibidem constituta in eandem radiat, objectum situ erecto apparere debet. *Quod erat alterum.*

Radius AQ ex foco Q lentis objectivæ AB incidens post refractionem fit axi IL parallelus (§. 203), consequenter a lente oculari prima CD unitur semidiametri intervallo cum axe in M (§. 193). Et cum in M etiam sit focus lentis ocularis secundæ EF, *per constrūct.* radius FH post refractionem erit axi NO parallelus (§. 203), adeoque ab oculari tertia cum axe unitur in P ad distantiam semidiametri PO (§. 193). Sunt vero semidiametri lentium GH & CD æquales, *per constrūct.* Ergo PO = LM vel PH = MC. Quare cum demissis perpendicularibus D*l* & H*o* anguli recti ad *o* & *l* etiam sint æquales nec minus H*o* = D*l* (§. 289. 291. *Geom.*); erit angulus OPH ipsi CML æqualis (§. 235. *Geom.*). Objecti adeo semidiameter tanta apparet in P, quanta videtur in M Tab. VII. Fig. 66.

(*§. 209. Optic.*). Enimvero si IQ fuerit distantia foci lentis objectivæ, oculus in M positus videt semidiametrum objecti amplificatam in ratione ML vel PO ad IQ (§. 358). Ergo & in P semidiameter objecti aucta cernitur in ratione LM vel PO ad QI. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

388. Tubus adeo astronomicus facile convertitur in terrestrem, lentem ocularem triplicando, & terrestris contra in astronomicum abit, duas lentes oculares auferendo, eadem tamen manente potentia amplificandi.

COROLLARIUM 2.

389. Quia distantia lentium ocularium exigua est, longitudo telescopii parum mutatur, si tribus ocularibus loco unius utaris.

COROLLARIUM 3.

390. Patet autem ex constructione longitudinem telescopii haberi, si diametro lentis objectivæ planoconvexæ vel semidiametro utrinque convexæ IK addas quintuplum semidiametri lentium ocularium KR.

SCHOLION 1.

391 Hugenius *primum invenit in tubo astronomico non minus, quam in terrestri multum conducere ad telescopii perfectionem, si eo in loco, ubi hæret imago in lentem oculo proximam radians, constituatur annulus vel ex ligno tornatus, vel ex lamina metallica confectus cum foramine paulo angustiore, quam est vitri ocularis latitudo* (g). *Ita nimirum colores arcentur visionem distinctam turbaturi & tota area, quæ uno obtutu comprehenditur, termino suo circumscribitur.*

SCHOLION 2.

392. *Sunt equidem, qui tubos terrestres ex tribus lentibus construunt, objecta non minus erecta & amplificata exhibentes: sed talia telescopia minus perfecta censeri debent, tum quia imagines coloribus inficiunt, tum quia circa marginem distorquent.*

SCHOLION 3.

393. *Nonnulli quatuor & pluribus lentibus ocularibus utuntur. Sed cum in transitu per singulas lentes pars quædam radiorum intercipiatur, objectiva non satis clara apparent. Sufficit itaque nobis optimum telescopii genus exposuisse.*

PROBLEMA 38.

394. *Aperturam lentis objectivæ in telescopio definire.*

RESOLUTIO.

1. Ex charta compacta & nigredine infecta exscindantur plures annuli, ita ut diameter minoris foraminis pisi majoris diametrum adæquet, diameter vero foraminum in reliquis continuo

(g) In Systemate Saturn no p. 82. conf. Dioptr. prop. 53. p. 195.

nuo crescat. Totius vero annuli diameter sit latitudini vitri objectivi æqualis.

2. Telescopium interdiu versus objectum aliquod procul distans, noctu versus Lunam, planetam aliquem atque stellas fixas diversæ magnitudinis dirigatur, & adhibitis diversis aperturis notetur, per quamnam objectum non modo clarum, sed & maxime distinctum appareat.

Ita nimirum aperturam convenientissimam deprehendes.

SCHOLION 1.

395. *Quantum momenti situm sit in apertura vitri objectivi conveniente, experientia clarissime loquitur. Nec difficulter idem ratione assequi datur. Radii enim ab axe remotiores a foco aberrant, nec in eo colliguntur: unde objecti imago in retina fit confusa. Major vero aberratio est, quæ a diversa radiorum refrangibilitate pendet. Radium enim unum per refractionem in plures diversicolores dispesci; diversos adeo angulos cum catheto refractionis efficientes*, *dudum observavit* Newtonus (§. 199. Optic.). *Atque ex his fundamentis* Hugenius *deduxit* (h), *constituta per experientiam apertura lentis objectivæ 30 pedum, esse ut 30 ad 3, hoc est, ut 10 ad 1 ita radicem ex distantia foci lentis cujuscunque per 30 multiplicatam ad ejus aperturam, distantias vero focorum lentium ocularium esse aperturis proportionales.*

SCHOLION 2.

396. *Quoniam interdiu oculus majori lumine occupatus minus vivide afficitur a debiliori, ut plures radii per tubum ad oculum pertingant, aut ampliandа erit apertura, aut lente oculari, quæ sit majoris sphæræ segmentum, utendum. Sed ne aberratio radiorum,* Newtoniana *præsertim, visioni distinctæ officiat; medelam posteriorem afferre præstat, quam priorem. Hinc interdiu lentem ocularem adhiberi consultum est, cujus diameter sit dupla diametri nocturnæ. Cum enim hac ratione imago interdiu in retina delineata sit subdupla ejus, quæ noctu ibidem exhibetur, quoad diametrum* (§. 358. Dioptr. & §. 181. Arithm.)*; claritatem quoque multo majorem quam illa habebit* (§. 89. Optic.).

SCHOLION 3.

397. *Illud quoque notatu dignum est, quod lentes objectivæ majorem aperturam admittant, si tubi intus denigrentur & eorum ductus annulis ligneis muniantur* (§. 337).

SCHOLION 4.

398. *Cum tanta sit lentis objectivæ obtegendæ circa marginem necessitas; mirum sane videri poterat, quod per lentes vitreas, quæ majorum sphærarum segmenta existunt, solitisque multo latiores sunt, in ipsa luce meridiana, sine ullo tubi molimine, objecta valde dissita & per amplum spatium diffusa clare at-*

(h) Dioptr. prop. 56. p. 205. & seqq.

quæ distincte videri possint tam situ erecto, si intra focum & vitrum oculus constituatur, quam situ everso, si ultra focum spectator consistat. Etenim jam ante aliquot annos notatum est in Actis Eruditorum (i), *me per tabulam vitream plano-convexam, cujus convexitatis diameter* 30 *pedum, longitudo duorum, latitudo unius cum dimidio existebat, ad distantiam duorum milliarium Germanicorum in ipsa luce meridiana, sine ullo tubi molimine, duobus oculis apertis sine vitro oculari ædificia monti superstructa distinctissime vidisse. Nec credo ab hoc diversum esse illustris* Tschirnhusii *inventum, quod ab ipso celatum tantopere commendatur a celeberrimo* Fontenellio (k). *Eadem enim observavi per vitrum non satis exacte politum, quæ de sua lente singulari ad illustrem Academiam Regiam Scientiarum perscripsit* Tschirnhusius, *ut adeo secretum nullum sit, quod hic subesse suspicatur* Fontenellius.

PROBLEMA 39.

399. ***Rationem experimentaliter definire, quam habet diameter objecti nudo oculo visi ad diametrum per telescopium visi.***

RESOLUTIO.

1. Dirigatur tubus versus tectum alicujus domus & per eum oculus superiorem tegularum seriem contueatur.
2. Oculus alter sit apertus, ut eædem tegulæ quoque videantur nudo.
3. Telescopium tamdiu vertatur, donec unius tegulæ extremum per telescopium visum incidat in extremum ejusdem nudo oculo visum.
4. Numerentur tegulæ nudo oculo visæ, quæ uni vel pluribus tegulis per telescopium conspectis congruunt.

Erit enim ut numerus prior ad posteriorem, ita diameter objecti oculo armato visi ad diametrum nudo oculo visi.

SCHOLION 1.

400. *Ne manu vacillante observatio irrita fiat, tubus fulcro cuidam firmo inniti debet. Oculus non minus immotus sit necesse est.*

SCHOLION 2.

401. *Quæ de tubis binoculis primum* Antonius Maria Schyrlæus de Reita (l) *& post ipsum alii, veluti* Cherubin *Capucinus* (m), *meditati sunt: curiositati magis, quam utilitati servire videntur. Unde non mirum, quod vir in hoc studiorum genere præstantissimus*

(i) A. 1710. mens. Octobr. p. 466. 467.

(k) Hist. Acad. Reg. scient. A. 1701. p. 165. edit. Bat.

(l) in Oculo Enochi atque Eliæ lib. 4. f. 354. & seqq.

(m) in Dioptricæ Ocularis Tom. 2, qui sub titulo: La Vision parfaite prodiit.

mus & de tuborum perfectione tantopere sollicitus Hgenius, *nullam eorum in suo de Dioptrica opere mentionem injicit. Uno nimirum oculo satis bene distinguimus objecta, modo lens objectiva sit exacte elaborata & aperturam habeat lentemque ocularem convenientem.*

CAPUT VII.
DE
MICROSCOPIIS SEU ENGYSCOPIIS.

DEFINITIO 31.

402. ***Microscopium*** seu ***Engyscopium*** est instrumentum dioptricum, per quod objecta minuta valde aucta & distincte spectantur.

SCHOLION.

403. *Quando & a quonam microscopia fuerint inventa, non liquet. Certe anno* 1618. *ea adhuc incognita fuisse, inde manifestum est, quod* Hieronymus Syrturus, *qui eo ipso anno de origine & fabrica telescopiorum librum edidit, nullam eorum mentionem injicit.*

DEFINITIO 32.

404. ***Microscopium simplex*** est, quod unica lenticula aut sphærula constat.

DEFINITIO 33.

405. ***Microscopium compositum*** est, quod ex pluribus lentibus constat.

SCHOLION.

406. *Microscopia composita anno* 1621. *apud* Drebbelium *Batavum jam conspecta esse eumque tum pro inventore habitum fuisse, autor est* Hugenius (n). *Anno* 1646 *in libro Observationum hoc inventum sibi arrogavit* Franciscus Fontana, *Neapolitanus, quasi in id jam anno* 1621 *incidisset. Cum tubus inversus sit microscopium, haud difficilis fuit microscopii compositi inventio. Sed casu, non minus quam tubus, reperiri potuit.*

THEOREMA 76.

407. ***Si objectum*** AB ***ponitur in foco lenticulæ convexæ microscopii simplicis*** DE ***& oculus lenticulæ ab altera parte proxime admovetur: videbis objectum distinctum, situ erecto atque auctum in ratione distantiæ foci ad eam distantiam, in qua collocanda sunt objecta,*** Tab. VII. Fig. 67.

que

(n) in Dioptrica p. 221.

quæ nudo oculo cernuntur distincte.

DEMONSTRATIO.

Quoniam objectum AB in foco lenticulæ convexæ DE collocatur, *per hypoth.* radii a singulis punctis emanantes post refractionem erunt inter se paralleli (§. 203). Oculus ergo valens objectum videre debet distincte, vi eorum, quæ de tubis demonstrata sunt (§. 358). *Quod erat primum.*

Porro cum radiorum unus AF a puncto A emanans post refractionem sit incidenti parallelus, adeoque neglecta particula crassitiei lenticulæ eidem in directum situs (§. 240), & idem eodem modo constet de aliquo radiorum ex puncto B in oculum delatorum; radii AF & BF, quibus reliqui ex iisdem punctis A & B emanantes sunt paralleli, *per demonstrata*, eodem modo oculum ingrediuntur, ac si lenticula removeretur. Sed lenticula remota, objectum apparet situ erecto, ut experientia constat. Ergo etiam per lenticulam situ erecto apparere debet. *Quod erat secundum.*

Ex demonstratis autem simul manifestum est, objectum AB sub eodem angulo AFB videri, sub quo ab oculo nudo cerneretur. Quoniam tamen distinctum apparet, *per demonstrata*, cum nudo oculo in eadem distantia videatur valde confusum: perinde est, ac si objectum aliquod ad distantiam FH remotum videretur, in qua æque distincte sub eodem angulo cernitur. Est ergo diameter objecti AB ad diametrum apparentem IK ut FC ad FH, hoc est, ut distantia foci lenticulæ ad eam distantiam, in qua collocandum est objectum aliquod, ut ab oculo nudo distincte videatur. *Quod erat tertium.*

SCHOLION I.

408. Hugenius (o) *assumit, objectum nudo oculo tum apparere distinctum, si* 8 *digitorum intervallo removeatur. Iterata observatione didici, cum primum hæc scriberem, hoc est, A.* 1714, *ad* 5 *digitorum intervallum me quidem legere posse scripturam eo charactere expressam, quo corollaria in his Elementis excusa sunt; sed tamen nebulam quandam adhuc oculo obversari, in distantia* 8 *digitorum prorsus evanescentem. Unde* Hugenio *assentior, quæ ab oculo valente (ego enim, quo hæc scribo tempore, nempe A.* 1714. *neque in presbytarum, neque in myopum numero sum) distincte videntur,* 8 *digitorum intervallo minimum distare debere. Atque hinc infertur:*

CO-

(o) in Dioptr. prop. 59. p. 222.

COROLLARIUM 1.

409. Microscopia simplicia amplificant diametrum objecti AB in ratione distantiæ foci FC ad 8 digitorum intervallum. E. gr. sit semidiameter lenticulæ utrinque convexæ digiti dimidii, erit AB: IK = $\frac{1}{4}$:8=1:16, hoc est, diameter objecti augetur in ratione sedecupla.

COROLLARIUM 2.

410. Cum distantia FH sit constans, octo nimirum digitorum (§. 409); quo minor fuerit distantia foci FC, eo minorem ad FH rationem habebit (§.203. *Arithm.*), consequenter eo minorem quoque rationem habebit diameter vera objecti AB ad apparentem IK (§. 408), adeoque eo minor diameter videbitur instar ipsius IK (§. 204. *Arithm.*). Eo itaque magis amplificabitur diameter objecti.

COROLLARIUM 3.

411. Quia in lenticulis plano-convexis distantia foci diametro (§. 168. 175), in utrinque convexis semidiametro æqualis (§. 193); microscopia simplicia eo magis diametrum objecti amplificant, quo minoris fuerint sphæræ segmentum (§. 410).

COROLLARIUM 4.

412. Si diameter convexitatis in lenticula plano-convexa & utrinque convexa eadem fuerit, nempe = 1; erit distantia foci prioris 1, posterioris $\frac{1}{2}$, consequenter semidiameter objecti AB ad apparentem in casu priore ut 1 ad 8, in posteriore ut $\frac{1}{2}$ ad 8 (§. 409), hoc est, ut 1 ad 16. Diameter ergo objecti in casu posteriore duplo major, quam in priore. Lenticula itaque duplo magis eam amplificat, si fuerit utrinque convexa, quam si plano-convexa.

COROLLARIUM 5.

413. Si semidiameter convexitatis majoris in lenticula utrinque inæqualiter convexa fuerit a, semidiameter minoris b; erit foci distantia $2ab : [a+b]$ (§. 189). Cum adeo sit ad distantiam foci lenticulæ utrinque æqualiter convexæ, cujus semidiameter $= a$, ut $2ab : a+b$ ad a (§. 193), hoc est; ut $2ab$ ad $aa + ab$, sitque $2ab < aa + ab$, ob $a > b$ *per hypoth.* adeoque $aa < ab$ (§. 180. *Arithm.*); distantia foci lenticulæ inæqualiter convexæ minor est distantia foci æqualiter convexæ, cujus semidiameter æqualis semidiametro convexitatis majoris, consequenter illa magis objectum amplificat quam hæc (§. 410.

COROLLARIUM 6.

414. Ex adverso cum distantia foci lenticulæ utrinque inæqualiter convexæ sit ad distantiam foci utrinque æqualiter convexæ, cujus semidiameter æqualis semidiametro convexitatis minoris ut $2ab : (a+b)$ ad b, hoc est, ut $2ab$ ad $ab + bb$ sitque $2ab > ab + bb$ (§. 180. *Arithm.*) ob $a > b$ *per hypoth.* distantia foci lenticulæ inæqualiter convexæ major est distantia foci æqualiter convexæ, cujus semidiameter æqualis est semidiametro convexitatis minoris,

noris, consequenter illa minus amplificat objectum, quam hæc (§. 410).

COROLLARIUM. 7.

415. Quoniam convexitas e sphæra majore majorem aperturam admittit (§.395), consequenter per eam plures radii ad oculum transmittuntur, quam per convexitatem e sphæra minore; objectum clarius cernitur, si convexitas major microscopii objecto obvertitur, quam si minor.

COROLLARIUM 8.

416. Quia in lenticula aquea major est foci distantia, quam in vitrea, si nempe fuerint sphærarum æqualium segmenta, (§. 174. 173. 192. & seqq.); aquea objectum minus amplificat, quam vitrea (§. 407).

COROLLARIUM 9.

Tab. VII. Fig. 67. 417. Quoniam myopes per radios divergentes distincte vident objecta (§. 384 *Optic.*), objectum AB propius lenticulæ admovere debent, ut intra focum & lenticulam collocetur.

SCHOLION 2.

418. *Si quis rationem expendit, cur microscopia simplicia objectum amplificent; illi non mirum videbitur, quod per idem microscopium idem objectum eodem in loco collocatum diversimode auctum apparere possit, prout intentio fuerit illud in viciniore aut remotiore loco videndi: id quod facile experiri datur, si unus oculus ad microscopium applicatus ad objectum, alter vero apertus in locum nunc remotiorem, nunc viciniorem dirigatur.*

COROLLARIUM 10.

419. Cum radii intra angulum *b*F*a* comprehensi magis a se invicem discedant, quo magis oculus a lenticula removetur; eo minorem objecti partem is uno obtutu comprehendit, quo longius a lenticula distat: unde consultum est, oculum quam proxime eidem admoveri.

SCHOLION 3.

420. *Ut objecta commode in distantia convenienti ad lenticulam admoveri & in suo situ immota detineri possint; variæ excogitatæ sunt microscopiorum simplicium structuræ, quarum præcipuas exponere libet.*

PROBLEMA 40.

421. *Microscopia simplicia construere.*

RESOLUTIO.

Ad usum microscopiorum simplicium commodam machinulam æneam variorumque instrumentorum apparatum invenit *Johannes de Muschenbræk*, artifex insignis Batavus. Machinula instrumentorumque fabrica ex schematis, quod exhibemus, inspectione satis obvia, ut magis singulorum usum indicari, quam illam prolixis verbis describi opus sit.

1. Lenticulæ utrinque convexæ, diversæ sphæricitatis, ut diversimode amplificent objecta (§. 407), Tab. IIX. Fig. 68.

407), superimpositis utrinque annulis orichalceis, ne justo major sit apertura, capsulæ A ex nigro cornu tornatæ includuntur. Possunt tamen eædem capsulæ ex ebore, ossibus lignoque duriori & rariori tornari. Capsula foramine pertusa, ut ad machinulam aptari possit.

2. Machinula ex orichalco confecta ope trium globorum B, C & D in omnem situm convenientem facile disponitur & ope manubrii E commode manu tenetur.

3. Instrumenta, quibus objecta debita ratione aptata, tubulo F infiguntur, capsula vero A stylo GH. Ita nimirum stylum instrumenti, quod objectum sustentat, versus lenticulam protrudendo, vel retrahendo, machinulamque ope globulorum B, C & D huc illucque versando, objectum in loco convenienti facile constituitur ibique immotum retinetur.

4. Stylo I agglutinantur objecta tenuia, plana & exigua, veluti insecti alicujus ala vel foliolum flosculi.

5. Stylo acuto K infiguntur objecta parva, non nimis lata, veluti caput aut pes muscæ, pulex, pediculus, frustulum ligni.

6. Stylo bifurcato L agglutinantur objecta plana tenuia, oblonga, veluti fasciola chartæ, lintei, panni, folia arborum & plantarum, crines.

7. Stylo bifurcato M infiguntur objecta oblonga & crassiora, veluti insecta, quæ uni stylo infixa se contorquent, qualia sunt erucæ, papiliones & insecta crassiora, veluti scarabæi, muscæ.

8. Instrumento N applicantur tubuli vitrei capillares, liquoribus pleni, veluti si aquam pipere conditam, acetum, sanguinem, lac contemplari libuerit.

9. Vasculum O, quod beneficio cochleæ aperiri potest, ex ligno duriori tornatum continet duo vitra plana, non polita, annulo chartaceo interposito, ut animalcula viva, veluti pulices, culices, acari, pediculi &c. includi possint.

10. Disco Q imponuntur objecta, quæ reliquis instrumentis non commode aptantur, veluti granula arenæ, pulvis farinaceus, salia. Quodsi objectum non satis firmiter incumbit, malleo ST in tubulo P defixo retinetur, parte quidem lata S, si ob-

jectum fuerit homogeneum, v. gr. filum, plumulą, particula cuticulæ, parte vero acuta, si nullam ejus partem tegi consultum sit, veluti si alam insecti, e. gr. muscæ, papilionis, scarabæi, aut integrum quoddam folium plantæ vel arboris contemplari libuerit.

11. Fuscinula R, ex lamina orichalcea elastica parata, objectis apprehendendis inservit, quæ digitis apprehendi commode nequeunt.

Aliter.

Tab. IX. Fig. 69.

1. Torno ex orichalco paretur tubulus cavus orichalceus AB, cujus superficies exterior in cochleam efformatur, longitudinis paulo minoris, quam est distantia foci vitri utrinque convexi, ad illuminandum objectum, mediante annulo cochlea instructo DE ad basin ejus AC aptando.

2. Fiat tubulus alius paulo amplior FG itidem ex orichalco, ad utrumque latus apertum, ut objectum microscopio admoveri possit.

3. Ejus basi superiori GH afferruminetur elater ex filo ferreo in spiram contorto I, ut objectum inter lamellas rotundas K & L eo, quem mox dicemus, modo collocatum & ope cochleæ BC lenti microscopicæ decenter admotum in situ suo firmiter retineri queat.

4. Ad basin HG cochlea fœmina M instructam firmantur scutellæ N, cochlea mari O instructæ, in quibus lenticulæ diversarum sphæricitatum annulis orichalceis præmunitæ, ut justa sit apertura, reconduntur.

5. In P afferruminetur cochlea fœmina, ut stylus eburneus PQ, quo microscopium commode tenetur, aptari possit, mediante cochleola transversim acta R in situ suo immotus retinendus.

6. In regula eburnea T excaventur foramina rotunda, ita ut intra ea circelli ex vitro Moscovitico excisi glutine aliquo firmari queant, quibus objecta exigua & pellucida præsertim, veluti minima insecta, aut majorum alæ, partes cuticulæ, squamulæ piscium &c. agglutinari possint.

4. Quodsi insecta includere volueris, vitrea lamella Y tecta, intra canaliculum quadratum ex orichalco confectum & foraminibus pertusum X reponatur.

6. Regula ista sive solitaria, sive canaliculo inclusa, inter lamellas rotun-

rotundas K & L reposita mediante cochlea AB lenticulæ admoveatur, donec objectum distincte conspici possit.

7. Quodsi objecta quædam alia tenuia, & oblonga, veluti linteum, cuticulam, alam insecti majoris, e. gr. papilionis, crinem, filum contemplari volueris; regulæ loco utendum est instrumento V, cujus structura ex ipsa figuræ inspectione satis manifesta.

Si quis sumptibus parcat, idem microscopium ex ligno parare poterit.

Aliter.

Tab. VII. Fig. 70. 1. Lenticula utrinque convexa in capsula AC ex ligno, vel osse tornata reponatur & mediante cochlea H ibidem firmetur.

2. Per pedunculum lignnem vel osseum CD trajiciatur stylus æneus, cujus superficiei aliqua pars in cochleam efformata, ut in quolibet situ mediante cochlea fœmina I firmiter detineri possit.

3. Stylus sit in E tubulo exiguo instructus, cui diversa instrumenta cum variis objectis superius in apparatu Musſenbroekiano descripta immittere licet.

Ita nimirum varia objecta ad idem microscopium commode applicari & in suo situ firmiter detineri possunt.

Quodsi eidem capsulæ varias lenticulas succesfive indere libuerit, idem eodem modo efficies, quo in microscopio præcedente.

Aliter.

1. Ex osse vel ligno tornetur tubulus AB Tab. IIX. Fig. 71.

2. Ad basin BC aptetur vitrum planum, cui objectum agglutinari debet, v. gr. pulex, vermiculus, ala insecti, particula lintei, seminis granulum exiguum.

3. Ad basin alteram AD in debita a vitro distantia applicetur lenticula utrinque convexa, cujus semidiameter dimidii circiter digiti.

4. Vitrum planum lumini solari, vel candelæ ardenti obvertatur.

Quodsi tubulus ductitius fiat, lenticulæ diversarum sphæricitatum, uti in microscopio altero, applicari possunt. Solet autem hoc *microscopium* vulgo appellari *pulicare*, & loco lenticulæ adhiberi potest nodulus convexus ex vitro potorio nodoso confracto.

SCHOLION.

422. *Pulicare microscopium cum* Scheinerus *in itinere e Batavia per inferio-*

feriorem Austriam in Tyrolim febri correptus eademque in pago extinctus secum in sarcinula haberet; prætor & seniores pulicem microscopio inclusum pro dæmone & ideo Scheinerum *pro viro venefico habuere, eum hoc nomine indignum sepultura pronunciantes, donec tandem aperto instrumento pulicem agnoverint* (p).

THEOREMA 77.

Tab. VII. Fig. 72. 423. *Si objectum* AB *fuerit positum in foco sphærulæ vitreæ* F *& oculus post eam, e. gr. in foco* G *constitutus; objectum videtur distincte & situ erecto, auctum quoad diametrum in ratione* ½ *diametri* EI *ad eam distantiam, in qua collocanda sunt objecta, quæ nudo oculo distincte videntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam objectum AB in foco sphærulæ F collocatur. *per hypoth.* radii post reflexionem sunt paralleli (§. 203). Oculus ergo sanus objectum videre debet distincte, vi eorum, quæ de tubis demonstrata sunt (§. 358). *Quod erat primum.*

Porro quia oculus in foco radiorum parallelorum, constitutus, *per hypoth.* radius incidens AL, qui post duplicem refractionem a puncto A ad oculum pertingit, axi FG parallelus est. Quodsi ergo LD continuetur, donec axi in H occurrat, ita ut punctum H sit illud, in quo post primam refractionem radius AL concurrit (§. 90); erit HG = GI (§. 91. 182); adeoque angulus DGI duplus anguli DHI (§. 239. *Geom.*) cumque sit FE = GI *per hypoth.* HG = FE (§. 87. *Arithm.*) = AL (quia distantia rectarum AL & FE exigua). Quare cum AL ipsi GH, seu FH parallela *per demonstrata;* erit AG ipsi DH parallela (§. 257. *Geom.*), adeoque DHI=AGI (§. 233. *Geom.*), consequenter DGI duplus anguli AGI, (*per demonstr.* & §. 168. *Arithm.*). Et quoniam EC = CI (§. 40. *Geom.*) & EF = IG *per hypoth.* adeoque GC = CF (§. 88. *Arithm.*) = CA ob differentiam contemnendam rectarum AC & CF; angulus ACF duplus est anguli AGF (§. 184. 239. *Geom.*) & hinc ipsi DGI æqualis (§. 177. *Arithm.*). Videtur ergo semidiameter objecti AF sub angulo ACF: unde ex iis, quæ ad propos: 76 demonstrata sunt, patet esse diametrum veram ad apparentem in ratione CF, hoc est, cum in F sit focus sphæræ *per hypoth.* ½ diametri

(p) Schottus Mag. nat. part. I. lib. 10. syntagm. 4. c. I. p. 534. & Zahnius in Oculo fund. 3. syntagm. 3. c. 4. probl. I. f. m. 534.

tri EI (§.182), ad diſtantiam, in qua collocanda ſunt objecta, quæ oculus nudus diſtincte cernit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

424. Qui valet oculis, objectum diſtincte non cernet, niſi 8 digitorum intervallo diſtet (§.408); amplificant ergo ſphærulæ vitreæ diametrum objecti in ratione $\frac{3}{4}$ diametri ad intervallum 8 digitorum.

SCHOLION 1.

425. *Sit e. gr. diameter ſphærulæ* EI $\frac{1}{10}$ *unius digiti, erit* CE $= \frac{1}{20}$ *&* EF $= \frac{1}{40}$ *adeoque* FC $= \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}$*, conſequenter diameter objecti vera ad apparentem in ratione* $\frac{3}{40}$ *ad* 8*, hoc eſt,* 3 *ad* 320 *ſeu* 1 *ad* 103 *fere.*

COROLLARIUM 2.

426. Lenticula utrinque convexa auget diametrum in ratione ſemidiametri EC ad intervallum 8 digitorum (§.409); ſphærula autem vitrea in ratione $\frac{3}{4}$ EI ad item 8 digitorum intervallum (§.424): Quare cum $\frac{1}{2}$ EI ad intervallum iſtud minorem rationem habeat quam $\frac{3}{4}$ EI (§. 203. *Arithm.*), ſi lenticula & ſphærula eandem diametrum habuerint, diameter objecti minoris per lenticulam ejusdem magnitudinis videtur, quantæ apparet diameter majoris per ſphærulam (§.204. *Arithm.*), conſequenter diameter objecti per lenticulam viſa major, quam per ſphærulam viſa, ſeu lenticula magis amplificat objectum quam ſphærula.

SCHOLION 2.

427. *Sit e. gr. diameter lenticulæ utrinque convexæ* EI $\frac{1}{10}$ *unius digiti; erit diameter vera ad apparentem in ratione* $\frac{1}{20}$ *ad* 8*, hoc eſt,* 1 *ad* 160*. Aſt in vitrea ſphærula eſt ut* 1 *ad* 103 (§. 425).

COROLLARIUM 3.

428. Quia diſtantia foci FE in ſphærula aquea $\frac{1}{2}$ EI (§.183), adeoque CF = EI; diameter objecti per eam viſa amplificatur in ratione EI ad intervallum 8 digitorum (§.423). Quare cum vitrea ejusdem diametri eandem amplificet in ratione $\frac{3}{4}$ EI ad intervallum idem 8 digitorum (§. *cit.*); eodem quo ante modo patet, ſphærulam aqueam minus amplificare objectum, quam vitream.

SCHOLION 3.

429. *Sit e. gr. diameter ſphærulæ aqueæ* EI $\frac{1}{10}$ *unius digiti, erit* FC *itidem* $\frac{1}{10}$*, adeoque diameter objecti vera ad apparentem in ratione* $\frac{1}{10}$ *ad* 8*, hoc eſt,* 1 *ad* 80*. Sed ſi vitrea foret, illa ad hanc haberet rationem* 1 *ad* 103 (§.425).

COROLLARIUM 4.

430. Nec abſimili modo colligitur, ſphærulam minorem magis amplificare objectum, quam majorem.

PROBLEMA 41.

431. ***Sphærulas vitreas quantumlibet exiguas conficere.***

RESO-

RESOLUTIO.

1. Vitri puri frustulum valde exiguum, quod filo ferreo tenuissimo madefactum adhæret, ad imam cerei flammam cœruleam aut, quod omnium optimum, ad flammam spiritus vini accensi admoveatur, ne nigredine inficiatur.

2. Ibi cum statim liquefiat & in guttulam rotundam abeat, guttula a flamma removeatur, quæ extemplo fluiditatem amittet.

3. Lamella orichalcea admodum tenuis complicata perforetur & foramina perquam exigua lævigentur, ne ulla in peripheriis eorum scabrities supersit, quæ ulterius ad tollendum fulgorem fuligine inficere juvat.

Tab. 4. Sphærulam filo adhærentem in-
IIX. tra lamellas O ad foramina apta,
Fig. ut ex figuræ inspectione satis li-
73. quet.

COROLLARIUM.

432. Quoniam sphærulæ longe minores fieri possunt, quam lenticulæ; ex iis microscopia omnium præstantisma componuntur, quæ nempe omnium maxime amplificant objectum.

SCHOLION.

433. *Ponamus enim diametrum sphærulæ esse $\frac{1}{16}$ unius digiti, erit distantia foci $\frac{1}{64}$, adeoque diameter vera ad apparentem ut $\frac{1}{32} + \frac{1}{64}$, hoc est ut $\frac{3}{64}$ ad 8, seu ut 3 ad 512, vel denique ut 1 ad 170 fere. Superficies ergo amplificabitur in ratione 1 ad 28900 (§. 406.* Geom.) *& ipsum corpus in ratione 1 ad* 4913000 (§. 578. 579. Geom.): *quod sane insigne est augmentum.*

PROBLEMA 42.

434. ***Microscopia ex sphærulis vitreis componere.***

RESOLUTIO.

Perquam commoda sunt micro- Tab.
scopia ***Johannis de Muschenbroek***, IIX.
quæ adeo primo loco describere Fig.
libet. 73.

1. Lamina plana AB ornatus gratia circa marginem excisa tubulo extus quadrato, intus cavo CD ita jungatur mediante clavo B, ut tubulus ope cochleæ E propius ad eam admoveri & ab ea rursus removeri possit.

2. Quare ut in eodem situ firmiter detineatur tubulus CD, beneficio ejusdem clavi B inter eum & laminam AB aptetur lamina elastica ex chalybe parata, qualis est altera FG in usum alium lateri ejusdem tubuli annexa, ut nempe beneficio cochleæ L lateraliter protrusus tubulus CD in situ suo firmiter persistat.

3. La-

3. Laminæ AB afferruminetur tubulus I cum brachiolo mobili IK, cui

4. Lamella orichalcea cum geminis limbulis *ab* frusto cornu nigricantis in modum hemisphærii excavato & foramine pertuso MN utrinque affixa infigatur ut

5. Sphærula microscopica intra binas lamellas O debite conclusa in limbos *ab* immitti & ad objectum adduci possit.

6. Per tubulum CD trajiciatur alius capulo P ex cornu nigricante confecto infixus, cui omnes styli superius (§. 421) descripti & Tab. VIII. Fig. 68. delineati immitti possunt cum suis objectis.

7. Ope hujus styli objectum attollatur & deprimatur, ope cochleæ L lateraliter ad lenticulam promoveatur, ope denique cochleæ E ad eandem admoveatur, donec oculo in Q applicato distincte cernatur.

8. Denique ut lumen peregrinum arceatur, machinamentum S in modum cistulæ ex orichalco effictum cum lamella variis foraminulis pertusa & circa clavum V mobili limbulis *ab* lamellæ corneæ substantiæ MN affixæ immittatur.

9. Et ut fluida accuratius contemplari liceat, instrumento X inseratur frustulum vitri Moscowitici & uncello firmetur, eique guttula affundatur, a microscopio avertenda, ne sphærulæ superficies sordibus inficiatur & pelluciditatem amittat.

10. Similiter vitrum Moscowiticum agglutinari potest circello Z, recepturum objecta exigua pellucida.

Aliter.

Elegans quoque est microscopii structura, quod manu Viri plurimum reverendi & Matheseos apprime periti *Godofredi Teuberi* manu elaboratum dono ipsius possideo. Ecce tibi eam: Tab. X. Fig. 74.

1. Ex orichalco parentur duæ lamellæ fere rotundæ AB & CD, quarum una AB stylo eburneo BE firmiter affixa, altera CD mediantibus apicibus D eidem infigi & cochlea F cum rotula G circa eundem axem mobili per foramen H trajecta alteri, quantum sufficit, admoveri potest.

2. In I aptetur sphærula exigua ex vitro confecta (§. 431).

3. Superficiei interiori ejusdem lamellæ AB affigatur lamina elastica M, ut objectum in situ conveniente immotum detineri possit.

4. Alterius vero lamellæ superficiei externæ affigatur orbiculus K variis foraminibus pertusus & circa axiculum fixum mobilis, ut per foramen in lamella CD e regione sphærulæ effectum nunc major, nunc minor luminis quantitas ad illuminandum objectum immitti queat.

5. Denique objecta, veluti insecta exigua, alæ majorum, lintea, fila, membranulæ &c. agglutinentur, vel sola saliva madefacta, orbiculo vitreo ex altera parte polito, ex altera saltem lævigato, &

6. Orbiculo cum objectis inter binas lamellas interjecto, ita ut sphærulæ respondeat objectum, & oculo ad sphærulam L applicato, ope rotulæ G cochleæ F affixæ objectum in situm convenientem disponatur, tamdiu scilicet sphærulæ admovendum, vel iterum ab eadem removendum, donec satis distincte cernatur.

SCHOLION.

435. *Qui structuras microscopiorum simplicium ex lenticulis constantium consideraverit paulo attentius; haud difficulter plures structuras ex sphærulis conficiendorum ipsemet comminiscetur: ut adeo mihi sufficiat eorum præcipua delineasse, quæ in meorum instrumentorum apparatu habentur.*

PROBLEMA 45.

436. *Microscopium aqueum conficere.*

RESOLUTIO.

1. Ex lamina orichalcea, cujus spissitudo $\frac{1}{12}$ circiter digiti adæquat, paretur orbiculus AB cum stylo longiore BD capulo corneo, ligneo, vel osseo E infigendo. Tab. IIX. Fig. 75.
2. In facie orbiculi antica paulo ultra dimidiam ejus spissitudinem excavetur segmentum sphæricum, cujus latitudo $\frac{1}{8}$ circiter digiti.
3. In facie postica fiat cavitas alia sphærica, cujus latitudo nonnisi $\frac{1}{16}$ unius digiti, dimidia nempe prioris.
4. In contactu cavitatum sphæricarum fiat exiguum foraminulum rotundum, cujus diameter $\frac{1}{30}$ unius digiti non excedit.
5. Guttula aquea ope aciculæ complanatæ aut per exiguum tubulum immittatur, quæ in foraminulo sphærulæ figuram exactam assumet.
6. Ut objecta ope omnis generis sty-

ſtylorum in apparatu microſcopii *Muſſchenbrœkiani* ſuperius (§. 421) deſcriptorum ad focum ſphærulæ decenter applicari & in ſitu ſuo immota detineri poſſint; brachium IFG cum tubulo K, qui ſtylos cum objectis recipit, in G affigatur, ope juncturarum I & F quaquaverſum mobile & ope cochleæ L ac rotulæ M laminæque chalybeæ elaſticæ H ad ſphærulam adducendum ac quovis in ſitu firmiter retinendum.

SCHOLION 1.

437. *Sphærulas aqueas in uſum microſcopii primus adhibuit in Anglia* Stephanus Gray (q). *Qui idem auctor eſt, guttulam fluidi, cui animalcula innatent, ſimili foramini immiſſam ad candelæ aut lunæ plenæ lumen ſine ullo microſcopio adhibito animalculum mirifice auctum exhibere, quia nempe radii a ſuperficie guttulæ interiori anterioris hemiſphærii ita reflectuntur, ut ſub eodem angulo in ſuperficiem hemiſphærii poſterioris, cui oculus applicatur, incidant, ac ſi ex foco ſphærulæ emanaſſent. Unde eodem modo ad oculum propagantur, ac ſi objectum extra ſphærulam in ejus foco conſtitueretur. Structuram tamen* Grayianam *microſcopii aquei immutare libuit, quia ea, quam expoſuimus, in reliquis quoque microſcopiis ſimplicibus, ſive ex ſphærulis, ſive ex lenticulis vitreis componendis perquam commoda exiſtit. Cæterum me non monente apparet, ſphærulam aqueam in ſuperioribus quoque microſcopiis omnibus adhiberi poſſe.*

SCHOLION 2.

438. *Solent etiam ſphærulæ vitreæ cavæ Q, quarum diameter dimidii circiter digiti, ſpiritu vini repleri & microſcopii loco adhiberi: ſed objecta non adeo multum amplificant* (§. 423). Tab. IIX. Fig. 76.

PROBLEMA 43.

439. *Microſcopium ex duabus lentibus componere.* Tab. X. Fig. 77.

RESOLUTIO.

1. Lenticula objectiva vel plano-convexa, vel utrinque convexa DE ſit minimæ ſphæræ ſegmentum, habeatque objectum AB extra focum F poſitum.
2. Lens ocularis GH utrinque convexa ſit majoris, non tamen nimis magnæ, ſphæræ ſegmentum & ita collocetur poſt objectum, ut, ſi fiat CF : CL = CL : CK, in K ſit focus lentis ocularis.
3. Denique fiat LK : LM = LM : LI.

Dico, ſi O fuerit locus, ubi objectum nudo oculo diſtincte videtur, oculum in I conſtitutum viſurum objectum AB diſtincte, ſitu inverſo æque auctum in ratione compoſita MK ad LK & LC ad CO.

(q) Philoſoph. Tranſact. n. 221. p. 281. n. 223. p. 353.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CF : CL = CL : CK *per hypoth.* erit CF : FL = CL : LK (*§.193. Arithm.*), adeoque radii ex puncto C emanantes in K uniuntur (§.214. 217), consequenter imago objecti situ inverso ibi delineatur (*§.224*). Est vero in K focus principalis lentis ocularis GH *per hypoth.* radii ergo ad singula objecti puncta pertinentes ad oculum remittuntur paralleli (§.203). Unde ex iis, quæ de tubis demonstrata sunt (§.358), liquet objectum videri distincte. *Quod erat unum.*

Quia radiorum a puncto B emanantium unus post refractionem incidenti ad sensum in directum jacet (§.243); sit radius iste GB seu GL. Unietur ergo post refractionem in lente oculari GH factam in puncto I, ita ut sit LK : LM = LM : LI (§.217). Sed ibi collocatur oculus *per hypoth.* Ergo punctum B videtur per radium GI. Quare cum C videatur per radium IC; objectum situ inverso apparet. *Quod erat secundum.*

Hinc vero ulterius patet, semidiametrum objecti CB videri sub angulo GIM quæ *per hypoth.* in O sub angulo COB vel AOC distincte cerneretur. Quodsi ergo NI ducatur ipsi AO parallela; erit angulus NIM ipsi AOC æqualis (§.233. *Geom.*), adeoque ducta GM ad IM perpendiculari, semidiameter objecti vera ad apparentem ut NM ad GM (§.209. *Optic.*), hoc est, sumtis GI & IN ad sensum æqualibus pro sinu toto, ut sinus anguli NIM seu COB ad sinum anguli GIL (*§.2. Trigon.*), consequenter in ratione composita sinus anguli COB ad sinum anguli GLI & sinus anguli GLI ad sinum anguli GIL (*§.178. 159. Arithm.*). Sed sinus anguli GLI ad sinum anguli GIL ut GI ad GL (*§.33. Trigon.*), hoc est, quia GI & IM, itemque GL & LM ad sensum æquales sunt, ut IM ad LM, & sinus anguli COB ad sinum anguli GLI seu CLB (*§.156. Geom.*) vel BLO ut BL ad BO (*§.35. Trigon.*), hoc est, quia BL & CL, itemque BO & CO, ob exiguam objecti semidiametrum CB, ad sensum æquales, ut GL ad CO. Ergo semidiameter vera ad apparentem in ratione composita IM ad LM & LC ad CO, hoc est, ob LK : LM = LM : LI *per demonstrata*, adeoque KM : LK = IM : LM (§.193. *Arithm.*), in ratione composita KM ad LK & LC ad CO. *Quod erat tertium.*

Si objectum longe ultra focum distat,

distat, imago ejus paulo ultra eundem a lente removetur (§. 213). Quare si objectum foco sit vicinum, imago ejus ultra focum principalem longius distabit (§. 37). In eadem vero objecti a foco principali remotioris distantia imago intervallo minore post lentem delineatur, si ea segmentum sphæræ minoris fuerit, quam ubi majoris segmentum extiterit (§. 214): ergo imago foco vicini in eadem distantia intervallo majore post lentem delineatur, si ea segmentum sphæræ minoris fuerit. Unde manifestum est, rationem KM ad LK fore minorem in illo casu (§. 205. *Arithm.*), consequenter cæteris manentibus iisdem etiam compositam ex KM ad LK & LC ad CO minorem esse in isto casu, quam si lenticula objectiva sphæræ majoris segmentum fuerit (§. 180. 159. *Arithm.*). Præstat adeo lenticulam objectivam valde exiguæ sphæræ segmentum esse. *Quod erat quartum.*

Denique si lens ocularis GH parvæ fuerit sphæræ segmentum, ratio ipsius KM ad LK, minor est, quam si magnæ segmentum extiterit (§. 203. *Arithm.*), consequenter cæteris manentibus iisdem in eodem casu compositam quoque ex KM ad LK & LC ad CO minorem esse (§. 189. 159. *Arithm.*). Objectum adeo magis amplificatur, si lens ocularis GH exiguæ fuerit sphæræ segmentum, *per demonstrata.* Quoniam tamen lens, quæ est segmentum sphæræ majoris, majorem imaginis partem subtendit, quam quæ segmentum minoris existit, in illo casu major campus uni obtutui patet, quam in altero. Præstat igitur lentem ocularem GH esse segmentum sphæræ nec nimis magnæ, nec nimis parvæ. *Quod erat quintum.*

COROLLARIUM 1.

440. Quo magis objectum per microscopium amplificatur, eo minor ejus pars uno obtutu comprehenditur.

COROLLARIUM 2.

441. Eidem lenti oculari jungi possunt successive diversarum sphæricitatum lenticulæ objectivæ, ut & objecta integra, sed minus amplificata, & ejus partes sigillatim tantum, sed multum auctas per idem microscopium contemplari liceat; quo in casu ob diversam imaginis distantiam LK tubum ductitium esse oportet, cui lentes immittuntur.

SCHOLION 1.

442. *Commendatur ratio subdupla, itemque subsesquisexta lentis objectivæ ad ocularem. Semidiametrum convexitatis in objectiva ad summum esse jubet*

bet Dechales (r) *digiti dimidii aut* ¾ *ejus; in oculari digiti integri, vel unius cum dimidio. Alii tamen vitrum objectivum trium digitorum, oculare digitorum sex admittunt.* R. P. Cherubin (s) *vitri objectivi semidiametrum facit* ¼, ⅓ *aut* ½ *digiti; semidiametrum vero vitri ocularis* 1⅓, *vel* 1½ *digiti.*

COROLLARIUM 3.

Tab. X. Fig. 77. 443. Quoniam per ea, quæ ad problema 33 (§. 376) demonstrata sunt, distantia imaginis LK a lente objectiva DE major est, si lenti objectivæ ante focum ejus jungatur utrinque concava; ex demonstratione propositionis præsentis colligitur, objectum magis amplificari, si inter lenticulam objectivam DE & ocularem GH concava dicta ratione ponatur.

SCHOLION 2.

444. *Præstantiam hujus microscopii prædicat* Cl. Johannes Michael Conradi (t); *usus lente objectiva utrinque convexa, cujus semidiameter 2 digitorum, apertura grano sinapi æqualis; lente utrinque concava 12, ad summum 16 digitorum, & lente oculari utrinque convexa 6 digitorum.*

COROLLARIUM 4.

445. Cum imago ad majorem distantiam projiciatur, quo propius lenticulæ objectivæ jungitur alia majoris sphæræ segmentum (id quod facillime non modo experiri, verum etiam ex superioribus principiis demonstrare licet); ex tribus lentibus microscopium componere licet, quod insigniter amplificet objecta.

COROLLARIUM 5.

446. Ex demonstratione propositionis præsentis liquet, objectum magis amplificari, si lens ocularis fuerit minoris sphæræ segmentum, sed campum visionis majorem esse, si eadem majoris sphæræ segmentum extiterit (§. 439). Quodsi itaque duæ lentes oculares, quorum altera majoris, altera minoris sphæræ segmentum, ita combinentur, ut per eas objectum valde vicinum, hoc est, non ultra focum primæ distans, videatur admodum distincte, & sic combinatæ jungantur lenticulæ objectivæ; objectum & valde auctum videbitur, & major erit campus visionis, quam si unica lente oculari utaris.

COROLLARIUM 6.

447. Magis adhuc amplificabitur objectum & major simul haberi poterit campus visionis, si & lens objectiva, & ocularis geminetur (§. 445. 446).

SCHOLION 3.

448. *Quoniam tamen objectum videtur obscurum, si lentes plures adhibeantur, quia pars aliqua radiorum in transitu per singulas lentes reflectitur; lentium multiplicatio probari nequit. Unde præstantissimum inter composita habetur, quod ex una lenticula objectiva & du-*

(r) Diopter. lib. 2. prop. 58. f. 720. Tom. 3. Mund. Math.
(s) Dioptr. Oculaire part. 3. c. 3. f. 217.
(t) im dreyfach gearteten Sehe-Strahle part. 3. c. 3. §. 78. p. 109.

& duabus ocularibus juxta Cor. 5. (§. 446) *componitur.*

SCHOLION 4.

449. Dechales (u) *pro microſcopio ex tribus lentibus componendo commendat lentem objectivam ⅓ vel ¼ digiti, lentem ocularem primam duorum digitorum aut digitorum duorum cum dimidio. Diſtare autem jubet lentes oculares intervallo 20 circiter linearum. Sed puto, diſtantiam optime per experientiam definiri eo, quem* Cor. 5. (§. 446) *expoſui, modo. Idem pro microſcopio 4 lentium laudat lentem objectivam 6 linearum, ocularem primam 21, ſecundam 18, tertiam 15 linearum. Deſcribit etiam* (x) *microſcopium* Demonconiſii *ex tribus lentibus compoſiti. Lens objectiva in eo erat digiti unius cum una circiter linea, ejus apertura lineæ unius cum dimidia; lens ocularis prima digitorum duorum cum dimidio, ab objectiva quindecim digitorum intervallo remota; lens ocularis altera digiti unius cum quinque lineis, diſtans ab oculari prima, uno digito & novem lineis; oculo dimidii digiti intervallo remoto.* Cl. Conradi (y) *teſtatur, ſe felici ſuccesſu fabricaſſe microſcopium ex lenticula objectiva digiti dimidii & duobus ocularibus valde vicinis digitorum quatuor. Excellentisſimum deprehendit, cum in locum lenticulæ objectivæ ſubſtitueret duas lentes utrinque convexas digitorum duorum aut unius cum dimidio ſe mutuo fere contingentes cum apertura vix lineæ dimidiæ.* Euſtachius de Divinis (z) *loco lentis objectivæ utrinque convexæ uſus eſt duabus lentibus plano-convexis, quarum convexitates ſe mutuo contingebant.* Johannes Franciſcus Grindelius ab Ach (a) *etiam pro utraque lente oculari ſubſtituit geminam utrinque convexam, quarum unius convexitas convexitatem alterius fere, non tamen prorſus contingit.* R. P. Zahnius (b) *microſcopium binoculum non ſine ſuccesſu conſtruxit, idque duplici modo, quod apud ipſum videri poteſt, cum magis curioſum, quam utile ſit. Nos aliquot microſcopiorum compoſitorum fabricam externam adhuc exponemus.*

PROBLEMA 44.

450. *Microſcopia compoſita ad obſervationes inſtituendas commoda conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Quodſi lentium ſitus immotus eſſe poteſt (qualis eſt in microſcopio trium lentium, quod *Anglicanum* appellari ſolet), tubus BH ex ligno tornetur, ita tamen ut Tab. X. Fig. 78.

(u) Dioptr. lib. 2. prop. 58. f. 721. Tom. 3. Mund. Mathem.
(x) Dioptr. lib. 2. prop. 30. Mund. Math. Tom. 3. fol. 705.
(y) im dreyfach gearteten Sehe-Strahle part. 3. c. 4. §. 82. p. 113. 114.
(z) Philoſoph. Trans. n. 42. p. 842.
(a) in Microgr. nova p. 7.
(b) in Oculo artific. fund. 3. ſynt. 5. c. 2. f. m. 706. 707.

ut ex tribus partibus ABCD, CDEF & EFH constet, mediantibus cochleis inter se jungendis.

2. Lenticula objectiva aptetur in H, ocularis prima in EF, altera in CD: oculus vero applicetur in AB. Unde data per problema antecedens & ejus corollaria structura interna longitudo partium tubi facile definitur.

3. Pars superior ABCD operculo muniatur, ne lens ocularis CD pulvere conspersa vitium contrahat.

4. Pars inferior EH in cochleam desinat, qua mediante intra fulcrum firmari & lenticula objectiva nunc objecto admoveri, nunc ab eodem removeri possit, prout usus postulaverit.

5. Orbiculus I cum brachiolo circa centrum S mobilis, cui objecta imponenda, alteram superficiem habeat albam, alteram nigram, quia objecta clara ac pellucida nigræ, objecta vero obscurioris coloris albæ imponi consultum est.

6. In R affigatur cum brachio RP ex variis articulis composito lens utrinque convexa Q annulo orichalceo conclusa ad objectum vel lumine solis, vel candelæ aut lampadis nocturno tempore illuminandum.

7. Quodsi situs lentium mutabilis esse debet, tubus ductitius ex charta construendus, quemadmodum supra probl. 29 (§. 337) docuimus.

8. Si tubum fulcro firmiter affixum esse malueris, orbiculus I microscopio AB circa cochleam L in gyrum acto lenticulæ objectivæ propius admovendus. Tab. X. Fig. 79.

Aliter.

1. Fiat tubus ductitius ABC chartaceus (§. 337) eidemque in D cochlea orichalcea aptetur, ut lenticulæ oculares diversæ sphæricitatis ibidem firmari possint, prout magis, aut minus amplificari debet diameter objecti (§. 441), tum etiam ut tubus microscopicus AE ipse ad pedamentum suum firmari queat. Tab. X. Fig. 80.

2. Eum itaque in finem paretur ex orichalco annulus D cochlea fœmina instructus & laminæ EGH ad angulum rectum incurvatæ cohærens. Eidem vero laminæ afferruminetur in H cochlea fœmina alia, quæ

3. Cochleam I globuli orichalcei K intra matricem M mobilis recipiat, cohleola L impediente, ne

ne tubus brachio forsan impingente vacillet.

4. Jam ut objectum lenticulæ objectivæ admoveri possit, quantum sufficit; ex lamina orichalcea fiat tubulus N mediante cochlea nunc coarctandus, nunc laxandus, prout usus postulaverit.

5. Eidem afferruminentur duæ laminæ O exiguo intervallo a se invicem distantes, inter quas immittendum brachium perforatum annuli Q cum orbiculo vitreo, mediante cochlea V in hoc situ firmandum. Imponuntur autem orbiculo vitreo objecta pellucida & fluidorum guttulæ, in quibus animalcula observare libuerit.

6. Ad objecta alia applicanda inservit orbiculus S, cujus altera superficies candida, altera nigra, & acicula *d*: quem in finem non modo stylus *d*S huc illucque protrudi & vi lamellæ chalybeæ elasticæ *e* in situ suo firmiter retineri, sed & sustentaculum styli circa axem suum moveri potest.

7. Si circulationem sanguinis in pisciculo observare volueris, instrumentum TW annulo Q aptandum.

8. Ad illuminandum objecta inservit lens utrinque convexa X mediante brachio plicatili Y in omnem situm facile disponenda & ope cochleæ P ad pedamentum microscopii firmanda.

9. Columellæ eburneæ partes duæ in Z ita jungantur, ut microscopium, si commodum fuerit, inclinari possit.

10. Basis denique triangularis *abc* ita construenda, ut inspectio figuræ docet, quo perinde ac partes reliquæ, si quando commodum fuerit visum, removeri ac in capsa modicæ magnitudinis totum instrumentum reponi & de loco in locum transportari possit.

11. Quomodo lentes in tubo sint disponendæ, ex superioribus (§. 439) satis manifestum.

Aliter.

Cum in structura præcedente satis ingeniosa id desiderari possit, quod distantia objecti a lente objectiva paulo difficilius inveniatur, eidem jungere placet aliam artificis insignis Angli *Marschalli*, ubi directio objecti admodum expedita. Tab. IX. Fig. 81.

1. Tubi, cui lentes oculares in A & B, immittuntur, objectiva vero in C aptatur, constructio partim

tim ex probl. 29 (§. 337), partim ex inspectione figuræ satis manifesta.

2. Columella DE mediante globo E intra matricem F mobilis, ut microscopium in quemlibet situm disponere liceat.

3. Eadem in tot partes 1, 2, 3, 4, 5 &c. divisa, quot sphæricitatum lenticulis uti libuerit in contemplandis objectis, ut citra difficultatem distantia objecti a lente objectiva inveniri possit.

4. Cum vero ita non satis exacte determinetur, mediante cochlea GH tubus objecto adeo prope admoveri potest, quantum sufficit.

5. Objecta vel imponantur orbiculo I, vel infigantur aut aptentur ad instrumenta illis similia, quæ supra (§. 421) descripsimus, stylo eorum per tubulum LM trajecto.

6. Denique ad illuminandum objectum in convenientem situm disponatur lens utrinque convexa NO eo modo ad pedamentum microscopii aptanda, qui ex inspectione figuræ satis manifestus.

SCHOLION.

451. *Alias microscopiorum fabricas excogitarunt* R. P. Philippus Bonanni (c) & Cl. Christianus Gottlieb Hertelius (d): *sed prolixum nimis foret omnes describere.* Hertelianum *describitur etiam in Actis Eruditorum* (e).

PROBLEMA 45.

452. *Microscopium reflectens construere.*

RESOLUTIO.

1. Prope focum speculi concavi AB collocetur objectum minutum C, ut imago ejus ipso major formetur in D (§. 253. *Catoptr.*). Tab. X. Fig. 82.
2. Jungatur speculo lenticula utrinque convexa EF, ita ut imago D fit in foco ejus.

Videbit ergo oculus imaginem inversam (§. 252. *Catoptr.*) seipsa majorem atque distincte (§. 407), consequenter objectum magis auctum apparebit, quam per lenticulam solam.

SCHOLION.

453. *Microscopii hujus inventor est vir incomparabilis* Isaacus Newtonus (f). *Sed verendum videtur, ne objecta appareant minus clara, nisi quis speculo concavo metallico nitorem conciliare, conciliatum conservare docuerit: quo facto gemi-*

(c) Micrograph. curios. c. 4. p. 26 & seqq.
(d) in novo invento Microscopii.
(e) Mense Julio. A. 1713. p. 316. & seqq.
(f) Philosoph. Transact. n. 80, p. 380.

geminus successus sperandus, quem experimur in telescopio catadioptrico (§. 380).

PROBLEMA 46.

454. *Telescopium quodlibet in microscopium convertere.*

RESOLUTIO.

Quia imago objecti foco vicini longiori intervallo a lente distat, quam remoti (§. 226), eadem vero in foco vitri ocularis constitui debet (§. 419); telescopium erit microscopium, si lentem objectivam majori intervallo ab oculari removeris, quod per experientiam haud difficulter definitur.

COROLLARIUM.

455. Quia distantia imaginis varia pro diversa objecti a foco distantia (§. 226), magnitudo vero imaginis major est, si ejus a lente objectiva distantia major (§. 245); eundem tubum in microscopia diversimode diametrum objecti multiplicantia successive convertere licet (§. 439).

PROBLEMA 47.

456. *Microscopia optima parare vel sibi comparare.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam multiplex refractio in transitu luminis per plures lentes officit visioni claræ, lentibus quippe singulis aliquam luminis partem reflectentibus; microscopia simplicia ceteris paribus præferantur compositis & minus composita magis compositis.

2. Quia ad distinctam visionem non modo requiritur, ut imago sit magna, verum etiam ut sit satis clara; lenticulæ accurate elaboratæ præferantur sphærulis (§. 426), inprimis cum clariora sphærulis exhibeant objecta ob polituram eximiam, etiamsi non magis quam sphærulæ amplificent objecta (§. 431).

3. Lenticulæ omni diligentia elaboratæ ad contemplationem eorundem objectorum adhibeantur & quæ objecta magis clare & distincte ceteris repræsentant, seligantur.

4. Observationes propriæ ope alicujus microscopii factæ comparentur cum observationibus ab Autoribus factis, quorum microscopia & in observando dexteritas celebrantur: ita enim innotescet, quam prope ad illorum microscopia accedant ea, ex quibus aliquod seligendum.

SCHOLION.

457. *Hoc pacto* Leeuwenhœkius, *qui in observationibus microscopicis*

 parem

parem vix habet, superiorem neminem, microscopia exquisitissima adeptus, non aliis unquam usus nisi lenticularibus iisque simplicibus (g).

CAPUT VIII.

DE MACHINIS QUIBUSDAM ALIIS, PRÆSERTIM CATOPTRICO-DIOPTRICIS.

DEFINITIO 34.

458. Per *machinam catoptrico-dioptricam* intelligo talem, quæ ex speculis & lentibus componitur.

SCHOLION.

459. *Tales igitur sunt, quas superius jam descripsimus, cameræ obscuræ, in quibus speculorum ope species objectorum eriguntur* (§. 234), *lucerna lumen valde intensum projiciens* (§. 208), *tubus* Hugenianus (§. 360), *telescopium reflectens* Newtonianum (§. 376) & *microscopium reflectens itidem* Newtonianum (§. 452).

DEFINITIO 35.

460. *Polemoscopium* est tubus recurvus ad spectanda objecta oculo non in directum jacentia idoneus.

SCHOLION.

461. *Inventor ejus est* Johannes Hevelius (h), *qui* A. 1637. *in id incidit & hoc nomen eidem imposuit, quia in bello ejus esse potest usus.*

DEFINITIO 36.

462. *Vas hydromanticum* est vas aqua plenum, imagines objectorum foris existentium in aqua innatantes exhibens.

SCHOLION.

463. *Spectaculi hujus jucundi inventor est* R. P. Zahn *sæpius jam nobis laudatus* (i).

DEFINITIO 37.

364. *Laterna magica* est laternæ quoddam genus, imagines exiguas, in opposito pariete quantumlibet auctas depingens.

DE-

(g) Philos. Transact. num. 380. p. 451.
(h) Selenograph. Prolegom. f. 24. & seqq.
(i) Ocul. Artific. fund. 3. Synt. 5. c. 1. tech. 7. f. m. 694.

DEFINITIO 38.

465. *Heliscopium* est tubus astronomicus, per quem solem contemplari licet.

DEFINITIO 39.

466. *Polyoptrum* est tubus, per quem objectum videtur multiplicatum, sed minutum.

PROBLEMA 48.

467. *Helioscopium construere.*

RESOLUTIO.

Quoniam per vitra colorata citra oculi læsionem solem intueri licet; non alia re opus est, quam ut lens tam objectiva, quam ocularis ex vitro colorato fiat, illa e. gr. ex rubro, hæc ex viridi. Necesse autem est, ut vitra sint satis pellucida, nec inæqualiter colorata.

Aliter.

Hevelius, cum intelligeret, raro vitra colorata pellucida & æqualiter colorata haberi posse, duo vitra plana quomodolibet colorata interjecta charta cum exiguo foramine vel filo, vel glutine (quo in poliendis vitris utimur) firmiter connectere & in tubo ibidem, ubi oculus admovetur, applicare maluit (k).

Aliter.

Vitrum oculare tubi astronomici super candela accensa fuligine inficiatur: ita eum in helioscopium convertes. Vel præstat vitrum fuligine infectum alteri puro jungere, annulo chartaceo crassiori interjecto, & inter oculum & vitrum oculare constituere.

PROBLEMA 49.

468. *Polemoscopium construere.*

RESOLUTIO.

Telescopium quodlibet erit polemoscopium, si tubus fiat recurvus instar siphonis rectanguli AB DM & inter lentem objectivam AB & ocularem primam GH (si plures fuerint) ita collocetur speculum planum in K, ut ipsum quidem ad horizontem inclinetur sub angulo semirecto, imago vero reflexa sit in foco ocularis vitri GH. Ita nimirum objecta lenti AB opposita perinde apparebunt, ac si speculum K abesset & lens objectiva cum objectis in directum jaceret vitris ocularibus, vi eorum, quæ superius (§. 360) demonstrata sunt. Tab. X. Fig. 83.

COROLLARIUM.

469. Quodsi in O introspicere libuerit, non in M, speculum planum alterum N adjungi potest eo, quem supra exposuimus (§. 360) modo.

(k) Selenogr. Prolegm. f. 25.

PROBLEMA 50.

Tab. IX. Fig. 84. 470. *Vas hydromanticum construere.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vas cylindricum ABCD per diaphragma vitreum EF non prorſus politum in duas cavitates diviſum.
2. In G applicetur lens utrinque convexa & in H inclinetur ſpeculum planum figuræ ellipticæ ſub angulo ſemirecto, ſitque IH & HG diſtantia foci lentis G paulo minor, ita ut locus imaginum objectorum per eam radiantium ſit intra cavitatem vaſis ſuperiorem.
3. Cavitas inferior intus denigretur, ſuperior autem aqua limpida repleatur.

Quodſi jam in loco ſubobſcuro vas collocetur ita ut lens objecto a ſole colluſtrato obvertatur; imaginem ejus in aqua natantem videbis (§. 233).

SCHOLION.

471. *Vas hydromanticum eſſe quandam cameræ obſcuræ ſpeciem, ſatis liquet, ſi ejus ſtructuram cum ſtructura hujus* (§. 233) *conferre libuerit.*

PROBLEMA 51.

Tab. X. Fig. 85. 472. *Polioptrum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. In vitro utrinque plano AB, cujus diameter 3 circiter digitorum, excaventur ſegmenta ſphærica, quorum latitudo vix quintam digiti partem adæquat. Quodſi enim vitrum ſufficienter ab oculo removeris, donec cavitates omnes uno obtutu comprehendas, veluti per totidem vitra cava, objectum idem toties videbis, quot ſunt cavitates, idque valde minutum (§. 293).
2. Vitrum hoc objectivum aptetur in tubo ABCD, apertura AB diametro ejus æquali, altera vero CD tanta exiſtente quanta latitudo vitri ocularis (c. gr. unius circiter digiti). Longitudo vero tubi AC tanta eſſe debet, quanta eſt diſtantia vitri ocularis ab objectivo, per experientiam facile definienda.
3. In CD aptetur vitrum oculare convexum vel ejus loco meniſcus, habens diſtantiam foci principalis paulo majorem longitudine tubi, ut nempe punctum, ex quo radii poſt refractionem in lente objectiva factam divergunt, in foco ipſius exiſtat.

Quodſi oculum ad vitrum oculare propius admoveris, objectum unicum toties videbis, quot cavitates vitro objectivo ſunt intritæ, ſed magnitudine minuta.

PRO-

PROBLEMA 52.

Tab. XI. Fig. 86. 473. *Laternam magicam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ex lamina ferrea ſtanno obducta paretur laterna ABCD cum tubo ductitio FG, prorſus ut in probl. 19 (§. 208).
2. In H conſtituatur ſpeculum metallicum concavum e diametro unius pedis ad ſummum, ad minimum e diametro 4 digitorum. Vel ejus loco prope extremitatem tubi aptetur lens convexa, quæ ſit ſegmentum ſphæræ exiguæ, cujus ſcilicet diameter paucorum digitorum.
3. In foco ſpeculi concavi vel lentis collocetur lampas L cum ellychnio goſſypino ſpisſiore.
4. Tubo ad januam laternæ afferruminato inſeratur lens utrinque convexa, quæ ſit minoris ſphæræ ſegmentum, ſeu focum habeat 3 circiter digitis diſtantem.
5. Tubi ejusdem pars extrema FM ſit quadrata & crena latiore utrinque inſtructa, per quam asſerculus quadratus oblongus NO commode trajici & huc illucque moveri posſit.
6. In asſerculo fiant foramina rotunda P unius vel alterius digiti, ita tamen ut in parte averſa cavitates ſint quadratæ.
7. Pro amplitudine foraminis delineetur in vitro plano quadrangulari ac tenui orbiculus & in eo coloribus aqueis ac pellucidis pingatur imago quæcunque.

Quodſi imaginem cavitati asſerculi immisſam & inverſam ita conſtituas, ut non procul a foco lentis I diſtet; in oppoſito pariete albo prodigioſa magnitudine ſuis cum coloribus ſitu erecto in loco obſcuro depingetur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lampade in foco ſpeculi concavi vel vitri alicujus convexi collocata radii paralleli propagantur (§. 224. *Catoptr.* & §. 203. *Dioptr.*), imago multo lumine illuſtratur (§. 213. *Catoptr.* & 86. *Opt.*), adeoque multos radios in lentem I emittit. Quoniam vero prope focum lentis I collocatur, *per hypoth.* ex demonſtratione probl. 43. (§. 439) manifeſtum eſt, quod picturæ inverſæ imago inverſa ipſaque multo major poſt refractionem in lente I factam in oppoſito pariete formari debeat, tanto nempe major, quo minoris ſphæræ ſegmentum lens fuerit, & quo propius pictura foco

foco lentis admovetur. In loco igitur obscuro pictura prodigiosa magnitudine & satis clare repræsentatur. *Q. e. d.*

Aliter.

Factis singulis, quæ ante præcepimus, tubo ductitio FG inseratur lens altera convexa K, quæ sit paulo majoris sphæræ segmentum quam I. Quodsi enim pictura lenti I propius admoveatur, quam in distantia foci, radii divergentes ita propagantur, ac si ex P emanarent. Quare si lens K ita constituatur, ut locus P sit foco ejus valde vicinus, eodem, quo ante, modo patet, imaginem pictura multo majorem in opposito pariete exhibitum iri.

SCHOLION 1.

474. *Ad lumen intendendum specula præferuntur lentibus, quia focus minori intervallo removetur a speculo quam a lente* (§. 209. Catoptr. & §. 168. 193. Dioptr.).

SCHOLION 2.

475. Dechales (l) *lentem primam* I *probat, si fuerit e diametro 2, 4 aut 5 digitorum & ad alteram* K *in ratione subdupla, e. gr. si* I *fuerit 5 digitorum, ut* K *sit 10 digitorum. Speculi diameter juxta eundem 2 digitorum esse debet.* Zahnius (m) *lentem* I *jubet esse ex diametro $\frac{8}{10}$ unius pedis & lentem* K *ex diametro unius pedis & $\frac{1}{2}$; in majoribus illam ex diametro unius pedis & $\frac{1}{4}$, banc ex diametro pedum duorum & $\frac{1}{4}$. Enimvero in genere notandum est, quæcunque in instrumentis dioptricis de vitrorum proportionibus dicta sunt, non ita præcipi, quasi iis stricte sit inbærendum, sed ut facilius ad vitrorum commodam combinationem in praxi pervenire detur.*

SCHOLION 3.

476. *Quodsi animalcula quædam eo artificio includas, quod supra in microscopiorum doctrina exposuimus* (§. 421), *vel etiam objecta alia transparentia selenitidis folio agglutinata in imaginum loca substituas; laterna magica microscopii vicem præstabit.*

SCHOLION 4.

477. *Denique si eundem tubum cum suis vitris convexis & imaginibus ad foramen cameræ obscuræ applices; in ea quoque repræsentationes ad lumen solare fieri poterunt.*

CAPUT

(l) Dioptr. lib. 2. c. 20. f. 608. Tom. 3. Mund. Math.
(m) in Oculo artific. fund. 3. synt. 5. c. 5. f. 728.

CAPUT IX.

DE PERSPICILLIS ET DIOPTRICA ANALYTICA.

DEFINITIO 40.

478. *Perspicilla* dicunter lentes dioptricæ, quibus utimur ad corrigenda optica oculorum vitia. Dicuntur etiam *conspicilla*.

THEOREMA 78.

479. *Myopibus conveniunt perspicilla concava, sive plano-concava fuerint, sive utrinque concava.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam objecta remota per radios ad sensum parallelos (§. 93. *Optic.*), vicina per divergentes in oculum radiant (§. 59. *Optic.*); myopes vero vicina distincte, remota nonnisi confuse vident (§. 384. *Optic.*); iidem non vident distincte nisi per radios divergentes, confuse vero per parallelos. Quamobrem cum lentes tam plano-concavæ (§. 280), quam utrinque concavæ radios parallelos per refractionem efficiant divergentes (§. 282), ut perinde sit ac si ab objecto vicino venirent; myopes per perspicilla cava, sive fuerint plano-concava, sive utrinque concava, objecta remota distincte videre possunt. Medetur itaque perspicillum istiusmodi ipsorum vitio (§. 384. *Optic.*), consequenter myopibus conveniunt perspicilla concava, sive plano-concava fuerint, sive utrinque concava. *Q. e. d.*

(Wolfii Math. Tom. 3.)

DEFINITIO 41.

480. *Magis myops* dicitur, qui ad minorem distantiam objectum videt distincte.

SCHOLION.

481. *Ponamus distantiam, ad quam collocatum objectum distincte videtur primum a Titio, esse ad distantiam, qua ab oculo Sempronii idem removeri debet, ut distincta evadat visio, in ratione dupla; erit Sempronius magis myops, quam Titius.*

THEOREMA 79.

482. *Magis myopi conveniunt perspicilla minoris diametri seu radii; at minus myopi perspicilla majoris diametri seu radii.*

DEMONSTRATIO.

Perspicilla enim minoris diametri aut radii radios parallelos, adeoque

eoque ab objecto remoto advenientes (*§.93.Optic.*), efficiunt magis divergentes, quam quæ sunt diametri aut radii majoris (§.280. 284). Quamobrem cum magis myops ad minorem distantiam objecta videat distincte (*§.480*), adeoque magis myopem per radios magis divergentes distincte videre constet, quam minus myopem; perspicilla minoris diametri conveniunt magis myopi, quæ vero sunt majoris diametri minus myopi. *Q.e.d.*

PROBLEMA 53.

483. ***Determinare semidiametrum perspicilli utrinque concavi, vel diametrum plano-concavi pro myope quocunque.***

RESOLUTIO.

Removeatur objectum aliquod ab oculo, quoad absque ullo incommodo distincte videri potest, ut appareat, quanto distare ab oculis intervallo debeat objectum, ut distincte a myope, cujus vitio mederi volueris, videri possit.

Dico, hanc ipsam distantiam esse diametrum perspicilli plano-concavi, vel semidiametrum utrinque concavi oculo myopis applicandi.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim objecta remota radiant per parallelos radios (*§. 93. Optic.*), si perspicillum fuerit plano-concavum, punctum dispersus refractorum diametri concavitatis intervallo ab eodem distat (*§.280*); si vero fuerit utrinque concavum, idem semidiametri concavitatis intervallo abest (*§.285*). Enimvero in casu priori distantia objecti a myope distincte videndi diametro concavitatis, in posteriori autem semidiametro ejusdem æqualis *per construct.* Ergo objectum remotum a myope in casu priore distincte videtur per perspicillum plano-concavum; in posteriore autem per utrinque concavum. *Q.e.d.*

SCHOLION.

484. *Quodsi perspicillum ponatur inæqualiter concavum, diameter concavitatis unius pro arbitrio assumenda, quemadmodum ex problemate sequente apparet.*

PROBLEMA 54.

485. ***Data distantia, ad quam myops distincte videt objectum, invenire specillum utrinque inæqualiter concavum myopi conveniens ad distincte videndum objecta remota.***

RESOLUTIO.

Sit distantia data $= d$, semidiameter concavitatis unius $= x$ alterius $= y$.

Quo-

Quoniam illa distantia æqualis est distantiæ puncti dispersus, quemadmodum ex demonstratione propositionis præcedentis patet; erit (§. 284)

$$x + y : 2x = y : d$$

$$2xy = dx + dy$$

$$2xy - dy = dx$$

$$y = \frac{dx}{2x - d}$$

Quodsi ergo semidiameter concavitatis unius pro arbitrio assumatur, altera y per regulam trium invenitur inferendo scilicet:

Ut differentia distantiæ, ad quam myops distincte videt objecta, a diametro concavitatis unius ad eandem distantiam; ita semidiameter istius concavitatis ad semidiametrum concavitatis alterius.

SCHOLION.

486. *Quoniam quæ de perspicillis Presbytarum demonstranda sunt, ex theoria superiori non sine ambagibus deducerentur; igitur placet præmittere, quæ ad Dioptricam analyticam spectant. Etsi enim in superioribus quoque usi fuerimus hinc inde analysi ad demonstrationes vel contrahendas, vel facilitandas; potest tamen focus, & punctum dispersus generali quadam formula determinari, ut specialia theoremata ex eadem per modum Corollariorum deducantur.*

PROBLEMA 55.

487. *Invenire distantiam foci a lente Ef, in quo radii post duplicem refractionem in lente utrinque, sed inæqualiter convexa concurrunt.* Tab. XL. Fig. 86.

RESOLUTIO.

Sit axis lentis KL recta AF, radius incidens AD centrum convexitatis inferioris C, superioris c. Sit F punctum, ad quod tendit radius post primam refractionem in D passam, f vero focus, seu punctum, in quo post alteram refractionem in H factam axi occurrit. Ex centro c demittantur in radium in superiorem convexitatem incidentem perpendiculares cP, & cQ, itemque ex centro C in radium semel refractum FM & bis refractum fN perpendiculares CM & CN; tandem ex H & D perpendiculares ad axem DI & GH. Quoniam radius AD ab axe parum distat, adeoque angulus A contemtibilis parvitatis existit; erit ID etiam ad AD & GH ad FH perpendicularis. Ex eadem ratione AD = AB = AI, DF = IF = BF, HF = EF = GF & Hf = Ef = Gf.

Sit jam $AB = d$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = f$, $BF = x$, $EF = v$, $Ef = z$, $cP = r$, CM

CM=t: erit Ac=$d+a$, FC=$v+b$, fC=$x-a=b+z$.

Quoniam ſumto cD pro ſinu toto cP eſt ſinus anguli inclinationis cDP (§.12. *Dioptr.* & §.2. *Trigon.*) & cQ ſinus anguli refracti cDF (§.14. *Dioptr.* & §.2. *Trig.*); erit cP:cQ=3:2 (§.26), adeoque cQ=$\frac{2}{3}r$. Similiter cum CM ſit ſinus anguli inclinationis in egreſſu CHM & CN ſinus anguli refracti ibidem CHN; adeoque CM:CN=2:3 (§.41.); erit CN =$\frac{3}{2}t$.

Quia ID & cP perpendiculares ad eandem tertiam AP *per demonſtr.* erunt inter ſe parallelæ (§. 256. *Geom.*), adeoque (§. 268. *Geom.*)

$$Ac : cP = AI : ID$$
$$d+a : r = d : \frac{dr}{d+a}$$

Similiter quia ID & cQ parallelæ (§. 256. *Geom.*); erit (§. 268. *Geom.*),

$$FI : ID = Fc : cQ$$
$$x : \frac{dr}{d+a} = x-a : \frac{2}{3}r$$

Unde $\frac{drx-adr}{d+a} = \frac{2}{3}rx$

$$3drx-3adr = 2rdx+2arx$$

$$drx-3adr = 2arx$$

$$drx-2arx = 3adr$$

$$x = \frac{3ad}{d-2a}$$

Porro cum CM ſit ipſi GH parallela (§. 256. *Geom.*); erit (§. 268. *Geom.*)

$$FC : CM = FG : GH$$
$$v+b : t = v : \frac{tv}{b+v}$$

Denique quia CN ipſi GH parallela (§. 256. *Geom.*); erit (§. 268. *Geom.*)

$$fC : CN = fG : GH$$
$$b+z : \frac{3}{2}t = z : \frac{tv}{b+v}$$

$$\frac{3}{2}tz = \frac{btv+ztv}{b+v}$$

$$3btz+3tzv = 2btv+2tzv$$

$$3bz = 2bv-zv$$

$$\frac{3bz}{2b-z} = v = x-f$$

$$\frac{3bz}{2b-z}+f = x = \frac{3ad}{d-2a}$$

$$3bdz-6abz+(2b-z)(df-2af) = 6adb-3adz$$

h.e.

h. e. $3bdz - 6abz + 2bdf - dfz - 4abf + 2afz = 6adb - 3adz$

$$3adz + 3bdz - 6abz + 2afz - dfz = 6adb + 4abf - 2bdf$$

$$z = \frac{6adb + 4abf - 2bdf}{3ad + 3bd - 6ab + 2af - df}$$

Quodsi crassities lentis f respectu radiorum a & b atque distantiæ puncti radiantis d fuerit parvitatis contemnendæ, quemadmodum plerumque accidit & in demonstrationibus dioptricis supponi solet; erit

$$Ef = \frac{6adb}{3ad + 3bd - 6ab} = \frac{2adb}{ad + bd - 2ab}$$

COROLLARIUM 1.

488. Si lens fuerit utrinque æqualiter convexa, erit $a = b$, adeoque $Ef = \frac{2a^2d}{2ad - 2aa} = \frac{ad}{d - a}$. Unde $d - a : d = a : Ef$, hoc est, ut differentia semidiametri convexitatis a distantia, quam habet punctum radians a lente, ad hanc ipsam distantiam, ita semidiameter convexitatum ad distantiam foci a lente.

SCHOLION.

489. *Cum semidiameter convexitatum sit distantia foci principalis, punctum vero radians in lentem radiet per radios divergentes; corollarium hoc etiam ita efferri potest:* ut differentia distantiæ foci principalis a distantia puncti divergentiæ ad distantiam priorem, ita distantia posterior ad distantiam foci minus principalis.

COROLLARIUM 2.

490. Quodsi punctum radians minore intervallo a lente distet quam semidiametri convexitatum; erit $a > d$, adeoque $ad : (d - a)$ quantitas negativa (§. 33. *Analys.*), consequenter focus cadit in eam partem, ad quam est punctum radians, adeoque virtualis est, seu radii ex eodem dispergantur post duplicem refractionem. Est vero quemadmodum ante (§. 488): ut differentia semidiametri convexitatum seu distantiæ foci principalis & distantiæ puncti radiantis ad distantiam puncti radiantis ita distantia foci parallelorum ad distantiam puncti dispersus seu foci virtualis minus principalis.

COROLLARIUM 3.

491. Si lens fuerit plano-convexa, semidiameter convexitatis unius b evadit infinita, adeoque in formula $\frac{2abd}{ad + bd - 2ab}$ quantitas ad respectu ceterarum evadit infinite parva, consequenter nihilo æqualis (§. 3. *Analys. infin.*). Habemus adeo pro distantia foci radiorum ab axe divergentium seu minus principalis $\frac{2abd}{bd - 2ab}$

seu $\frac{2ad}{d-2a}$. Quamobrem & in hoc casu ut differentia diametri convexitatis a distantia puncti divergentiæ seu puncti radiantis ad hanc ipsam distantiam ita diameter convexitatis, hoc est, distantia foci principalis ad distantiam minus principalis; quemadmodum supra demonstravimus (§. 214).

COROLLARIUM 4.

492. Quod si etiam hic punctum radians per radios divergentes fuerit inter lentem & focum principalem seu a lente minore intervallo distet, quam focus principalis; erit $2a > d$ consequenter patet ut paulo ante formulam esse negativam, adeoque post duplicem refractionem radios dispergi. Est autem denuo, ut differentia distantiæ puncti radiantis a diametro convexitatis seu distantia foci principalis ad distantiam priorem, ita diameter convexitatis seu distantia foci principalis ad distantiam puncti dispersus, ex quo post duplicem refractionem divergunt radii, seu distantiam foci virtualis minus principalis.

COROLLARIUM 5.

493. Sive igitur lens fuerit plano-convexa, sive utrinque æqualiter convexa, radii ex puncto inter lentem & focum principalem in axe constituto divergentes post duplicem refractionem ita dispergun-tur, ut distantia puncti dispersus sit ad distantiam foci principalis, uti distantia puncti divergentiæ ad differentiam ejus a distantia foci principalis (§. 490. 492. *Dioptr.* & §. 173. *Arithm.*), adeoque lentium convexarum, sive plano-convexæ, sive utrinque æqualiter convexæ fuerint, ea est proprietas, quod radios ex vicinia advenientes ita inflectant ac si e puncto remotiori emanassent.

SCHOLION.

494. *Atque hæc est illa ipsa proprietas, qua nititur usus perspicillorum convexorum pro presbytis: quæ cum per Dioptricam analyticam citra difficultatem pateat, ex principiis autem superioribus difficulter demonstretur, quemadmodum ex* Hugenii *demonstratione synthetica palam fit* (n); *analytice demonstrari debuit, ut rectius pateat, quam amplus sit Dioptricæ analyticæ usus, & quantum conducat illis, qui brevi labore omnem theoriam complecti voluerint.*

COROLLARIUM 6.

495. Quoniam $-b$ est radius convexitatis inferioris CE, si b supponatur quantitas infinita, convexitas lentis plano-convexæ puncto radianti opponitur. Quod si vero a seu semidiameter convexitatis superioris cB fuerit infinita, superficies lentis plana objecto obvertitur. In casu posteriori cum distantia foci minus principalis sit $2bd:(d-2b)$ & ubi $2b > d$, focus minus principalis tantum-modo

(n) Dioptr. prop. 20. p. 67. & seqq. Opusc. posth.

modo virtualis est; perinde esse apparet, sive lentis plano-convexæ planities, sive convexitas puncto radianti, ex quo radii divergunt, obvertatur (§. 49. & seqq.).

COROLLARIUM. 7.

496. Si vitrum fuerit utrinque planum, erit uterque radius convexitatis infinitus, hoc est, tam a, quam $b = \infty$, consequenter foci distantia $= \frac{2abd}{-2ab} = -d$. Cadit adeo ob signum negativum focus versus eam partem, ad quam est punctum radians, adeoque nonnisi virtualis est, & distantia ejusdem a vitro est æqualis distantiæ puncti radiantis, hoc est, radii post refractionem adhuc ex eo puncto divergunt, ex quo ante refractionem divergebant, consequenter situs eorum ad se invicem per refractionem in lente non immutantur.

COROLLARIUM 8.

497. Si radii sint paralleli, distantia puncti radiantis d infinita evadit, adeoque $2ab$ respectu quantitatum ceterarum evanescit, consequenter distantia foci principalis $\frac{2abd}{ad+bd} = \frac{2ab}{a+b}$, hoc est, summa semidiametrorum convexitatis est ad diametrum alterutram sicuti semidiameter altera ad distantiam foci principalis, sicuti supra demonstratum (§. 189).

COROLLARIUM 9.

498. Quodsi porro lens fuerit utrinque æqualiter convexa; hoc est, si $a = b$; erit distantia foci principalis $= \frac{2a^2}{2a} = a$, hoc est, semidiametro convexitatis æqualis, quemadmodum itidem supra evicimus (§. 193).

COROLLARIUM 10.

499. Si vero fuerit semidiameter alterutra veluti b infinita, erit distantia foci principalis $= \frac{2ab}{b} = 2a$, vel si a ponatur infinita $= \frac{2ab}{a} = 2b$, hoc est, diametro æqualis; sive superficies convexa, sive concava puncto radianti opponatur: id quod denuo convenit iis, quæ in superioribus demonstrata sunt (§. 192. 196).

SCHOLION.

500. *Eadem formula facile quoque applicatur ad meniscos & vitra concava, mutatis tantummodo signis, quemadmodum ex sequentibus apparet.*

COROLLARIUM 11.

501. Quodsi lens fuerit utrinque concava, centrum concavitatis superioris est superius, inferioris inferius, adeoque uterque radius fit in formula negativus. Quamobrem si pro a & b substituas $-a$ & $-b$; prodit distantia foci $\frac{2abd}{-ad-bd-2ab}$; qui valor

eum

cum sit negativus, evidens est, focum esse nonnisi virtualem. Nempe focus virtualis eodem intervallo distat a lente concava, quo focus seu punctum concursus in convexa (§. 487).

SCHOLION.

502. *Nimirum si valores negativi sumantur ut positivi (id quod in determinanda distantia foci principalis fieri debet, cum signum negativum tantummodo indicet foci distantiam sumendam esse ex altera parte, scilicet hic ante lentem) terminus ultimus* 2ab *retinet signum negativum, quod habet ex formula, non ex valore radiorum* a *&* b *negativo* (§.34. Analys.).

COROLLARIUM 12.

503. Quodsi jam fiat $a = b$, seu lens ponatur utrinque æqualiter concava; erit distantia foci virtualis $\frac{2a^2d}{-2ad - 2a^2} = \frac{ad}{-d-a} = \frac{-ad}{d-a}$, hoc est, ut differentia semidiametri concavitatis seu distantiæ foci virtualis principalis a distantia puncti radiantis ad hanc ipsam distantiam, ita distantia foci virtualis principalis ad distantiam foci virtualis minus principalis, consequenter in lente utrinque æqualiter concava focus virtualis minus principalis tanto intervallo a lente distat, quanto ab utrinque æqualiter convexa removetur principalis (§. 488).

COROLLARIUM 13.

504. Quodsi radius concavitatis superioris a evadat finitus, lens fit plano-concava & superficies plana obvertitur puncto radianti, consequenter in formula (§. 501) $bd = 0$ & hinc distantia foci virtualis minus principalis $\frac{-2abd}{ad-2ab} = \frac{2bd}{d-2b}$.

Et si $b = \infty$, erit $ad = 0$, adeoque distantia foci virtualis minus principalis $= \frac{-2ad}{d-2a}$. Focus adeo virtualis minus principalis eodem intervallo distat a lente plano-concava, quo focus minus principalis removetur a lente plano-convexa (§. 495) ac perinde est, sive superficies plana, sive concava lentis obvertatur puncto radianti.

COROLLARIUM 14.

505. Quodsi distantia d infinita evadat, radii evadunt paralleli: tum vero $2ab$ evadit infinite parva quantitas respectu ceterarum, & hinc distantia foci virtualis $= \frac{-2abd}{ad+bd} = \frac{-2ab}{a+b}$, hoc est, ut summa semidiametrorum concavitatis ad diametrum alterutram, ita semidiameter altera ad distantiam foci virtualis.

COROLLARIUM 15.

506. Si porro lens fuerit utrinque æqualiter concava, nempe $a = b$; erit distantia foci virtualis $\frac{2a^2}{2a} = a$; hoc est, semidiametro concavitatis æqualis.

COROL.

COROLLARIUM 16.

507. Si lens fuerit plano-concava, erit semidiameter alterutra infinita, veluti $b = \infty$, tuncque semidiameter altera $a = o$, consequenter distantia foci virtualis $= -\frac{2ab}{b} = -2a$.

Et eodem modo patet, si $a = \infty$, fore distantiam foci virtualis $= -2b$. Sive igitur lentis plano-concavæ superficies concava, sive plana puncto radianti obvertatur, focus virtualis diametri intervallo ab eodem removetur.

COROLLARIUM 17.

508. Quodsi radius $cB = a$ evadit negativus, superficies superior evadit concava, adeoque lens convertitur in meniscum, cujus superficies concava objecto obvertitur & distantia foci erit $\frac{-2abd}{ad-bd+2ab}$; si vero radius $CE = b$ evadit negativus, superficies inferior evadit concava, adeoque lens convexa in meniscum abit, cujus superficies convexa puncto radianti obvertitur, eritque distantia foci $= \frac{-2abd}{bd-ad+2ab}$. Perinde igitur est, sive menisci pars convexa, sive concava puncto radianti obvertatur. Valor formulæ positivus est, si $ad > bd + 2ab$; negativus, si $ad < bd + 2ab$ (§. 33. 34. *Anal. fin.*), adeoque in casu priore focus realis, in posteriori nonnisi virtualis.

COROLLARIUM 18.

509. Sit $a = b$, seu semidiameter concavitatis semidiametro convexitatis æqualis; erit distantia foci $\frac{-2a^2d}{ad+2a^2-ad} = \frac{-2a^2d}{2a^2} = -d$, vel $\frac{-2b^2d}{bd+2b^2-bd} = \frac{-2b^2d}{2b^2} = -d$, adeoque focus virtualis est in loco puncti radiantis & tum meniscus æquivalet vitro plano, sive convexitas, sive concavitas puncto radianti obvertatur.

COROLLARIUM 19.

510. Sit $b = 3a$, seu semidiameter concavitatis tripla semidiametri convexitatis, erit distantia foci $\frac{-6a^2d}{ad-3ad+6a^2} = \frac{-6a^2d}{6a^2-2ad} = \frac{-3ad}{3a-d}$, quæ quantitas positiva, si $d > 3a$, negativa si $d < 3a$, adeoque in casu primo focus realis, in altero virtualis est, & meniscus æquipollet lenti utrinque æqualiter convexæ, cujus semidiameter convexitatis $= 3a$, seu tripla semidiametri convexitatis menisci a.

COROLLARIUM 20.

511. Sit $b = 2a$, seu semidiameter concavitatis dupla semidiametri convexitatis, erit distantia foci $= \frac{-4a^2d}{ad-2ad+4a^2} = \frac{-2ad}{2a-d}$, quæ quantitas positiva, si $d > 2a$, negativa si $d < 2a$, adeoque in casu priori focus realis, in posteriori

virtualis & lens æquivalet vitro utrinque æqualiter concavo, cujus ſemidiameter concavitatis $= 2a$ ſeu dupla ſemidiametri convexitatis (§. 491. 492).

COROLLARIUM 21.

512. Fiat $d = \infty$, hoc eſt, radii incidant axi paralleli; erit diſtantia foci $= \frac{-2ab}{a-b}$, adeoque ut differentia ſemidiametrorum radiorum convexitatis & concavitatis ad diametrum alterutram ita ſemidiameter altera ad diſtantiam foci vel realis, vel virtualis, prouti $b > a$ vel $b < a$, quemadmodum ſupra reperimus (§. 299).

COROLLARIUM 22.

513. Sit $a = b$, ſeu ſemidiameter convexitatis ſemidiametro concavitatis æqualis; erit $\frac{-2a^2}{a-a} = \frac{-2a^2}{0} = \infty$ (§. 110. *Anal. infin.*), ſeu focus virtualis infinito intervallo diſtat, hoc eſt, radii poſt refractionem adhuc manent paralleli.

COROLLARIUM 23.

514. Sit $b = 3a$, ſeu ſemidiameter concavitatis tripla ſemidiametri convexitatis, erit $\frac{-6a^2}{a-3a} = \frac{-6a^2}{-2a} = 3a$, hoc eſt, diſtantia foci realis ſemidiametro concavitatis æqualis, adeoque meniſcus æquipollet vitro utrinque convexo, cujus ſemidiameter tripla ſemidiametri convexitatis meniſci, quemadmodum ſupra reperimus (§. 301).

COROLLARIUM 24.

515. Sit $b = 2a$, ſeu ſemidiameter concavitatis dupla ſemidiametri convexitatis; erit $\frac{-4a^2}{a-2a} = 4a$, adeoque focus realis diametri concavitatis intervallo diſtat, conſequenter meniſcus æquipollet lenti plano-convexæ, cujus ſemidiameter dupla ſemidiametri convexitatis meniſci, quemadmodum ſupra reperimus (§. 304).

COROLLARIUM 25.

516. Si $a = 3b$ vel $a = 2b$, hoc eſt, ſemidiameter convexitatis fuerit tripla, vel dupla ſemidiametri concavitatis, erit in caſu priore diſtantia foci $= \frac{-6b^2}{b-3b} = 3b$, in altero $= 6b$, adeoque in caſu priore meniſcus æquipollet lenti utrinque convexæ, cujus ſemidiameter tripla ſemidiametri concavitatis meniſci, in poſteriori lenti plano-concavæ, cujus ſemidiameter dupla ſemidiametri concavitatis.

COROLLARIUM 26.

517. Meniſci igitur minoris diametri cum æquipolleant lentibus convexis majoris diametri adeoque focum a lente magis removeant (§. 514. & ſeqq.), immo cum haud difficulter inveniatur meniſcus, quæ focum dato intervallo removeat (§. 310); illarum uſus commodus videtur

detur in tubis prægrandibus, cum lentes convexæ majoris diametri admodum difficulter poliantur.

SCHOLION.

518. *Enimvero minuunt menisci campum visionis, quemadmodum telescopia batava, adeoque tubis longioribus minime conducunt.*

THEOREMA 80.

519. *Presbytis conveniunt perspicilla convexa.*

DEMONSTRATIO.

Presbytæ enim remota distincte, vicina confuse vident (§. 381. *Optic.*). Quamobrem cum lentes convexæ radios a puncto vicino advenientes ita inflectant, ac si e puncto longinquo emanarent (§. 493); presbytis perspicilla convexa conveniunt. *Q. e. d.*

DEFINITIO 42.

520. *Magis presbyta* dicitur, qui ad majorem distantiam distincte videt visibile; *minus presbyta* appellatur, qui distincte videt ad distantiam minorem.

SCHOLION.

521. *E. gr. Sit distantia, qui terminus distinctæ visionis est Sempronio, dupla distantiæ, ad quam objectum distincte videt Titius; erit Titius magis presbyta, quam Sempronius.*

THEOREMA 81.

522. *Magis & minus presbytis non conveniunt perspicilla ejusdem convexitatis.*

DEMONSTRATIO.

Magis enim presbyta ad minorem distantiam visibile distincte videt, quam minus presbyta (§. 520). Jam cum presbyta distincte videat objectum vicinum, si radii ab objecto vicino advenientes ita inflectuntur, ac si ex termino distinctæ visionis venirent (§. 493), idem vero perspicillum radios eodem modo incidentes diversimode inflectere nequeat; idem perspicillum magis & minus presbytis convenire nequit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 56.

523. *Data distantia* AB, *ad quam presbyta distincte absque incommodo videt visibile, invenire diametrum perspicilli convexi eidem convenientis.* Tab. XII. Fig. 100.

RESOLUTIO.

Quæratur ad CB differentiam inter distantiam termini distinctæ visionis datam & AC distantiam objecti vicini, quod a presbyta confuse videtur, atque hanc ipsam distantiam AC tertia proportionalis CF; dico AF esse semidiametrum perspicilli utrinque convexi vel dia-

metrum plano-convexi presbytæ conveniens.

DEMONSTRATIO.

Etenim si presbyta distincte videre debet objectum in C collocatum, ita inflectendus erit radius vi refractionis in perspicillo passæ, ac si ex puncto B veniret, qui terminus est visionis distinctæ. Ponamus in F esse focum principalem ejus lentis, per quem presbyta objectum in C collocatum distincte videt; erit AC:CF=AB:AF (§. 493), consequenter AC : AB = CF : AF (§. 173. *Arithm.*). Quamobrem cum porro sit BC : AC=AC:CF (§. 193. *Arithm.*); patet AF esse foci principalis distantiam, adeoque semidiametrum perspicilli utrinque convexi (§. 498), diametrum plano-convexi pro presbyta (§. 499). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

524. Quodsi quis fuerit magis presbyta, distantia AB major est, quam si fuerit minus presbyta (§. 520), consequenter cum distantia AC pro utroque presbyta sit eadem; AC ad CF majorem rationem habebit, quis fuerit magis presbyta, quam minus presbyta (§. 203. *Arithm.*), consequenter in priori casu CF minor, quam in posteriori (§. 206. *Arithm.*), & hinc AF in isto minor, quam in hoc (§. 90. *Arithm.*). Magis itaque presbytæ conveniunt perspicilla minoris diametri, minus presbytæ quæ sunt diametri majoris, seu magis presbytæ conveniunt magis convexa, minus presbytæ minus convexa.

PROBLEMA 57.

525. *Perspicilla presbytis ac myopibus convenientia seligere.*

RESOLUTIO.

Presbyta successive perspicilla diversæ convexitatis, myops perspicilla diversæ concavitatis oculis præfigat. Quodsi absque ullo incommodo clare ac distincte videre possit objectum; perspicilla oculo conveniunt. Quodsi vero oculi dolent vel lachrymantur; eidem minime conveniunt.

Aliter.

Quodsi commode explorare volueris, qualis sphæricitatis perspicillum conveniat oculo uniuscujuscunque presbytæ, vel myopi, lentes probatoriæ tam plano-concavæ, quam plano-convexæ parentur hoc modo.

1. Vitrum quoddam orbiculare exacte poliatur & ex altera parte superficies plana eidem inducatur.
2. Ex altera vero in diversis catinis eidem interantur limbi diversæ sphæricitatis ad centrum

trum

trum usque continuo crescentis, quod occupat lenticula maximæ sphæricitatis. Limbi isti convexi fiunt in usum presbytarum, concavi in usum myopum.

Quodsi lentem istiusmodi probatoriam oculo admoveris, extemplo apparebit, per quemnam limbum clare & distincte videas objectum, consequenter qualis oculo conveniat sphæricitas.

THEOREMA 82.

526. *Presbytæ distincte vident objectum in foco lentis cujuscunque convexæ collocatum.*

DEMONSTRATIO.

Presbytæ enim cum clare ac distincte videant objecta remota (§. 381. *Optic.*); distincte vident quæ radiant per radios parallelos (§. 94. *Optic.*). Quamobrem cum objectum in foco lentis cujuscunque convexæ positum radiet per radios parallelos (§. 203); presbytæ distincte vident objectum in foco lentis cujuscunque convexæ collocatum.

CAPUT X.

DE

POLIENDIS VITRIS.

PROBLEMA 58.

527. *Catinos ad polienda vitra commodos parare.*

RESOLUTIO.

Tab. XI. Fig. 87. 1. Ex orichalco, cupro, ferro vel ligno fiat segmentum circuli eo radio descriptum, qui cavitati catini desiderati respondet. Describitur autem segmentum minus circino X; mediocre, cujus nempe radius est aliquot pedum, virga ferrea circa punctum fixum mobili & stylo incisorio in altera sui extremitate instructa; maximum denique, cujus semidiameter 12 pedibus major, cortice saligneo interiore per modum fili extenso & annulo orichalceo & ferreo affixo, in altera vero sui extremitate stylo incisorio aut plumbagine instructo, quia is magis extendi nequit, si multum, quam, si parum trahatur.

2. Ex

2. Ex lamina ferrea vel cuprea a fabro cudatur catinus, donec ejus cavitas undiquaque congruat convexitati segmenti. Quodsi vero ex orichalco aut ære catinum fundi malueris, tum ea tenenda sunt, quæ de fundendis speculis concavis (§. 201. *Catoptr.*) præcepimus.

Tab. XI. Fig. 88. 3. Catini ita formati figura perficiatur torno, quo figuli vasorum stanneorum in conficiendis patinis ac discis utuntur, aut super modulo lapideo A virgæ ferreæ per rotam radiatam BC transeunti & ope rotæ dentatæ DE ac manubrii F versatili.

4. Quando catinus convexitati moduli lapidei arenacei, quo in machina teritur, undiquaque congruit, a machina removeatur & asseri ligneo plumbo onusto, si opus fuerit, agglutinetur ac arena subtiliori per cribrum trajecta, ne grana sint inæqualia & superficiem catini vitient, tamdiu super modulo lapideo teratur, donec sulci residui tollantur.

5. Tandem vitra majora ope arenæ subtilioris per cribrum trajectæ in catino terantur, donec ejus superficies satis lævigata motum vitri nullibi remoretur.

SCHOLION 1.

528. *Segmenta lignea optime parantur ex pyro, & , ne distorta figuram mutent, majorum crassities unius fere sit digiti: prope peripheriam tamen ex una parte de solandum est segmentum, ut vix decima digiti crassities margini relinquatur & faber adeo catinorum figuram commodius & exactius examinare queat.*

SCHOLION 2.

529. *Ad facilitandum motum torni mechanica subsidia desiderata suppeditat.*

SCHOLION 3.

530. *Latitudo catinorum tripla esse debet latitudinis vitri poliendi. Minorum ea sit amplitudo, quæ motui manus polientis sufficiat.*

SCHOLION 4.

531. *Perfectum esse catinum deprehendes, si pili longioris per latitudinem ejus extensi umbra in camera præsertim obscura minime distorta appareat.*

PROBLEMA 51.

532. ***Vitra ad poliendum apta seligere.***

RESOLUTIO.

1. Imponatur vitrum chartæ mundæ, ita enim videbis, quonam colore inficiatur, & eodem tinctum esse vitrum colliges. Vitandus autem color nimis fuscus. Et quoniam vitrum candidissimum venas plerumque habet,

bet, & in aëre humescens sua sponte post aliquot annos polituram omnem amittit; *Hugenius* (o) optimum cæteris paribus judicat, quod subflavum, leviter rufum aut subviride apparet. *Hevelius* (p) leviter cœruleum probat.

2. Vitrum a vesiculis, arenulis, venulis, vorticibus ac spiris nocivis immune deprehendes, si lumen solare per id transmissum charta alba excipiatur: singuli enim nævi per umbras respondentes detegentur. Quodsi eosdem distinctius cognoscere libuerit, lumen transmissum per lentem convexam probatæ fidei trajiciatur, antequam ipsum charta excipias, vel si candelæ accensæ oppositum per lentem convexam respicias. Vitrum vero a venulis ac vorticibus liberum obtinebis, si forcipes longiorum brachiorum in duo segmenta sphærica cava desinentes materiæ vitreæ in furno colliquatæ immittas & massam extractam in furno reverberii refrigerari sinas. Præstat etiam vitrum, si duobus vel tribus diebus materia vitraria immota constiterit.

PROBLEMA 59.

533. ***Vitrum ad trituram aptare.***

RESOLUTIO.

1. Si vitra lenticularia aut saltem orbicularia ex officina vitraria non obtinueris, verum tabulas vitreas; ope adamantis in frustula quadrata tabulæ dividantur, &, si vitrum adeo crassum fuerit, ut diffringi nequeat, tabula panno super mensam strato ita imponatur, ut pars EFCB ultra eam promineat. Ea enim si instrumento quodam ferreo percutiatur, juxta ductum rectæ EF dissiliet. Et eodem modo frustulum quadratum EB*hg* a reliquis separabis. Si minor fuerit crassities, ope cochleæ manuariæ IK idem commode præstabis. Tab. XI. Fig. 89. Fig. 90.

2. In frustulo quadrato utrinque describantur circino, qui crure adamantino instructus, duo circuli concentrici, quorum interior habeat diametrum lentis desideratæ latitudini æqualem, exterior vero paulo majorem & anguli eodem, quo ante, modo separentur, inæqualitates minores

(o) in Commentariis de formandis vitris p. 273
(p) in Prolegomen. Selenogr. 14.

res residuæ ope cotis in gyrum actæ tollantur.

3. Examinetur vitrum ope cochleæ manuariæ, an ubique æqualis sit crassitiei. Quodsi diversa deprehendatur, ad æqualitatem est reducenda, attritione super lamina ferrea mediante aqua & arena facta.

Tab. XI. Fig. 91. 4. Tandem vitrum agglutinetur capulo ligneo NMO, cœmento ex pice & quarta parte resinæ, vel ex una parte ceræ & undecim partibus colophoniæ parato. Debet autem basis capuli NO vitro æqualis esse & centrum vitri cum ejus centro congruere.

SCHOLION.

534. *Lenticulæ minores, qualium in microscopiis est usus, cera sigillatoria capulis suis agglutinantur.*

PROBLEMA 60.

535. ***Vitrum convexum atterere & ad polituram disponere.***

RESOLUTIO.

1. Catinus arena per cribrum trajecta, ut grana sint æqualia, & madefacta, non tamen nimis, ope lentis huic usui destinatæ æqualiter distribuenda, conspergatur & panno crassiori aliquoties complicato imponatur.

2. Capulo manu prehenso vitrum super catino in orbem agatur, ita tamen, ut successive aliis aliisque viis incedat, ne figura catini depravetur, nec contra catinum deprimatur.

3. Ubi vitrum figuram catini acquisivit, ipsum cum capulo & catino mundetur, ne quid arenæ pristinæ ullibi adhæreat.

4. Catinus conspergatur primum pulvere smiridis madefacto & tamdiu vitrum teratur, donec omnes inæqualitates fuerint sublatæ. Postea usui esse potest arena clepsydralis rubra per seceerniculum coacta, ut grana omnia sint æqualia. Notandum vero est, quod arena nimis attrita ejici & in ejus locum alia recens substitui debeat. Alii utuntur pulvere smiridis successive subtiliori, vel etiam silicis contusi, quo ad excitandum ignem uti solemus.

5. Tandem in catino, qui minoris sphæræ segmentum existit, mediante simili arena teratur vitrum, donec marginem obtinuerit decliviorem.

Aliter.

Quoniam pressio in medium vitri non satis exacte determinatur, si manu sola agitetur vitrum: ideo consultius est, ut utamur machina sequen-

ſequente, præſertim ubi vitra objectiva ſunt læviganda.

Tab. XI. Fig. 92. 1. Catinus HI ſuper tabula horizontali firmiter affigatur.

2. Hujus centro immineat foramen D, per quod

3. trajiciatur ſtylus ferreus 5 vel 6 digitos longus & baculo AB infixus.

4. Baculi AB extremum alterum infigatur foramini in capulo C exciſo atque intra ipſum firmetur.

5. Hinc eodem manu prehenſo vitrum ut ante in catino mediante arena madefacta teratur.

SCHOLION 1.

536. *Ne figura catini depravetur, vitrum ſupra ejus margines in motu ſuo aſcendere debet.*

SCHOLION 2.

537. Hugenius (q) *primum uſus eſt ſmiride craſſa per linteum cameracenſe trajecta; deinde ſmiridis pulvere, qui intra ſpatium 40 aut 100 ſecundorum in aqua fundum petiit, ita tamen ut qualibet ſemihora aut quadrante aliquantum pulveris demeret. Nonnunquam ſe uſum eſſe fatetur ſmiride 50 ſecundorum per* $\frac{1}{2}$ *horæ, & dein per* $\frac{1}{4}$ *horæ ſmiride 400 ſecundorum & poſtea adhuc* $\frac{1}{2}$ *horæ ſmiride 45 minutorum.*

SCHOLION 3.

538. *Pulvis e ſilicibus in mortario ferreo contuſis diverſæ ſubtilitatis itidem obtinetur, ſi eum aquæ immittas & ſpatula lignea aliquamdiu agites, colligasque pulverem ad fundum vaſis certo temporis intervallo præcipitatum, aqua in vas alIud decantata.*

PROBLEMA 61.

539. *Vitra convexa polire.*

RESOLUTIO.

I. Si lentes fuerint ſphærarum minorum ſegmenta, veluti lentes oculares tam in tubis, quam in microſcopiis.

1. Catinus AB agglutinetur capulo ligneo BF eodem cæmento, quo lentes capulo ſuo agglutinantur. Tab. XI. Fig. 93.

2. Paretur pulticula ex hoſtiis, quibus in ſacra cœna utimur, & faſcia chartæ tenuis D pro latitudine lentis cavitati catini agglutinetur. Glutinis quoque loco eſſe poteſt gummi in aqua ſolutum.

3. Chartæ affricetur pulvis terræ tripolitanæ & lente probatoria exploretur, num forte granula quædam craſſiora adſint ſulcos datura.

4. Tandem vitrum capulo ſuo affixum ſuper charta ex D moveatur verſus C & in aërem ſublatum reducatur in D. Atque hæc operatio tamdiu continuanda, donec vitri politura cenſeatur perfecta.

(q) in Commentariis de formandis vitris p. 279.

II. Si lentes objectivæ, quæ majorum inprimis sphærarum segmenta existunt, perpoliendæ; libera manu id nunquam efficies satis accurate. Construenda igitur est machina sequens:

Tab. XI. Fig. 94. 1. Construatur tabula rectangula AK quatuor fulcris firmiter inter se compactis innixa & in medio exscindatur foramen quadratum, cui cistula CD immittatur mediante cochlea E ad arbitrium attollenda vel deprimenda, prout nempe usus tulerit.

2. In cistula super panno crasso aliquoties complicato reponatur catinus, cui ut ante fascia chartæ pulvere terræ tripolitanæ conspersa agglutinata.

3. Capulo F agglutinetur vitrum poliendum & ut vitrum sufficienter atque æquali propemodum vi ad catinum apprimatur, capulus intus excavetur cavitatique massa plumbi infundatur.

4. Capulus inferatur annulo ferreo G duobus corrigiis GH & GI annexo, quorum alterum GH ambiens duos cylindros K & N circa axes suos convertibiles in H annectatur scabello N, ut pede insistentis capulus cum vitro versus K adduci possit; alterum vero GI super cylindrum M itidem mobilem ductum annexum habeat pondus I, quantum ad capulum F versus K adductum retrahendum sufficit.

PROBLEMA 62.

540. *Vitra concava polire.*

RESOLUTIO.

Vitra concava eodem modo poliuntur, quo convexa, nisi quod loco catini adhibeatur vel segmentum sphæricum A, vel sphæra integra B prout jam supra in Catoptrica (§. 204) docuimus. Movetur autem modulus vel ope machinæ supra descriptæ (§. 527); vel ope alterius, qua ad vitra polyedra polienda utimur (§. 543); vel denique si plures moduli eidem virgæ infixi eodem artificio, quo in mola acuminaria utimur (§. 972. *Mechan.*). Tab. XI. Fig. 95.

PROBLEMA 63.

541. *Vitra plana polire.*

RESOLUTIO.

Vitra plana eodem modo poliuntur, quo supra specula plana polire docuimus (§. 43. *Catoptr.*).

SCHO-

SCHOLION.

542. *Non exiguæ difficultatis est perfectam vitro planitiem inducere, quia laminæ ferreæ vel orichalceæ superficiem exacte planam habentes nonnisi difficillime parantur. Unde* Hevelius (r) *majus artificium judicat superficiem vitro exacte planam quam cavam reddere.*

PROBLEMA 64.

543. *Vitra polyedra polire.*

RESOLUTIO.

Tab. XI. Fig. 96. 1. Construatur machina, in qua ope rotæ AB mediante cochlea D ad asserculum planum LM firmatæ & ope cochleæ alterius BC una cum asserculo huc illucve adducendæ atque funis ductarii EB movetur axis EF per tabulam quadratam NO quatuor fulcris innixam transiens, cui in cochleam desinenti infixum est corpus hemisphæricum ex ligno tornatum HG cum lamina plana & orbiculari G firmiter agglutinata.

2. Ex ligno paretur quadrans *abc*, crena *bc* excisa & limbo interiore in gradus 90 diviso, cujus radius sit trium circiter digitorum, latus vero *ab* excavatum, ut in cochleam PN tabulæ NO firmiter infixam intrudi & ad datam altitudinem in situ suo mediante cochlea fœmina *b* detineri possit.

3. Capulus coniformis Q, cui vitrum agglutinandum, affigatur stylo QR per tubulos R & S trajiciendo, quorum ille in centro quadrantis circa axiculum fixum, hic intra crenam *bc* mobilis & ope cochleæ in situ suo firmatur.

4. Vitrum ex ea parte, cui plana diversa induci debent, in catino ruditer attritum, donec convexitatem aliquam acquisiverit, capulo Q ad gradum quadrantis decimum, si illud minus crassum, vel ad decimum quintum, si satis crassum fuerit, firmato agglutinetur.

5. Discus planus G arena minuta madefacta conspergatur & ope manus sinistræ capulus Q cum vitro ad eum apprimatur, ope dextræ rota AB circumducatur: ita prima planities centro vicina atteretur.

6. Radio exiguo, sed arbitrariæ magnitudinis *hf* in lamella orichalcea describatur circulus & ex ejus centro *h* radio dimidio *hi* alius minor. Interior dividatur in tot partes æquales, quot Tab. XI. Fig. 97.

 pla-

(r) in Prolegom. Selenogr. f. 14.

plana circa centrum X lentis polyedræ TV constitui debent, e. gr. in sex: qui idem circulus una indicat plana in secunda serie formanda, Circulus vero exterior dividatur in partes duplo plures, nempe 12 in nostro casu, quæ planis in tertia serie respondent.

7. Lamella hæc, exciso foramine, applicetur ad tubulum S & stylo RQ prope eam infigatur ad angulos rectos seta suilla, quæ una cum stylo circa centrum ejus mobilis.

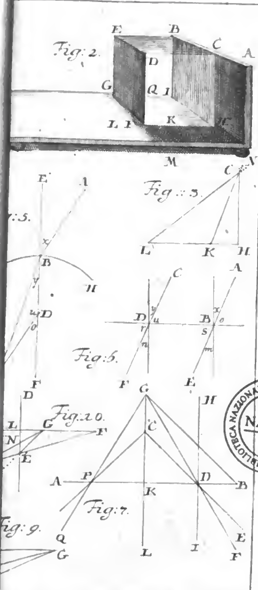
8. Indiculus in prima planitie inducenda primo divisionis puncto circuli interioris respondere debet; hac vero inducta, quadrante in eadem altitudine detento, promoveatur ad punctum divisionis secundum & ita porro, ut reliqua primæ seriei plana successive atterantur.

9. Ad plana secundæ seriei inducenda quadrans elevetur ad gradum vigesimum, si vitrum fuerit tenue, aut ad vigesimum quintum, immo trigesimum, si satis crassum. Reliqua fiant ut ante.

10. Ad plana tertiæ seriei inducenda quadrans elevetur ad gradum trigesimum, si vitrum fuerit tenue, aut ad trigesimum quintum, immo quadragesimum quintum, si satis crassum. Reliqua fiant ut ante, nisi quod indiculus ad puncta divisionis exterioris circuli sit dirigendus.

11. Quodsi plures planorum series atterendæ, adhuc altius elevandus est quadrans.

FINIS DIOPTRICÆ.



ig: Dioptr: Tab: I. Lit: W.

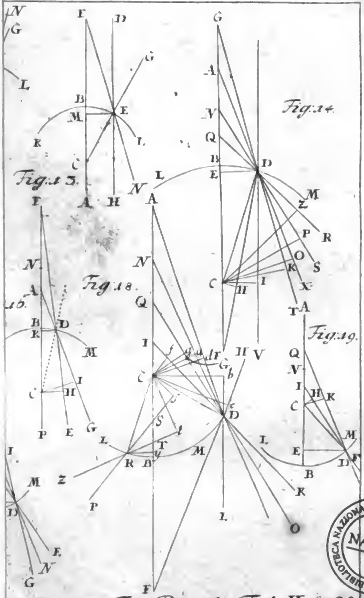
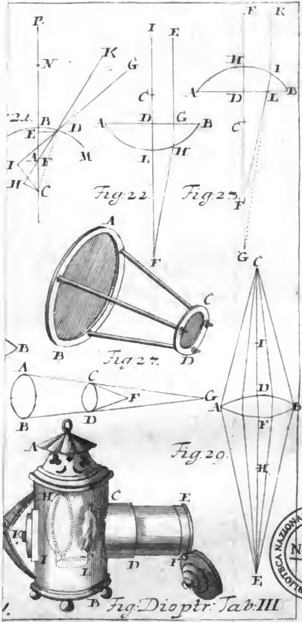


Fig: Dioptr: Tab II Lit: X.


Fig:22.
Fig:23.
Fig:27.
Fig:29.
Fig: Dioptr: Tab: III

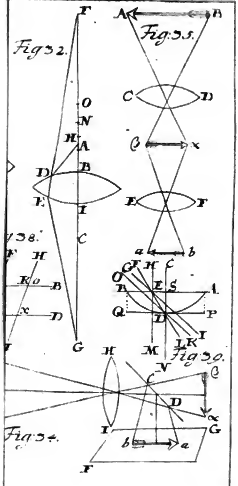


Fig: Dioptr
Tab: IV.

lit: Z.



II. Si lentes objectivæ, quæ majorum inprimis sphærarum segmenta existunt, perpoliendæ; libera manu id nunquam efficies satis accurate. Construenda igitur est machina sequens:

Tab. XI. Fig. 94. 1. Construatur tabula rectangula AK quatuor fulcris firmiter inter se compactis innixa & in medio exscindatur foramen quadratum, cui cistula CD immittatur mediante cochlea E ad arbitrium attollenda vel deprimenda, prout nempe usus tulerit.

2. In cistula super panno crasso aliquoties complicato reponatur catinus, cui ut ante fascia chartæ pulvere terræ tripolitanæ conspersa agglutinata.

3. Capulo F agglutinetur vitrum poliendum & ut vitrum sufficienter atque æquali propemodum vi ad catinum apprimatur, capulus intus excavetur cavitatique massa plumbi infundatur.

4. Capulus inseratur annulo ferreo G duobus corrigiis GH & GI annexo, quorum alterum GH ambiens duos cylindros K & N circa axes suos convertibiles in H annectatur scabello N, ut pede insistentis capulus cum vitro versus K adduci possit; alterum vero GI super cylindrum M itidem mobilem ductum annexum habeat pondus I, quantum ad capulum F versus K adductum retrahendum sufficit.

PROBLEMA 62.

540. *Vitra concava polire.*

RESOLUTIO.

Vitra concava eodem modo poliuntur, quo convexa, nisi quod loco catini adhibeatur vel segmentum sphæricum A, vel sphæra integra B prout jam supra in Catoptrica (§. 204) docuimus. Movetur autem modulus vel ope machinæ supra descriptæ (§. 527); vel ope alterius, qua ad vitra polyedra polienda utimur (§. 543); vel denique si plures moduli eidem virgæ infixi eodem artificio, quo in mola acuminaria utimur (§. 972. *Mechan.*). Tab. XI. Fig. 95.

PROBLEMA 63.

541. *Vitra plana polire.*

RESOLUTIO.

Vitra plana eodem modo poliuntur, quo supra specula plana polire docuimus (§. 43. *Catoptr.*).

SCHO-

SCHOLION.

542. *Non exiguæ difficultatis est perfectam vitro planitiem inducere, quia laminæ ferreæ vel orichalceæ superficiem exacte planam habentes nonnisi difficillime parantur. Unde* Hevelius (r) *majus artificium judicat superficiem vitro exacte planam quam cavam reddere.*

PROBLEMA 64.

543. *Vitra polyedra polire.*

RESOLUTIO.

Tab. XI. Fig. 96. 1. Construatur machina, in qua ope rotæ AB mediante cochlea D ad asserculum planum LM firmatæ & ope cochleæ alterius BC una cum asserculo huc illucve adducendæ atque funis ductarii EB movetur axis EF per tabulam quadratam NO quatuor fulcris innixam transiens, cui in cochleam desinenti infixum est corpus hemisphæricum ex ligno tornatum HG cum lamina plana & orbiculari G firmiter agglutinata.

2. Ex ligno paretur quadrans *abc*, crena *bc* excisa & limbo interiore in gradus 90 diviso, cujus radius sit trium circiter digitorum, latus vero *ab* excavatum, ut in cochleam PN tabulæ NO firmiter infixam intrudi & ad datam altitudinem in situ suo mediante cochlea fœmina *b* detineri possit.

3. Capulus coniformis Q, cui vitrum agglutinandum, affigatur stylo QR per tubulos R & S trajiciendo, quorum ille in centro quadrantis circa axiculum fixum, hic intra crenam *bc* mobilis & ope cochleæ in situ suo firmatur.

4. Vitrum ex ea parte, cui plana diversa induci debent, in catino ruditer attritum, donec convexitatem aliquam acquisiverit, capulo Q ad gradum quadrantis decimum, si illud minus crassum, vel ad decimum quintum, si satis crassum fuerit, firmato agglutinetur.

5. Discus planus G arena minuta madefacta conspergatur & ope manus sinistræ capulus Q cum vitro ad eum apprimatur, ope dextræ rota AB circumducatur: ita prima planities centro vicina atteretur.

6. Radio exiguo, sed arbitrariæ magnitudinis *hf* in lamella orichalcea describatur circulus & ex ejus centro *h* radio dimidio *hi* alius minor. Interior dividatur in tot partes æquales, quot Tab. XI. Fig. 97.

 pla-

(r) in Prolegom. Selenogr. f. 14.

plana circa centrum X lentis polyedræ TV constitui debent, e. gr. in sex: qui idem circulus una indicat plana in secunda serie formanda, Circulus vero exterior dividatur in partes duplo plures, nempe 12 in nostro casu, quæ planis in tertia serie respondent.

7. Lamella hæc, exciso foramine, applicetur ad tubulum S & stylo RQ prope eam infigatur ad angulos rectos seta suilla, quæ una cum stylo circa centrum ejus mobilis.

8. Indiculus in prima planite inducenda primo divisionis puncto circuli interioris respondere debet; hac vero inducta, quadrante in eadem altitudine detento, promoveatur ad punctum divisionis secundum & ita porro, ut reliqua primæ seriei plana successive atterantur.

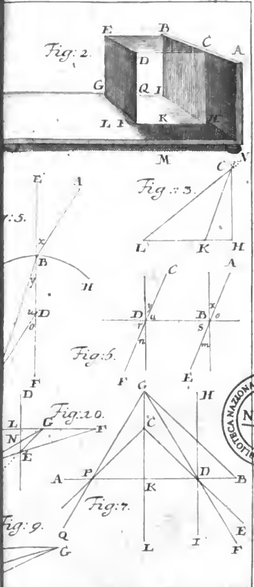
9. Ad plana secundæ seriei inducenda quadrans elevetur ad gradum vigesimum, si vitrum fuerit tenue, aut ad vigesimum quintum, immo trigesimum, si satis crassum. Reliqua fiant ut ante.

10. Ad plana tertiæ seriei inducenda quadrans elevetur ad gradum trigesimum, si vitrum fuerit tenue, aut ad trigesimum quintum, immo quadragesimum quintum, si satis crassum. Reliqua fiant ut ante, nisi quod indiculus ad puncta divisionis exterioris circuli sit dirigendus.

11. Quodsi plures planorum series atterendæ, adhuc altius elevandus est quadrans.

FINIS DIOPTRICÆ.





ig: Dioptr: Tab: I. Lit: W.

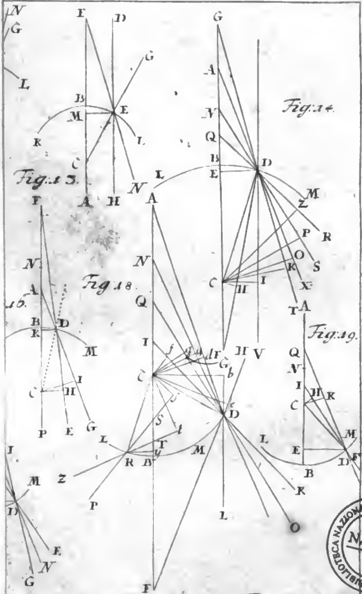


Fig: Dioptr: Tab. II Lit: X.

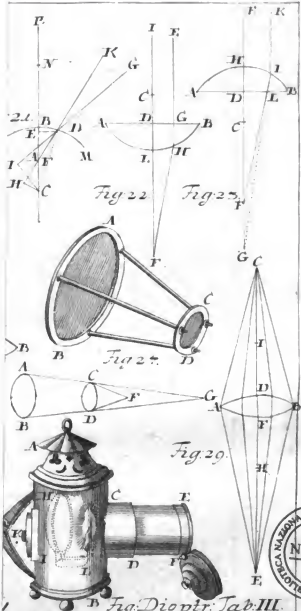


Fig: Dioptr: Tab: III.

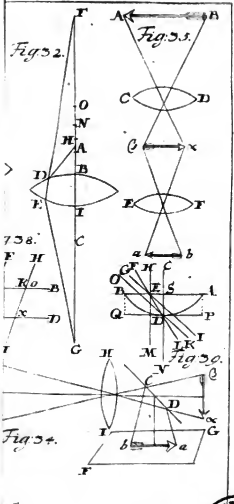


Fig: Dioptr.
Tab: IV.

lit: Z.

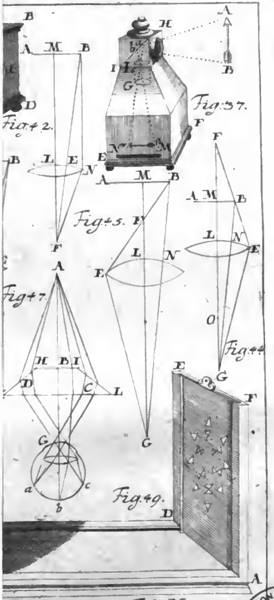
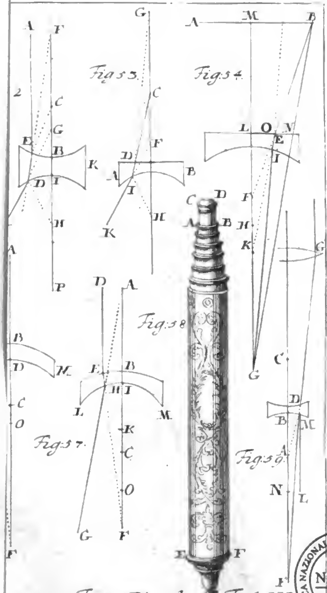


Fig: Dioptr: Tab: V.



B 2. *Fig: Dioptr: Tab: VI.*

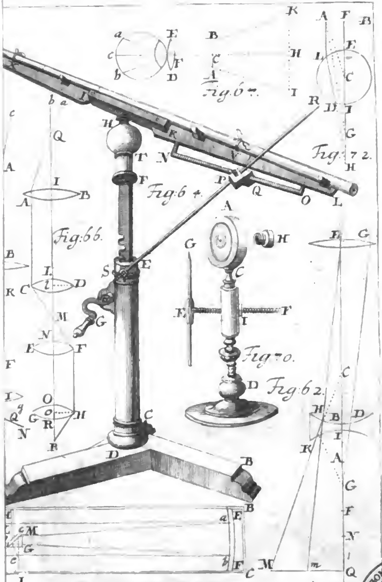
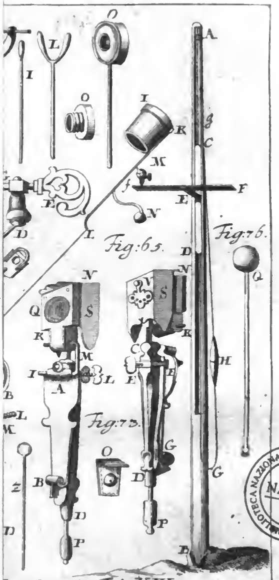


Fig: Dioptr: Tab: VII. lit: C2.



g: Dioptr. Tab: VIII. tit: D2.

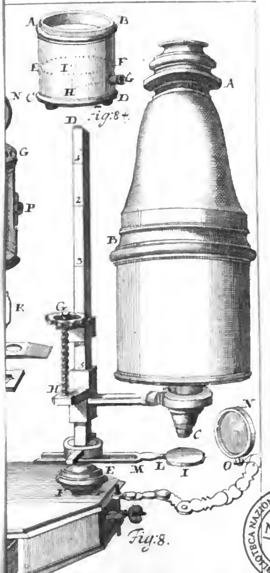
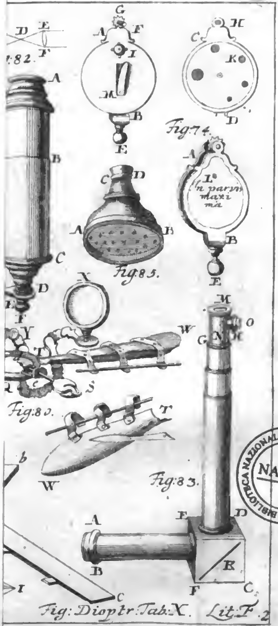


Fig: Dioptr: Tab: IX
lit: E 2.



Lit: F. 2


Fig:82.
Fig:74.
In parvis maxima
Fig:85.
Fig:80.
Fig:83.
Fig: Dioptr: Tab: X.
Lit: F. 2

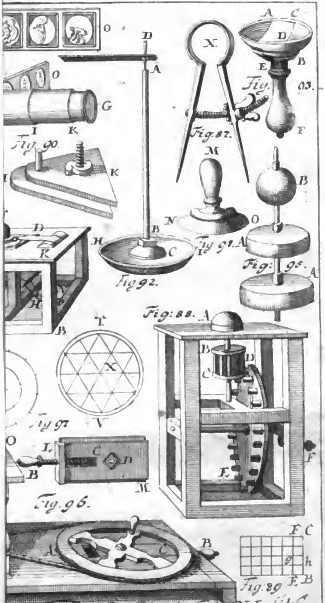
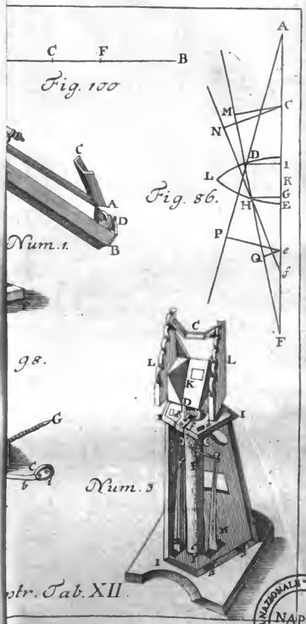


Fig: Dioptr: Tab: XI. Lit: G. 2.


C F B
Fig. 100
A C M N D I L K G E H P e Q f F
Fig. 86.
C A D B
Num. 1.
98.
G
Num. 3
C L L K D I
ptr. Tab. XII.

ELEMENTA
SPHÆRICORUM
ET
TRIGONOMETRIÆ
SPHÆRICÆ.

PRÆFATIO.

Cum Trigonometria ſphærica propter Aſtronomiam & ipſi agnatas diſciplinas Geographiam atque Gnomonicam unice diſcatur; eam quoque a Trigonometria plana ſejungere ac Aſtronomiæ immediate præmittere placuit. Uſus autem ejus in phænomenis motus diurni ad computum revocandis eluceſcit: unde ab eadem prorſus abſtinere poſſunt, quotquot calculos geometricos in Aſtronomia inſuper habentes nonniſi univerſi ſtructuram ac pendentes inde phænomenorum rationes cognoſcere geſtiunt. Perfecta Trigonometriæ ſphæricæ cognitio abſque Sphæricorum doctrina non datur. Neceſſarium igitur duxi, ut præcipua ex Sphæricis *Theodoſii* theoremata, quamvis alia plerumque ratione, demonſtrarem & una triangulorum ſphæricorum proprietates explicarem, præſertim cum utriusque doctrinæ ad accuratam Aſtronomiæ ſphæricæ tractationem non minor ſit, quam ipſius Trigonometriæ ſphæricæ uſus. Sphæricorum elementa cum Trigonometria ſphærica conjunxi, ne numerus diſciplinarum præter neceſſitatem multiplicaretur.

ELEMENTA SPHÆRICORUM ET TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ.

CAPUT I.

DE SYMPTOMATIS CIRCULORUM IN SUPERFICIE SPHÆRÆ DESCRIPTORUM.

DEFINITIO 1.

1.

S*phærica* eſt ſcientia circulorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum.

DEFINITIO 2.

2. *Trigonometria ſphærica* eſt ſcientia ex tribus trianguli ſphærici partibus inveniendi reliquas, e. gr. ex duobus lateribus atque angulo uno duos angulos reliquos cum latere tertio.

DEFINITIO 3.

3. *Triangulum ſphæricum* eſt triangulum tribus arcubus circulorum maximorum ſphæræ in ejus ſuperficie ſe mutuo interſecantium terminatum.

SCHOLION.

4. *Quinam circulorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum ſint maximi, infra demonſtratur* (§. 15).

DEFINITIO 4.

5. *Angulus ſphæricus* ACE eſt inclinatio planorum CAF & CEF, quibus ſphæra ſecatur. Tab. I. Fig. 1.

DEFINITIO 5.

6. *Sphæra* eſt ſolidum ex rotatione ſemicirculi ADB circa diametrum AB deſcriptum. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM 1.

7. Quia ſemicirculus ADB ſuperficiem ſphæræ deſcribit, omnes rectæ a ſuperficie ſphæræ ad centrum ejus ductæ ſunt inter ſe æquales (§. 37. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

8. Quodſi ergo eas ultra centrum continuaveris, donec puncto oppoſito ſuperficiei ſphæræ occurrant; erunt quoque ſic continuatæ tum in-

ter se, tum diametro circuli genitoris AB æquales.

DEFINITIO 6.

Tab. I. Fig. 2. 9. *Axis sphæræ* est diameter semicirculi genitoris AB, circa quam tanquam quiescentem sphæra rotari concipitur. Ejus vero *diameter* est recta a puncto quodam superficiei ad punctum oppositum per centrum ducta.

COROLLARIUM.

10. Axis igitur est una e diametris (§. 8. 9).

DEFINITIO 7.

11. *Poli sphæræ* sunt puncta axis extrema A & B.

DEFINITIO 8.

12. *Polus circuli in sphæra* est punctum in superficie sphæræ, ad quod e singulis peripheriæ circuli punctis ductæ rectæ sunt inter se æquales.

THEOREMA 1.

13. *Si sphæra quomodocunque secetur, planum sectionis erit circulus, cujus centrum in diametro sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi planum sectionis per centrum sphæræ transit, rectæ omnes ex ejus perimetro ad hoc centrum ductæ sunt æquales (§. 7). Est igitur planum sectionis circulus (§. 37. *Geom.*) & ejus centrum in diametro sphæræ, quippe cum centro sphæræ idem (§. 9). Quodsi planum intersectionis FGE non transeat per centrum C; ex hoc ad illud demittatur perpendicularis CD, quæ erit ad rectas quotcunque DG, DE, DF &c. perpendicularis (§. 48 4. *Geom.*). Quare cum CE, CG, CF &c. sint inter se æquales (§. 7); in triangulis CDE CDG, CDF &c. etiam bases DE, DG, DF &c. æquales sunt (§. 235. *Geom.*). Est igitur planum FGE circulus (§. 37. *Geom.*) & ejus centrum D in diametro sphæræ AB (§. 9). *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 3.

COROLLARIUM 1.

14. Diameter itaque circuli per centrum C transeuntis HI est diametro circuli genitoris AB; diameter vero circuli per centrum non transeuntis FE chordæ alicui circuli genitoris æqualis (§. 6. *Sphær.* & §. 38. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

15. Quare cum diameter sit chordarum maxima (§. 299. *Geom.*); circulus sphæræ maximus est, qui per centrum ejus transit, reliqui vero sunt eodem minores.

COROLLARIUM 3.

16. Omnes adeo circuli maximi in eadem sphæra sunt inter se æquales (§. 172. *Geom.*).

CO-

COROLLARIUM 4.

17. Si circulus sphæræ maximus per datum sphæræ punctum A transit; idem etiam per punctum diametraliter oppositum B transit (§. 15).

COROLLARIUM 5.

Tab. I. Fig. 4. 18. Si igitur duo circuli maximi AEBF & CEDF se mutuo intersecent, linea sectionis EF est diameter sphæræ, adoque duo circuli maximi se mutuo intersecant in punctis E & F diametraliter oppositis.

THEOREMA 2.

19. *Circulus sphæræ maximus dividit eam in duas partes æquales seu in duo hemisphæria.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 2. Circulus maximus EGDE transit per centrum sphæræ C. Erigatur ex C perpendicularis ad planum (§. 502. *Geom.*) quæ etiam perpendicularis erit ad CD (§. 484. *Geom.*). Cum sit AC = CD (§. 15) & ACD quadrans circuli (§. 143. *Geom.*), sphæra vero gignatur ex rotatione semicirculi ADB (§. 6): hemisphærium ADGED gigneturex rotatione quadrantis ACD: radius vero CD circulum describit DGED (§. 131. *Geom.*). Circulus adeo maximus sphæram dividit in duo hemisphæria. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

20. *Circuli maximi in sphæra se mutuo bifariam secant & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circuli AEBF & CEDF sunt maximi, *per hypoth.* erit EF diameter sphæræ & eadem diameter utriusque circuli (§. 18). Per rectam igitur EF uterque circulus CEDF & AEBF bifariam secatur (§. 135. *Geom.*), consequenter circuli maximi AEBF & CEDF se mutuo bifariamsecant. *Quod erat unum.* Tab. I. Fig. 4.

Quodsi circuli CEDF & AEBF se muto bifariam secent, communis intersectio EF est diameter utriusque circuli (§. 135. *Geom.*), & hinc in medio ejus G centrum. Ducantur rectæ DC & AB per centrum G; erit DG=CG=EG & AG =GB=GE (§. 40. *Geom.*), adeoque etiam DG=CG=AG=GB (§. 87. *Arithm.*). Est ergo G centrum sphæræ (§. 7), consequenter uterque circulus est maximus (§. 15). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

21. *Recta ex polo uno A circuli in sphæra* DEF *in alterum* B *ducta per centrum sphæræ* C *transit.* Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in A & B sunt poli circuli DEF *per hypoth.* erit AD= AF & DB = FB (§. 12). Quare cum etiam arcus cognomines sint æquales (*§.* 289. *Geom.*), adeoque AD + DB = AF + FB (*§.* 88. *Arithm.*), sitque AD + DB + BF + FA peripheria circuli integri; erit ADB semicirculus, consequenter AB diameter sphæræ (§. 135. *Geom.* & *§.* 9. *Sphær.*). Recta igitur AB ex polo uno A in alterum B ducta per centrum sphæræ C transit (§. 39. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

22. Circulus itaque ADBF transiens per polos A & B alterius in sphæra circuli DEF est maximus (*§.* 15).

THEOREMA 5.

Tab. I. Fig. 5. 23. *Recta* AB *ex polo uno* A *circuli* DEF *ducta per centrum sphæræ* C *in polum alterum* B *cadit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB per centrum C transit, *ex hypoth.* erit AD + DB= AF+FB (*§.* 135. *Geom.*). Et quia in A polus circuli DEF *per hypoth.* erit AD = AF (§ 12), adeoque DB = BF (*§.* 91. *Arithm.*), consequenter B est alter polus circuli DEF (§. 12). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

24. Recta AB ex polo uno A circuli DEF per centrum circuli G ducta in alterum B incidit (§. 13).

THEOREMA 6.

25. *Arcus circuli sphæræ maximi inter alium* HIL, *& ejus polos* A *&* B *interceptus quadrans est: qui vero inter circulum minorem* DEF *& ejus polum unum* A *intercipitur, quadrante major; interceptus vero inter eundem & polum alterum* B, *quadrante minor.* Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex polo A in alterum B recta AB, transibit ea per centrum sphæræ C (*§.* 21), adeoque & circuli maximi HIL (*§.* 15), itemque per centrum G circuli minoris DEF (§. 24). Est igitur AHB semicirculus (*§.* 135. *Geom.*). Quare cum chordæ AH & AL æquales sint (§. 12) & radii HC & CL itidem æquales (§. 40. *Geom.*), erunt anguli ad C æquales (*§.* 204. *Geom.*) adeoque recti (*§.* 147. *Geom.*), consequenter eorum mensuræ AH, AL &c. (*§.* 57. *Geom.*) sunt quadrantes (*§.* 143. *Geom.*) & hinc HB & BL sunt itidem quadrantes, *vi demonstratorum.* Arcus adeo inter circulum maximum HIL & ejus polos A & B intercepti

pti quadrantes sunt. *Quod erat unum.*

Quoniam AH & HB sunt quadrantes *per demonstrata*, AD quadrante major & BD eodem minor (§. 84. *Arithm.*). Arcus ergo circuli maximi inter minorem DEF & polum unum A major, inter eundem & alterum polum B interceptus quadrante minor est. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

Tab. I. Fig. 5. 26. *Si arcus circuli maximi inter alium circulum sphæræ & ejus polos A & B intercepti quadrantes sunt; circulus iste maximus erit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A & B sunt poli circuli HIL *per hypoth.* AB per centrum sphæræ transit (§. 21). Quare cum AH & HB itemque AL & BL sint quadrantes, *per hypoth.* AB & HL sunt diametri circuli maximi AH BL (§. 135. *Geom.*) seu sphæræ (§. 9). Ergo in C est centrum sphæræ (§. *cit.*), consequenter HIL est circulus maximus (§. 15). *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

Tab. I. Fig. 6. 27. *Si circulus maximus sphæræ* ADBE *transit per polos* D & E *alterius circuli maximi* AFBG; *hic vicissim per illius polos* G & F *transit.*

DEMONSTRATIO.

Sit DFEG circulus maximus: quoniam in D est polus unus, in E alter circuli AFBG *per hypoth.* erit recta DG = DF & EG = EF (§. 12) & hinc arcus cognomines æquales sunt (§. 289. *Geom.*). Quare cum circuli maximi DFEG & AFBG se mutuo bifariam secent (§. 20); erunt GD & DF itemque GE & FE quadrantes, consequenter recta GE = GD & recta EF = FD (§. 289. *Geom.*). Sunt igitur G & F poli circuli DABE (§. 12). *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

28. *Si circulus maximus* ADBE *per polos* A & B *alterius circuli maximi* DGE *transit; se mutuo ad angulos rectos secant & contra.* Tab. I. Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in A & B sunt poli circuli EGD *per hypoth.* erunt AE & EB quadrantes (§. 25). Quare cum AE & EB sint mensuræ angulorum ACE & ECB (§. 57. *Geom.*); erunt anguli hi recti (§. 143. *Geom.*). Ergo rectæ AC & BC rectæ EC, consequenter quadrantes ACE & ECB circulo DEG ad angulos rectos insistunt (§. 494. *Geom.*). Secant igitur circuli ADBE & EGD se mutuo ad angulos rectos (§. 5). *Quod erat unum.*

Si circulus AEBDA alterum DEGD in E ad angulos rectos secat: planum EAD erit ad planum EDG perpendiculare (§. 5). Ex centro C erigatur perpendicularis CA; erit eadem ad omnes radios ex centro C in plano EGD ductos normalis (§. 484. *Geom.*), consequenter rectæ ex A ad puncta singula peripheriæ EGD ductæ æquales sunt (§. 179. *Geom.*). Est itaque A polus unus circuli EGD (§. 12), adeoque producta AC in B polus alter punctum B (§. 23), ideoque circulus AEBD per polos alterius EGD transit. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 10.

Tab. I. Fig. 5. 29. *Si circulus maximus sphæræ* AFBD *alterum minorem* FED *bifariam secet; ad angulos rectos eum secat & per polos ejus* A *&* B *transit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam DEF est semicirculus *per hypoth.* erit DF diameter ejus (§. 35. *Geom.*). Quare si per centrum circuli minoris G & centrum sphæræ seu maximi C ducatur recta AB; erunt anguli AGD & AGF recti (§. 291. *Geom.*), adeoque planum DAF circulo DEF ad angulos rectos insistit, hoc est, circulus maximus ADBF minorem DEF ad angulos rectos secat (§. 5). *Quod erat unum.*

Jam cum anguli ad G sint æquales (§. 79. *Geom.*) & GD = GF (§. 40. *Geom.*) erit AD = AF & DB = BF (§. 179. *Geom.*). Sunt ergo in A & B poli circuli DEF (§. 12). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 11.

30. *Si circulus maximus* AFBD *transeat per polos* A *&* B *alterius minoris* DEF, *secabit eum bifariam & ad angulos rectos.* Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quia recta AB ducta a polo uno A in alterum B transit & per centrum sphæræ seu circuli maximi C, & per centrum circuli minoris G (§. 21. 24); erit DG = GF (§. 40. *Geom.*), consequenter AG ad DG perpendicularis (§. 291. *Geom.*). Cum adeo planum ADG circulo minori DEF ad angulos rectos insistat (§. 78. *Geom.*); maximus minorem ad angulum rectum secat (§. 5). *Quod erat unum.*

Et quia DF est diameter circuli DEFD *per demonstrata*: eundem maximus bifariam secat (§. 135. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 12.

31. *Mensura anguli sphærici* ACE *est* Tab. I. Fig. 1.

est arcus circuli maximi AE *ex vertice* C *tanquam polo descripti inter crura* CA *&* CE *interceptus.*

DEMONSTRATIO.

Quia angulus sphæricus ACE idem est cum inclinatione planorum ACD & CDE (§. 5); ejus mensura eadem est, quæ inclinationis planorum. Est vero inclinationis quantitas eadem, quæ anguli ADE (§. 476. *Geom.*) & quia in D centrum circuli AEB (§. 15), arcus AE est mensura auguli rectilinei AED (§. 57. *Geom.*). Ergo idem est mensura sphærici ACE *per demonstr.* *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

32. Quia plani CEF ad planum CAF inclinatio ubique eadem (§. 509. *Geom.*); anguli in intersectionibus oppositis C & F æquales sunt.

COROLLARIUM 2.

33. Mensura anguli sphærici ACE intervallo quadrantis AC vel EC ex vertice C tanquam polo inter crura describitur (§. 25).

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 4. 34. *Si duo circuli maximi* AE BF *&* CEDF *se mutuo intersecent in polis* E *&* F *alterius circuli maximi* ACBD; *transibit is per polos* H *&* h, I *&* i *circulorum* AEBF *&* CEDF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in E & F sunt poli circuli ACBD *per hypoth.* circuli AE BF & CEDF per polos circuli ACBD transeunt. Ergo vicissim circulus ACDB tam per polos H & *h* circuli AEBF, quam per polos I & *i* alterius CEDF transire debet (§. 27). *Q. e. d.*

THEOREMA 14.

35. *Si duo circuli maximi* AEBF *&* CEDF *se mutuo intersecent, erit angulus obliquitatis* AEC *distantiæ polorum* HI *æqualis.* Tab. I. Fig. 4.

DEMONSTRATIO.

Describatur ex vertice anguli E tanquam polo circulus CADB; erit AC mensura anguli E (§. 31) & circulus per polos H & *h* atque I & *i* circulorum AEBF & CEDF transibit (§. 34). Est vero CH quadrans & CI itidem quadrans (§. 25). Ergo CA = HI (§. 91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 15.

36. *Circuli in sphæra a centro ejus* C *æqualiter distantes* GF *&* LK *æquales sunt.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sit AIBH circulus genitor, ad cujus diametrum AB sint chordæ GF & LK perpendiculares: erunt DC & EC earum distantiæ a centro

tro C (*§*. 225. *Geom.*) & DF atque EK radii circulorum a centro æqualiter distantium (*§*. 6. *Sphær.* & §. 131. *Geom*). Quare cum sit DF = EK (*§*. 298. *Geom.*); circuli quoque his radiis descripti æquales sunt (*§*. 171. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Quia chordarum parallelarum non nisi duæ DF & EK a centro æqualiter distare possunt; circulorum eidem maximo parallelorum nonnisi duo æquales sunt.

THEOREMA 16.

Tab. I. Fig. 7. 38. *Si arcus* FH *&* KH *itemque* GI *&* IL *inter circulum maximum* IMH *&* *minores* GNF *&* LOK *intercepti fuerint æquales; circuli quoque æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam FH = HK & GI = IL *per hypoth.* erit etiam PF = PK & GQ = QL (*§*. 291. *Geom.*) & quia PF & PK itemque GQ & QL ad IH perpendiculares (*per §. cit.*), erunt eædem distantiæ circulorum GNF & LOK a circulo maximo IMH consequenter a centro circuli C (*§*. 15). Est igitur circulus LOK alteri GNF æqualis (*§*. 36). *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

Tab. I. Fig. 7. 39. *Circuli a centro sphæræ* C *æqualiter distantes sunt eidem circulo maximo* IMH *atque inter se paralleli.*

DEMONSTRATIO.

Quia circuli GNF & LOK a centro C æqualiter distant, erit recta DE per centrum ducta ad diametrum utriusque circuli GF & LK perpendicularis (§. 225. *Geom.*). Ergo radii DF & EK circulorum GNF & LOK sunt paralleli (§. 256. *Geom.*), qui adeo in rotatione semicirculi AFKB circa axem AB circulos parallelos in sphæra describunt (§. 6). *Quod erat unum.*

Ducatur diameter HI per centrum C ad AB perpendicularis, erit ea diameter circuli maximi IMH (§. 15). Eodem vero, quo ante, modo porro ostenditur, utrumque circulum GNF & LOK esse eidem circulo maximo IMH parallelum. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 18.

40. *Si arcus* FH *&* GI *ejusdem circuli maximi* AIBH *inter duos circulos* GNF *&* IMH *intercepti fuerint æquales; circuli sunt inter se paralleli.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Si IMH fuerit circulus maximus, demittantur ex F & G perpendiculares PF & GQ. Quoniam arcus FH & GI æquales sunt *per hypoth.*

poth. erunt etiam perpendiculares PF & GQ æquales (§. 298. *Geom.*), consequenter chorda GF diametro IH parallela (§. 256. *Geom.*). Describit adeo recta DF in rotatione semicirculi AFB circa axem AB circulum GNF circulo IMH parallelum (§. 6).

Tab. I. Fig. 8. Quodsi circulus uterque GNF & IMH fuerit minor; dividantur arcus GAF & IBH bifariam in A & B (§. 293. *Geom.*). Quoniam GA = AF & IB = BH *per constr.* GI = FH *per hypoth.* erit AGIB = AF HB (§. 88. *Arithm.*), consequenter AB per centrum C transit (§. 135. *Geom.*). Secat igitur chordas GF & IH bifariam & ad angulos rectos (§. 291. *Geom.*), adeoque DF ipsi EH parallela (§. 256. *Geom.*). In rotatione adeo semicirculi AFHB circa axem AB radii DF & EH describunt circulos parallelos (§. 5). *Q. e. d.*

THEOREMA 19.

Tab. I. Fig. 8. 41. *Si duo circuli in sphæra* GNF *&* IMH *a sphæræ centro* C *inæqualiter distent, minor erit* CNF, *cujus distantia a centro* CD *major.*

DEMOSTRATIO.

Ponamus circulorum diametros GF & IH esse inter se parallelas: Quoniam enim chordæ a centro æqualiter distantes æquales sunt (§. 298. *Geom.*) si circuli FNG & IMH non fuerint paralleli, in demonstratione facile assumi potest pro eorum uno alius ipsi æqualis & alteri parallelus. Ducatur jam CB per centrum C perpendicularis ad GF (§. 216. *Geom.*), erit eadem perpendicularis ad IH (§. 230. *Geom.*), adeoque CD & CE sunt distantiæ chordarum DF & EH a centro C (§. 225. *Geom.*). Quare cum arcus IAH major sit arcu GAF (§. 84. *Arithm.*); erit etiam IH > GF (§. 301. *Geom.*), adeoque circulus IMH major circulo GNF (§. 172. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

42. *Circuli paralleli* GNF *&* IMH *eosdem habent polos* A *&* B, *& si eosdem polos habent, paralleli sunt & arcus circulorum per polos transeuntium* FH *&* IG *æquales sunt.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Quoniam GF ipsi IH parallela *per hypoth.* erit arcus FH = GI (§. 312. *Geom.*). Per centrum C ducatur recta AB arcum GF bisecans in A (§. 293. *Geom.*), quæ secabit chordas GF & IH bifariam atque ad angulos rectos (§. 291. *Geom.*). Cum adeo anguli ad D & E sint æquales (§. 145. *Geom.*) & GD = DF, IE = EH *per demonstrata*; erit AG

= AF & AI = AH (§. 179. *Geom.*), consequenter A polus circulorum GNF & IMH (§. 12) & B alter eorundem polus (§. 23). *Quod erat primum.*

Si A fuerit polus circulorum GNF & IMH; erunt chordæ AG & AF, itemque AI & AH (§. 12), adeoque etiam arcus cognomines (§. 298. *Geom.*) consequenter arcus FH & GI (§. 91. *Arithm.*) æquales. Sunt itaque circuli GNF & IMH paralleli (§. 40). *Quod erat secundum.*

Quia circuli paralleli GNF & IMH eundem habent polum A *per demonstr.* erunt rectæ AF & AG, itemque AH & AI (§. 12), adeoque & arcus cognomines æquales (§. 298. *Geom.*). Sunt igitur etiam arcus FH & GI æquales (§. 91. *Arith.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 21.

Tab. 1. Fig. 9. 43. *Si circulus in sphæra* AEBF *alterum* CEDF *secet, anguli sphærici, qui sunt deinceps,* AEC *&* AED *sunt æquales duobus rectis, verticales vero* AEC *&* DEB *æquales inter se. Prius etiam valet de pluribus super eodem arcu* CED *ad idem punctum* E *constitutis.*

DEMONSTRATIO.

Communis intersectio EF est subtensa arcuum EAF & ECF, itemque FBE & EDF. Quodsi jam per G ducantur ad EF perpendiculares AB & CD, erit angulus AGC inclinatio plani AEGF ad planum CEGF & AGD inclinatio ejusdem plani AEGF ad planum DEGF, angulus denique BGD inclinatio plani BEGF ad planum DEGF (§. 476. *Geom.*). Sunt igitur anguli sphærici AEC, AED, DEB ut anguli rectilinei AGC, AGD, BGD (§. 5). Sed anguli rectilinei AGC & AGD sunt æquales duobus rectis, etiamsi plures ad idem punctum G super eadem recta CD constituti (§. 147. *Geom.*) & verticales AGC & BGD inter se æquales (§. 156. *Geom.*). Ergo etiam anguli sphærici AEC & AED aut plures ad idem punctum E super eodem arcu CD constituti duobus rectis æquales & verticales AEC & DEB inter se æquales sunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

44. Anguli igitur sphærici quotcunque AEC, AED, DEB, BEC circa idem punctum E constituti sunt quatuor rectis æquales.

THEOREMA 22.

45. *Arcus circuli paralleli* IG *est similis arcui circuli maximi* AE, *si uterque inter eosdem circulos maximos* CAF *&* CEF *intercipiatur.* Tab. I. Fig. 1.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quia AEB circulus maximus, cujus poli F & C, erit in D centrum ejus & sphæræ (§. 15. & §. 23) & CE quadrans (§. 25), consequenter EDC rectus. Quoniam GK parallela ipsi ED & IK ipsi AD *per hypoth.* erunt quoque GK & IK ad CF perpendiculares (230. *Geom.*), adeoque anguli IKG & ADE æquales (§. 509. *Geom.*). Sunt itaque arcus AE & IG similes (§. 141. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

46. Habent adeo arcus AE & IG ad suas peripherias eandem rationem (§. 170. *Arithm.*), consequenter eundem numerum graduum continent (§. 41. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

47. Arcus IG minor est arcu AE.

LEMMA 1.

Tab. I. Fig. 10. 48. *Si duæ fuerint curvæ quæcunque* ACDB *&* AEFGB *versus eandem rectam* AB *cavæ, continens* AEFGB *major est contenta* ACDB.

DEMONSTRATIO.

Ducantur in curva contenta chordæ quotcunque AC, CD, DB: producatur BD in E, donec curvæ continenti occurrat, ducanturque chordæ intra continentem AE, EF, FG, GB, FB.

Quoniam AE + ED > AC + CD (§. 300. *Geom.*)
EF + FB > ED + DB (§. 190. *Geom.*)
FG + GB > FB (§. 190 *Geom.*)

erit AE + ED + EF + FB + FG + GB > AC + CD + ED + DB + FB (§. 90. *Arithm.*), adeoque AE + EF + FG + GB > AC + CD + DB (§. 92. *Arithm.*).

Ergo multo magis curva continens AEFGB major contenta ACDB (§. 91. *Geom.*). *Q. e. d.*

LEMMA 2.

49. *Si in duobus triangulis rectangulis* GDB *&* ACG *bases æquales* AG *&* GB *habentibus hypothenusa unius* DB *fuerit major hypothenusa alterius* AC, *etiam cathetus illius* DG *major erit catheto alterius* GC. Tab. I. Fig. 11.

DEMOSTRATIO.

Quoniam DB > AC *per hypoth.* erit $DB^2 > AC^2$ (§. 374. *Geom.*). Cumque sit $DB^2 = GB^2 + DG^2$ atque $AC^2 = AG^2 + GC^2$ (§. 417. *Geom.*); erit etiam $GB^2 + DG^2 > AG^2 + GC^2$ (§. 89. *Arithm.*). Quare cum sit AG = GB *per hypoth.*

 adeo-

adeoque $AG^2=GB^2$ (§.374. *Geom*), erit etiam $GD^2 > GC^2$ (§. 92. *Arithm.*), consequenter $GD > GC$ (§. 374. *Geom.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Concipiamus Δ GDB, poni super Δ AGC, ita ut GB cadat in GA. Quoniam $GB = AG$ *per hypoth.* punctum B cadet in A (§. 169. *Geom.*). Et quia anguli recti BGD & AGD æquales sunt; cathetus GD cadet in GC (§. 166. *Geom.*). Jam anguli ADG & ACG sunt acuti (§. 218. *Geom.*), ACH & ADH vero obtusi (§. 239. 66. *Geom.*). Quare cum sit $AD > AC$ *per hypoth.*), punctum D ultra C cadet (§. 189. *Geom.*). Est igitur $GD > GC$ (§. 84. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

50. Quodsi ergo duo circuli se mutuo intersecent in A & B, quia recta ad medium chordæ communis AB perpendicularis GH per utriusque centrum transit (§. 291. *Geom.*) & majoris radius AD major est radio minoris AC (§. 172. *Geom.*); distantia vero puncti a recta est recta ad illam perpendicularis (§. 225. *Geom.*); distantia centri majoris circuli DG a chorda communi AB major erit distantia centri minoris GC.

LEMMA 3.

51. *Si circulus minor* AFBA *majorem* AEBA *secat, arcus majoris* AEB *semicirculo minor inter chordam communem* AB *& arcum minoris* AFB *semicirculo itidem minorem cadit.* Tab. I. Fig. 11.

DEMONSTRATIO.

Ponamus AFB esse arcum circuli majoris: quia centrum majoris D a chorda AB longius distat, quam centrum minoris C (§. 50); erit $AD = DF$ & $AC = CE$ (§. 40. *Geom.*), adeoque $DAF = DFA$ & $CAE = CEA$ (§. 184. *Geom.*). Est vero $CEA > CFA$ (§ 188. *Geom.*), ergo $CAE > DAF$ (§. 87. *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*), AFB arcus circuli minoris, AEB vero majoris esse debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

52. Quia duo circuli communem chordam habentes sibi mutuo ita superimponi possunt, ut se mutuo secent; eadem chorda AB ex circulo majori arcum minorem AEB aufert, ex minore autem majorem AFB, si uterque arcus fuerit semicirculo minor (§. 48).

THEOREMA 23.

53. *Arcus circuli maximi est linea brevissima, quæ in superficie sphæ-*

sphæræ ab uno puncto usque ad alterum duci potest.

DEMONSTRATIO.

Si sphæra secetur plano, planum istud vel per centrum sphæræ transit, vel centrum non attingit. In priori casu linea ab uno puncto ad alterum in superficie sphæræ ducta est arcus circuli maximi, in posteriori arcus minoris (§. 15). Quare si sphæra plano secatur, linea brevissima inter duo puncta intercepta est arcus circuli maximi (§. 52). Quodsi vero superficie curva secetur, cujus perimeter versus unam partem cava, versus alteram convexa; tum linea, quæ in superficie sphæræ per duo puncta data transit, necessario versus arcum circuli maximi cava est, consequenter arcus circuli maximi minor est curva quacunque versus eandem partem cava (§. 48). Quoniam vero per se patet, curvam flexuosam ab uno puncto usque ad alterum ductam esse majorem arcu circuli maximi inter eadem puncta contento; arcus circuli maximi est linea omnium brevissima, quæ in sphæræ superficie a puncto uno ad alterum duci potest. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

54. Ergo distantia duorum punctorum in superficie sphæræ est arcus circuli maximi inter ea interceptus (§. 15. *Geom.*)

CAPUT II.

DE

TRIANGULIS SPHÆRICIS.

THEOREMA 24.

Tab. I. Fig. 12. 55. *Si in duobus triangulis sphæricis fuerit* A = a, BA = ba & CA = ca; *erit etiam* BC = bc, B = b & C = c.

DEMONSTRATIO.

Non differt a demonstratione theorematis 19. Geometriæ (§. 179).

THEOREMA 25.

56. *Si in duobus triangulis sphæricis fuerit* A = a, C = c & AC = ac; *erit etiam* B = b, AB = ab & BC = bc. Tab. I. Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum demonstratione theorematis 43. Geometriæ (§. 251).

SCHOLION.

57. *Nimirum theoremata de congruentia triangulorum rectilineorum ad quævis alia curvilinea extenduntur, modo latera supponantur similia, e. gr. similes arcus parabolici. Quodsi enim ulterius supponantur æqualia, tum illique congruere debent* (§. 162. Geom.). *Universaliter etiam verum est; quod similes lineæ, quarum extrema coincidunt, totæ coincidant seu æquales sint: alias enim perpendicula ex punctis eodem modo determinatis ad rectam positione datam demissa non forent æqualia, consequenter illæ per eorum rationem ad rectam quandam constantem discerni possent, adeoque similes non forent* (§. 24. Arithm.), *quod hypothesin evertit.*

THEOREMA 26.

Tab. I. Fig. 12. 58. *Si in duobus triangulis sphæricis fuerit* AB = ab, AC = ac, BC = bc; *erit etiam* A = a, B = b, C = c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab*, AC & *ac*, BC & *bc* æquales sunt, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289. *Geom.*). Ergo triangulum rectilineum *abc* congruit cum triangulo ABC, si eidem decenter superimponatur (§. 204. *Geom.*), consequenter etiam sphærica sibi mutuo congruere debent (§. 57). *Q. e. d.*

THEOREMA 27.

59. *In triangulo æquicruro* ABC *anguli ad basin* B & C *sunt æquales & si in aliquo triangulo anguli* B & C *ad basin* BC *æquales sunt, triangulum* ABC *est æquicrurum.* Tab. I. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Fiat AD = AE, erit BD = EC (§. 91. *Arithm.*). Per C & D, itemque per B & E ducantur arcus circulorum maximorum CD & BE. Quoniam AC = AB *per hypoth.* & AD = AE *per constr.* angulus vero A utrique triangulo ABE & ACD communis; erit DC = BE (§. 55). Quare cum etiam sit EC = BD *per demonstrata* & basis BC utrique triangulo BDC & BEC communis; erit B = C (§. 58). *Quod erat unum.*

Sit jam B = C *per hypoth.* Fiat BD = CE ducanturque arcus BE & CD; erit DC = BE, *x* = *o* & *m* = *n* (§. 55), consequenter *u* = *y* (§. 43) & *i* = *h* (§. 91. *Arithm.*). Cum adeo sit DA = AE (§. 55) & BD = EC *per construct.* erit AB = AC (§. 88. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

60. *Facile apparet, hanc demonstrationem valere de omni triangulo, cujus latera sunt lineæ similes.*

THEOREMA 28.

Tab. I. Fig. 14. 61. *In omni triangulo sphærico quodlibet latus est semicirculo minus.*

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB & AC, donec sibi mutuo occurrant in D. Continuentur quoque latera BA & BC, donec sibi muto occurrant in E. Quoniam latera trianguli sunt arcus circulorum maximorum in sphæra (§. 5); ABD, ACD & BCE sunt semicirculi (§. 20). Ergo arcus AB, AC & BC sunt semicirculo minores. *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

Tab. I. Fig. 15. 62. *In omni triangulo sphærico* BAC *duo latera* AB & AC *simul sumta sunt tertio* BC *majora.*

DEMONSTRATIO.

Compleatur latus unum AC in circulum AFC, cujus diameter AF. Fiat AD = AB ducaturque arcus DAC subtensa DC, quæ diametrum AF in E secabit. Quodsi concipiamus semicirculum ADF rotari circa axem AF, donec arcus AD ipsi AB congruat (§. 57), recta ED ipsi EB congruet, adeoq; æqualis erit. Sed BE + EC $>$ BC (190. *Geom.*). Ergo DC $>$ BC (§. 89 *Arithm.*), consequenter arcus DAC, hoc est, duo arcus AB & AC simul sumti sunt arcu BC majores (§. 301. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

Tab. I. Fig. 14. 63. *In omni triangulo sphærico* ABC *tria latera junctim sumta* AB, BC & CA *sunt peripheria circuli maximi minora.*

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB & AC, donec coëant in D, erunt ABD & ACD semiperipheriæ circulorum maximorum (§. 20). Sed BD + CD $>$ BC (§. 62), seu BC $<$ BD + CD: ergo BA + AC + BC $<$ ABD + ACD (§. 90. *Arithm.*), hoc est, tria latera simul sumta peripheria circuli maximi minora sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 31.

Tab. I. Fig. 14. 64. *In omni triangulo sphærico* ABC *majori angulo* ABC *opponitur majus latus* AC, *minori* A *latus minus* BC *& contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus ABC $>$ A *per hypoth.* Si fiat $o = x$ (§. 10. *Arithm.*): erit FA = FB (§. 59), adeoque FB + FC = AC (§. 80. *Arithm.*). Est vero FB + FC $>$ BC (§. 62): ergo AC $>$ BC (§. 89. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Sit jam AC $>$ BC: aut erit A = B, aut A $>$ B, aut A $<$ B. Si A = B, erit AC = BC (§. 59) & si A $>$ B, erit BC $>$ AC *per demonstrata.*

Sed

Sed utrumque est contra hypothesin: ergo $A < B$. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 32.

Tab. I. Fig. 14. 65. *Si in triangulo sphærico BAC crura AB & BC fuerint simul sumta semicirculo æqualia, basi AC continuata in D, erit angulus externus BCD interno opposito BAC æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB & AC donec sibi mutuo occurrant in D: erit ABD semicirculus (§. 20), consequenter cum $AB + BC$ sit itidem semicirculus, *per hypoth.* $AB + BC = AB + BD$, adeoque $BC = BD$ (§. 91. *Arithm.*). Cum adeo sit angulus $BCD = D$ (§. 59) & $A = D$ (§. 32); erit etiam $BCD = A$ (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 33.

Tab. I. Fig. 14. 66. *Si in triangulo sphærico* BAC *duo crura* AB & BC *simul sumta fuerint semicirculo minora, angulus externus* BCD *major erit interno opposito* A.

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB & AC, donec sibi mutuo in D occurrant: erit ABD semicirculus (§. 20), consequenter cum $AB + BC$ sit semicirculo minor, *per hypoth.* $AB + BC < AB + BD$, adeoque $BC < BD$ (§. 92. *Arithm.*). Cum adeo sit angulus $BCD > D$ (§. 64) & $D = A$ (§. 32); erit etiam $BCD > A$ (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 34.

67. *Si in triangulo sphærico* BAC *duo crura* AB & BC *simul sumta fuerint semicirculo maiora; angulus externus* BCD *minor erit interno opposito* A. Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB & AC, donec sibi mutuo occurrant in D; erit ABD semicirculus (§. 20), consequenter cum $AB + BC$ sit semicirculo major *per hypoth.* $AB + BC > AB + BD$ adeoque $BC > BD$ (§. 92. *Arithm.*). Cum adeo sit $BCD < D$ (§. 64) & $D = A$ (§. 32), erit etiam $BCD < A$ (§. 87. *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 35.

68. *Si basi* AC *trianguli sphærici* ABC *continuata in* D, *fuerit* $BCD = A$, *latera* AB & BC *sunt semicirculo æqualia; si* $BCD < A$, AB & BC *semicirculo majora; si denique* $BCD > A$, AB & BC semicirculo minora. Tab. Fig. I. 14.

DEMONSTRATIO.

Continuentur latera AB, & AC, donec in D coëant: erit $A = D$ (§. 32).

(§. 32), adeoque cum sit in casu primo angulus BCD ipsi A æqualis, in secundo eodem minor, in tertio major *per hypoth.* in casu primo BCD = D (§. 87. *Arithm.*), in secundo BCD < D, in tertio BCD > D (§. 89. *Arithm.*). Ergo in primo BC = BD (§. 59), in secundo BC > BD & in tertio BC < BD (§. 64). Quare cum AB + BD sit semicirculus (§. 20), erit in casu primo AB + BC semicirculus (§. 88. *Arithm.*), in secundo AB + BC major, in tertio minor semicirculo (§. 90. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

Tab. I. Fig. 14. 69. *Si in triangulo sphærico* ABC *duo latera* AB *&* BC *fuerint semicirculo æqualia, anguli ad basin* A *&* C *sunt æquales duobus rectis; si illa semicirculo majora, hi duobus rectis majores; si illa semicirculo minora, hi duobus rectis minores.*

DEMONSTRATIO.

Si AB & BC simul æquantur semicirculo, erit BCD = A (§. 65). Sed BCD + BCA = duobus rectis (§. 43). Ergo anguli ad basin A & C duobus rectis æquales (§. 88. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si AB & BC simul sumta semicirculo majora, erit BCD < A (§. 67); si minora, BCD > A (§. 66). Sed BCD & BCA simul duobus rectis æquales (§. 43). Ergo in casu priori A & C duobus rectis majores, in posteriori minores (§. 90. *Arithm.*). *Quod erat secundum & tertium.*

THEOREMA 37.

70. *Si in triangulo sphærico* ABC *anguli ad basin* A *&* C *duobus rectis æquales, latera* AB *&* BC *simul sumta æqualia sunt semicirculo; si illi duobus rectis majores, hæc semicirculo majora; si illi duobus rectis minores, hæc semicirculo minora.* Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Anguli, qui sunt deinceps, BCA & BCD duobus rectis æquales sunt (§. 43). Quare si A & BCA duobus rectis æquales, erit A = BCD (§. 91. *Arithm.*); si A & BCA duobus rectis majores, erit A > BCD; si minores, A < BCD (§. 92. *Arithm.*). Ergo in casu primo latera AB & BC simul semicirculo æqualia sunt, in secundo majora, in tertio minora semicirculo (§. 68). *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

71. *In omni triangulo sphærico* ABC *angulus quivis est minor duobus rectis; tres* A, B *&* C *simul* Tab. I. Fig. 14.

sunt sex rectis minores, duobus majores.

DEMONSTRATIO.

Angulus quivis BCA cum eo, qui est deinceps, BCD æquatur duobus rectis (§. 43). Ergo solus est minor duobus rectis (§. 84. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter quia A, B & C cum suis angulis, qui sunt deinceps, æquantur sex rectis (§. 43); pars sex rectorum sunt (§. 9. *Arithm.*) adeoque sex rectis minores (§. 84. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Porro cum A & C simul sumti vel sint duobus rectis æquales, vel iisdem majores, vel minores (§. 69); in duobus casibus prioribus statim patet, tres A, C & B simul duobus rectis majores esse. Quod vero etiam in casu tertio duobus rectis majores sint, ita demonstratur. Quia A & BCA duobus rectis minores *per hypoth.* latera AB & BC simul semicirculo minora sunt (§. 70), adeoque BCD > A (§. 66). Fiat ergo GCD=A: erunt AG & GC simul semicirculo æqualia (§. 68), adeoque BG & GC semicirculo minora (§. 90. *Arithm.*), consequenter GBC & BCG duobus rectis minores (§. 69) & hinc ABC > BCG (§. 43. *Sphæric.* & §. 91. *Arithm.*). Ergo A + ABC > GCD + GCB (§. 90. *Arithm.*). > BCD (§. 86. & §. 89. *Arithm.*). Sed BCD & BCA simul duobus rectis æquales (§. 43). Quare A, ABC & BCA duobus rectis majores (§. 90. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 39.

72. *Si in triangulo sphærico* BAC *crura* AB *&* AC *sint quadrantes, anguli ad basin* B *&* C *recti erunt; quodsi angulus interceptus* A *fuerit rectus, etiam basis* BC *quadrans erit; si* A *obtusus,* BC *quadrante major; si* A *acutus,* BC *quadrante minor.* Tab. I. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & BC sunt quadrantes, anguli B & C inter se æquales (§. 59) & junctim sumti duobus rectis æquales sunt (§. 69). Est igitur tam B, quam C rectus. *Quod erat unum.*

Similiter quia AB quadrans *per hypoth.* BC est mensura anguli A (§. 33). Quare si A rectus, erit BC quadrans; si obtusus, quadrante major; si acutus, quadrante minor. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 40.

73. *Si in triangulo sphærico* BAC *anguli ad basin* B *&* C *fuerint recti; crura* AB *&* CA *sunt quadrantes.* Tab. I. Fig. 13.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quia anguli B & C sunt inter se æquales, *per hypoth.* crura AB & CA æqualia sunt (§. 59). Et quia B & C simul duobus rectis æquales *per hypoth.* AB & CA simul semicirculo æqualia sunt (§. 70). Est igitur tam AB, quam AC quadrans. *Q. e. d.*

THEOREMA 41.

Tab. I. Fig. 13. 74. *Si in triangulo sphærico æquicruro* ABC *crura* AB & AC *fuerint quadrante majora, anguli ad basin* B & C *sunt obtusi: si minora, acuti & contra.*

DEMONSTRATIO.

Si AB & AC quadrante majora, erunt simul semicirculo majora, adeoque anguli B & C simul duobus rectis majores (§. 69), consequenter tam B, quam C recto major (§. 59), hoc est, obtusus *Quod erat unum.*

Si AB & AC quadrante minora, erunt simul semicirculo minora, adeoque anguli B & C simul duobus rectis minores (§. 69), consequenter tam B, quam C recto minor (§. 59), hoc est, acutus. *Quod erat alterum.*

Conversum theorema simili prorsus modo demonstratur. Si enim triangulum æquicrurum, anguli B & C sunt æquales (§. 59), adeoque simul sumti duobus rectis majores, si uterque obtusus, & ex adverso duobus rectis minores, si uterque acutus. Ergo in priori casu latera AB & AC simul semicirculo majora, in posteriori minora (§. 70), consequenter tam AB, quam AC in priori quadrante majus, in posteriori quadrante minus. *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

75. *Si in triangulo sphærico rectangulo angulo recto* B *adjacens latus* BC *fuerit quadrans, erit angulus* A *rectus, si* BE *quadrante majus, angulus* A *obtusus; si denique* BD *quadrante minus, angulus* A *acutus.* Tab. II. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Quia CB ipsi BA ad angulos rectos insistit, circulus, cujus arcus CB, per polum ejus transit, ad quem BA pertinet (§. 28). Est vero BC quadrans *per hypoth.* Ergo in C est polus ipsius BA (§. 25). Cum adeo CA itidem per polum ipsius BA transeat (§. 27); erit A angulus rectus (§. 28). *Quod erat unum.*

Jam si BD quadrante minus, BE vero quadrante majus, in casu priore AD inter B & C, in posteriore AE ultra C cadit, adeoque in illo angulus BAD recto BAC minor, in hoc major est (§. 84. *Arithm.*), hoc

est, in illo acutus, in hoc obtusus. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 43.

Tab. II. Fig. 16. 76. *Si in triangulo sphærico* ABC *ad* B *rectangulo angulus* A *fuerit obtusus, erit latus ipsi oppositum* EB *quadrante majus: si vero in triangulo* ABD *ad* B *rectangulo angulus* A *fuerit acutus, erit latus ipsi oppositum* BD *quadrante minus.*

DEMONSTRATIO.

Si enim latus BE esset vel quadrans, vel quadrante minus, angulus A esset in priori casu rectus, in altero acutus (§. 75). Sed *per hypothesin* obtusus est: ergo BE nec quadrans est, nec quadrante minus, consequenter quadrante majus. *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, si A fuerit angulus acutus, fore BD quadrante minus. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 44.

Tab. I. Fig. 17. Tab. II. Fig. 18. 77. *Si in triangulo sphærico* ABC *ad* B *rectangulo utrumque crus* AB *&* BC *fuerit vel quadrante minus, vel quadrante majus; hypothenusa* AC *erit quadrante minor.*

DEMONSTRATIO.

Continuentur crura CB & AB quadrante minora in F & D, donec CF & BD fuerint quadrantes, vel si CB & AB quadrante majora, resecentur quadrantes CF & BD ducaturque arcus DF hypothenusæ continuatæ in E occurrens. Quia DB secat CB ad angulos rectos, per polum ipsius transit (§. 28). Quare cum BD sit quadrans, *per constructionem*; erit in D polus quadrantis CF (§. 25), adeoque etiam angulus ad F rectus (§. 28): unde eodem modo patet, esse quoque in C polum ipsius DF, consequenter CE quadrantem (§. 25). Ergo CA quadrante minor, (§. 84. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

78. *Si in triangulo sphærico* ABC *ad* B *rectangulo duo anguli reliqui* A *&* C *fuerint vel ambo acuti, vel obtusi; hypothenusa* AC *quadrante minor.* Tab. I. Fig. 17. Tab. II. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

Si enim A & C fuerint acuti, erunt latera opposita BC & AB quadrante minora; si A & C obtusi, latera opposita BC & AB quadrante majora (§. 76). Ergo in utroque casu hypothenusa AC quadrante minor (§. 77). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

79. *Si in triangulo sphærico* ABC *ad* B *rectangulo latus unum* AB *fuerit* Tab. II. Fig. 19.

rit quadrante minus, *alterum* CB *quadrante majus*; *hypothenusa* AC *erit quadrante major*.

DEMONSTRATIO.

Continuetur AB in E, donec BE sit quadrans & ex latere BC resecetur quadrans CF, ducaturque arcus EF secans hypothenusam necessario in D. Quoniam EB secat CB ad angulos rectos *per hypoth.* per polum ipsius transit (§. 28). Quare cum BE sit quadrans, erit in E polus ipsius CF (§. 25); adeoque etiam angulus ad F rectus (§. 28): unde eodem modo patet, esse quoque in C polum ipsius EF, consequenter CD quadrantem (§. 25). Ergo CA quadrante major (§. 84. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

Tab. II. Fig. 19. 80. *Si in triangulo sphaerico* ABC *ad* B *rectangulo angulus unus* C *fuerit acutus, alter* A *obtusus: erit hypothenusa* AC *quadrante major.*

DEMOSTRATIO.

Quia A recto major, C minor, *per hypoth.* erit latus BC majus, AB vero minus quadrante (§. 76). Ergo hypothenusa AC quadrante major (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 48.

Tab. II. Fig. 19. 81. *Si in triangulo sphaerico* ABC *ad* B *tantum rectangulo hypothenusa* AC *sit quadrante minor, erunt crura* AB *&* BC *vel quadrante majora, vel minora, & anguli* A *&* C *vel obtusi, vel acuti: si vero hypothenusa* AC *quadrante major, crus alterum* BC *quadrante majus & angulus ipsi oppositus* A *obtusus; alterum* AB *quadrante minus & angulus eidem oppositus* C *acutus.*

DEMONSTRATIO.

Si enim in priore casu crus unum foret quadrante majus, alterum minus, & angulorum alter obtusus, alter acutus; tum hypothenusa necessario foret quadrante major (§. 79 & 80). Sed *per hypothesin* quadrante minor existit; ergo crus unum quadrante majus, alterum minus esse nequit, nec angulorum alter obtusus, alter acutus esse potest. Est igitur latus utrumque aut quadrante majus, aut eodem minus, & angulus uterque vel obtusus, vel acutus. *Quod erat unum.*

Non absimili modo ostenditur, si hypothenusa quadrante major, fore latus alterum quadrante majus, alterum minus; angulum alterum recto majorem, alterum minorem. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 49.

Tab. II. Fig. 20. 82. *Si in triangulo sphærico obliquangulo* ACB *angulus ad basin uterque* A *&* B *fuerit vel obtusus, vel acutus, perpendiculum* CD *ex angulo tertio* C *in latus oppositum* AB *demissum intra triangulum; si unus* B *obtusus, alter* A *acutus, extra illud cadit.*

DEMONSTRATIO.

Cadat enim, si fieri potest, in casu primo perpendiculum CF extra triangulum ACB. Quoniam in triangulo ACF angulus A obtusus *per hypoth.* erit CF quadrante majus (§. 76); consequenter in triangulo CBF angulus *o* obtusus (§. 75). Sed quia *x* est obtusus, *per hypoth.* erit *o* acutus (§. 43). Quare cum angulus *o* non simul acutus & obtusus esse possit, perpendiculum extra triangulum cadere nequit. Cadit ergo intra ipsum. *Quod erat primum.*

Cadat porro in secundo casu, si fieri potest, perpendiculum CF extra triangulum ACB. Quoniam angulus A acutus *per hypoth.* erit CF quadrante minus (§. 76), consequenter in triangulo CBF angulus *o* acutus (§. 75). Sed quia *x* est acutus *per hypoth.* erit *o* obtusus (§. 43). Quare cum angulus *o* non simul acutus & obtusus esse possit, perpendiculum intra triangulum cadat necesse est. *Quod erat secundum.*

Denique in tertio casu, ubi angulus CBA obtusus, alter A acutus, cadat, si fieri potest, perpendiculum CD intra triangulum ACB. Quoniam angulus *x* est obtusus, *per hypoth.* erit latus CD quadrante majus (§. 76). Sed quia in triangulo ACD *per hypoth.* rectangulo ad D angulus A acutus *per hypoth.* erit idem latus CD quadrante minus (§. 76): quod cum sit absurdum, perpendiculum intra triangulum cadere nequit. Cadit ergo extra illud. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 50.

83. *Distantia puncti* A *in sphæra a circulo maximo vel minore* BC *est arcus circuli maximi* AD *ad ipsum perpendicularis.* Tab. II. Fig. 16.

DEMONSTRATIO.

Si arcus perpendicularis AD fuerit quadrans; erit in A polus circuli maximi BC (§. 26), adeoque omnes arcus circulorum maximorum inter punctum A & circulum BC intercepti sunt quadrantes (§. 25). Quodsi AD fuerit quadrante minor; erit angulus B recto minor

nor (§. 75), adeoque AD < AB (§. 64). Minor adeo arcus circuli maximi quam AD inter A & BC in utroque casu intercipi nequit. Quare cum arcus circuli maximi AD sit linea brevissima, quæ in superficie sphæræ ab uno puncto ad alterum duci potest (§. 53); erit is distantia puncti A a circulo BC (§ 15. *Geom.*). *Quod erat unum.*

Quodsi OG fuerit circulus minor, CB maximus, A utriusque polus: erit arcus AD tam ad OG, quam ad BC perpendicularis (§. 28. 30). Cum adeo AD sit distantia puncti A a BC, & DH distantia puncti H ab eodem BC *per demonstrata*; erit AH distantia puncti A ab arcu OG. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 51.

Tab. II. Fig. 20. 84. *Si in triangulo sphærico* ACB *omnes anguli* A, B *&* C *sunt acuti; latera singula sunt quadrante minora.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex angulo uno C in latus AB perpendicularis CD, quæ intra triangulum cadit (§. 82). Cum itaque in triangulo rectangulo CDB angulus B sit acutus & DCB similiter acutus *per hypoth.*; erit hypothenusa CB quadrante minor (§. 78). Eodem modo constat, hypothenusam AC in triangulo rectangulo ADC esse quadrante minorem. Nec absimili ratiocinio colligitur, perpendiculo ex B in latus AC demisso, latus AB esse quadrante minus. Sunt igitur singula latera quadrante minora. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

85. Ergo si in triangulo sphærico obliquangulo latus unum sit quadrante majus, angulus unus est obtusus, (§. 84), nempe qui opponitur eidem lateri (§. 64).

THEOREMA 52.

86. *Si in triangulo sphærico* ACB *anguli duo* A *&* B *fuerint obtusi, tertius vero* C *acutus; latera* AC *&* CB *obtusis opposita sunt quadrante majora, quod vero opponitur acuto* AB, *quadrante minus.* Tab. II. Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex angulo acuto C perpendiculum CD in basin AB, quod intra triangulum cadet (§. 82). Quoniam *x* & *y* sunt anguli obtusi, *m* & *r* acuti *per hypoth.* in triangulis ACD & CDB ad D rectangulis *per constr.* erunt hypothenusæ AC & CB quadrante majores (§. 80). *Quod erat unum.*

Demittatur porro ex angulo obtuso A perpendiculum in CB, quod extra

extra triangulum cadet (§. 82). Continuetur perpendiculum AG donec lateri CB continuato in H occurrat; erit HG semicirculus (§. 20). Sed arcus CB quadrante major, *per demonstrata*: Ergo BG quadrante minor. Jam cum angulus *x* obtusus sit, *per hypoth.* erit *z* acutus (§. 43), adeoque perpendiculum AG quadrante minus (§. 76), consequenter AB quadrante minus (§. 77). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

87. Ergo si duo latera sunt quadrante minora, duo anguli sunt acuti.

THEOREMA 53.

Tab. II. Fig. 21. 88. *Si in triangulo sphærico* ABC *singula latera fuerint quadrante majora, vel duo* AB & AC *quadrante majora, tertium* BC *quadrans; singuli anguli sunt obtusi.*

DEMONSTRATIO.

Ex A tanquam polo intervallo quadrantis AD describatur circulus maximus DEF occurrens lateri BC producto in F; erunt anguli ad D & E recti (§. 18), & quia BC vel quadrans, vel quadrante majus, CF quadrante minus (§. 20) & BF quadrante majus in casu utroque, consequenter cum CE sit quadrante minus, quia AE quadrans, EF quadrante minus (§. 81). Unde angulus ECF acutus (§. 75), adeoque ipsi deinceps positus ACB obtusus (§. 43). Eodem prorsus modo ostenditur angulos reliquos B & A esse obtusos. *Q. e. d.*

THEOREMA 54.

89. *Si in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duo latera* AB & AC *sint quadrante minora, tertium* BC *quadrante majus; erit angulus* A, *qui maximo opponitur obtusus, reliqui duo* B & C *erunt acuti.* Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Producantur latera quadrante minora AB & AC, donec sibi mutuo occurrant in D, erunt latera BD & CD quadrante majora (§ 20) adeoque omnes anguli obtusi (§. 88), consequenter angulus A obtusus (§. 32) & ABC atque BCA acuti (§. 43). *Q. e. d.*

THEOREMA 55.

90. *Si trianguli sphærici* ABC *ad* A *rectanguli singula latera, quæ sunt quadrante minora, continuentur in* F, E & D, *donec fiant quadrantibus* CD, CE, AF *æquales; arcus circuli maximi* DF *transiens per puncta* F & D *est quadrans, arcum* CE *ad angulos rectos secat, & per punctum* E *transit.* Tab. II. Fig. 22.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quia FA secat AC ad angulos rectos *per hypoth.* FA per polum ipsius AC transit (§.28). Quare cum FA sit quadrans *per construct.* erit in F polus ipsius DC (§.25), consequenter FD quadrans est (*§. cit.*). *Quod erat primum.*

Porro quoniam DF transit per polum F arcus DC *per demonstrata*; DC vicissim per polum ipsius DF transit (*§.27*). Quare cum DC sit quadrans *per construct.* erit in C polus ipsius DF (§.25), consequenter CE quadrans (*§.cit.*) adeoque arcus DF per punctum E transit, EC etiam arcum EF ad angulos rectos secat (*§.28*). *Quod erat secundum & tertium.*

COROLLARIUM.

91. Quoniam DE est mensura anguli C (§.31) & DF quadrans (§.90); erit arcus EF complemento anguli C ad rectum æqualis. Similiter quia DA mensura anguli F (§.31) & DC quadrans (§ 90) erit angulus F complemento lateris AC æqualis.

C A P U T III.

DE

RESOLUTIONE TRIANGULORUM RECTANGULORUM.

DEFINITIO 9.

Tab. II. Fig. 23. 92. In triangulo sphærico rectangulo BAC *partem mediam* voco, quæ inter duas alias instar extremarum consideratas interjacet. Veluti si extremæ sumantur AB & BC, pars media erit angulus B.

DEFINITIO 10.

93. Quodsi partes, quæ instar extremarum considerantur, mediæ fuerint contiguæ, aut inter mediam & extremarum alteram angulus rectus A interjacet, *partes* illas *conjunctas* appello. E. gr. si B sit media, AB & BC erunt partes conjunctæ.

COROLLARIUM.

94. Quodsi ergo fuerit me-

media		erunt conjunctæ
1. AB		1. AC, B
2. B.		2. AB, BC
3. BC		3. B, C
4. C		4. BC, AC
5. AC		5. C, AB

DEFINITIO 11.

Tab. II. Fig. 23. 95. Si vero inter partes, quæ extremarum loco sunt, & inter mediam alia quædam præter rectum interjacet; tum eas *sejunctas* dicere soleo. E. gr. si B sit media, erunt AC & C sejunctæ: inter partem enim mediam B & extremam C interjacet hypothenusa BC; inter mediam B & alteram extremam AC præter rectum A, qui hic non attenditur, crus AB.

COROLLARIUM.

96. Quodsi ergo fuerit

media		erunt sejunctæ
1. AB		1. BC, C
2. B		2. AC, C
3. BC		3. AB, AC
4. C		4. B, AB
5. AC		5. BC, B

LEMMA 4.

97. *Si planum* EFC *ad planum* GFC *inclinetur, sintque* FG, EF & BI *ad* FI, BH *ad planum* FCG *perpendiculares; anguli* EFG & BIH *æquales sunt.* Tab. II. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Fiat FS = IB & ex S demittatur SR ad FG perpendicularis. Quoniam FE & BI perpendiculares ad FI, *per hypoth.* erit FI ipsi BS parallela (§. 26. *Geom.*) & BS tam ad FS, quam IB (§. 230. *Geom.*), consequenter etiam ad SR in plano FSR & ad BH in plano IBH perpendicularis (§. 484. *Geom.*). Quare cum BH sit perpendicularis ad planum GFC *per hypoth.* adeoque ad HR (§. 484. *Geom.*); erit HR ipsi BS parallela (§. 256. *Geom.*), consequenter SR = BH (§. 226. *Geom.*). Quare cum etiam sit FS = IB *per constr.* & angulus FSR & IBH recti *per demonstr.* adeoque æquales (§. 145. *Geom.*); erit angulus SFR alteri BIH æqualis (§. 179. *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 56.

98. *In triangulo sphærico* ABC *ad* A *rectangulo sinus totus est ad sinum hypothenusæ* BC *ut sinus anguli obliqui* C *ad sinum cruris sibi oppositi* AB, *vel ut sinus anguli* B *ad sinum cruris sibi oppositi* AC. Tab. II. Fig. 25.

DE-

DEMONSTRATIO.

Producantur latera CB in E, CA in D, AB in P, donec CE, CD, AP fiant quadrantes: circulus maximus DPNO transiens per D & P etiam transit per E (§. 90), estque ED mensura anguli C (§. 31). Quare si ad radios FD, FA & FC demittantur perpendiculares EG, BH & BI; erunt eædem sinus arcuum ED BA & BC (§. 2. *Trigon. plan.*) & cum ob quadrantem CE angulus EFC sit rectus (§. 143. *Geom.*) adeoque EF ad FC perpendicularis (§. 78. *Geom.*); erit angulus EFG alteri BIH æqualis (§. 97), consequenter ut FE sinus totus ad BI sinum hypothenusæ BC, ita EG sinus arcus ED seu anguli ACB ad BH sinum lateris sibi oppositi AB (§. 267. *Geom.*). Eodem modo ostenditur, quod sinus totus sit ad sinum BC uti sinus B ad sinum cruris AC.

Quodsi in triangulo QAB crus unum QA fuerit quadrante majus, erit etiam hypothenusa QB quadrante major (§. 79). Quare si arcus QD & QE fiant quadrantes & reliqua ut ante; in hoc etiam casu patet esse, sinum totum FE ad sinum BI hypothenusæ BQ, ut sinus EG anguli Q ipsi nempe C æqualis (§. 32) ad sinum BH cruris BA.

Denique si crura angulum rectum intercipientia fuerint OB & OE quadrante majora, erit hypothenusa BE quadrante minor (§. 77). Continuentur latera, donec se mutuo intersecent in P, erit angulus P ipsi O æqualis (§. 32), adeoque etiam rectus & PE atque PB erunt complementa crurum ad semicirculum (§. 18). Sed in triangulo BPE est ut sinus totus ad sinum hypothenusæ EB, ita sinus anguli B ad sinum cruris oppositi PE, ita etiam sinus anguli E ad sinum cruris oppositi PB, *per demonstrata*. Quare cum PE atque EO, PB atque BO, anguli ad B itemque ad E contigui eundem habeant sinum (§. 5. *Trigon. plan.*); erit etiam ut sinus totus ad sinum hypothenusæ BE, ita sinus EBO ad sinum EO, & sinus BEO ad sinum BO.

In omni adeo triangulo rectangulo sphærico, cujus nullum latus est quadrans, est ut sinus totus ad sinum hypothenusæ, ita sinus anguli obliqui, ad sinum lateris sibi oppositi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

99. Est ergo rectangulum ex sinu toto in sinum cruris unius æquale

rectangulo ex sinu anguli eidem oppositi in sinum hypothenusæ (§.378. *Geom.*).

THEOREMA 57.

Tab. II. Fig. 22. 100. *In omni triangulo sphærico rectangulo* ABC, *cujus latus nullum est quadrans, si crurum* AB *&* AC *complementa ad quadrantem considerentur ut crura ipsa rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ æquatur rectangulo ex sinibus partium sejunctarum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim pars media vel est crus alterutrum AB aut AC, vel hypothenusa BC, vel angulus obliquus alteruter B aut C, adeoque in primo casu partes sejunctæ sunt hypothenusa BC & angulus obliquus C vel B mediæ AB vel AC oppositus; in secundo crura AB & AC; in tertio angulus obliquus alter C aut B cum crure adjacente AC vel AB (§. 96).

I. Est vero in casu primo rectangulum ex sinu toto in sinum partis mediæ æquale rectangulo ex sinibus sejunctarum (§. 99) & cosinus complementorum ad quadrantem sunt sinus ipsorummet laterum (§. 11. *Trig. plan.*). Quare si pro cruribus AB & AC sumantur complementa ad quadrantem; erit rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ cruris AB vel AC æquale rectangulo ex sinibus sejunctarum hypothenusæ BC & anguli C vel B.

II. Si BC fuerit pars media & crura AB atque AC partes sejunctæ; continuentur singula trianguli latera in D, E & F, donec fiant quadrantes & per F ac D ducatur circulus maximus, erit DF quadrans & transibit etiam per E secabitque EC ad angulos rectos (§. 90). Erit vero F complemento cruris AC, EB complemento hypothenusæ BC & FB complemento cruris AB æqualis, *per construct.* Cum adeo rectangulum ex sinu toto in sinum EB sit æquale rectangulo ex sinibus anguli F & arcus BF, (§. 99); erit rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ BC æquale rectangulo ex sinibus sejunctarum AB & AC.

III. Si C pars media, AB & B partes sejunctæ, continuatis ut ante lateribus, erit EF complemento anguli C (§. 91) & EBF suo verticali ABC æqualis (§. 43). Quare cum sit rectangulum ex sinu toto in sinum arcus EF æquale rectangulo ex sinu anguli B in sinum arcus BF (§. 99); erit denuo rectangulum ex sinu toto

in

in cosinum partis mediæ C æquale rectangulo ex sinibus sejunctarum B & AB.

Patet adeo in omni casu, rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ æquari rectangulo ex sinibus sejunctarum, si complementis crurum AB & AC tanquam cruribus utaris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 27. 101. Si itaque sinus fuerint artificiales, seu naturalium logarithmi; erit sinus totus cum cosinu partis mediæ æqualis sinibus partium sejunctarum (§. 337. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

102. Quia in triangulo rectilineo rectangulo ABC sinus totus est ad hypothenusam BC ut sinus anguli B vel C ad sinum cruris oppositi AC vel AB (§. 33. *Trigon. plan.*), si pro laterum sinibus sumantur latera ipsa, erit etiam hic sinus totus cum cosinu partis mediæ AC vel AB, hoc est cum ipsa AC vel AB, æquale sinibus partium sejunctarum B vel C & BC, hoc est, sinui B vel C & ipsi BC.

SCHOLION.

103. *En* Regulam sinuum catholicam, *seu partem primam regulæ* Trigonometriæ catholicæ, *per quam omnia utriusque Trigonometriæ problemata solvuntur, quando sinibus solis res peragitur. Equidem haud difficulter apparet, eam sine theoremate 56 demonstrari potuisse, cum demonstratio additis iis, quæ in demonstratione casus primi theorematis 57 occurrunt, sit ipsa demonstratio casus primi completa; sed ut theoriam traderemus, quæ etiam vulgari methodo satisfaceret, una a nobis exponendæ, ideo theorema 56* (§. 98) *præmittere debuimus.* Neperus (a) *de istiusmodi regula catholica primus cogitavit; sed ipse utitur complementis hypothenusæ* BC, *& angulorum* B *ac* C Tab. II. *tanquam hypothenusa & angulis ipsis. Unde ipsius regula sinuum catholica hujus tenoris:* Sinus totus cum sinu par- Fig. 23. tis mediæ æquatur cosinibus partium oppositarum seu (*nostra phrasi*) sejunctarum. *In hac vero harmonia Trigonometriæ planæ & sphaericæ non apparet, a me per meam primum animadversa, quam inveneram, antequam* Neperianam *vidissem* (b), *cum nempe* Cl. Crugerus, *Mathematum Professor Bremensis mihi significaret, sibi communicatam esse a nonnemine regulam universalem, per quam omnes casus Trigonometriæ sphaericæ in triangulis rectangulis solvi possint, & quam instar arcani celabat nescius, eam a* Nepero *dudum in publicum esse emissam & a Scriptoribus Anglis passim adhiberi.*

LEMMA 5.

104. ***Sinus totus* CA *est medius proportionalis inter tangentem* AF *& cotangentem* DB.** Tab. II. Fig. 26.

(a) in Canone mirifico.
(b) Vid. præfat. ad Tabulas Sinuum a me editas.

DEMONSTRATIO.

Sit ACB quadrans & AF tangens anguli ACF; DB vero cotangens (§. 11. *Trigon.*). Quoniam contangens DB ad radium BC perpendicularis (§. 8. 11. *Trigon. plan.*) & AB mensura anguli ACB (§. 57. *Geom.*), adeoque angulus ACB rectus (§. 143. *Geom.*), consequenter AC ad CB itidem normalis (§. 78. *Geom.*); erunt AC & DB parallelæ (§. 256. *Geom.*). Quare si ex D demittatur perpendicularis DE, erit ea ipsi BC parallela (§. *cit.*), adeoque EC cotangenti DB, & DE sinui toti BC æqualis (§. 216. *Geom.*). Quare cum etiam FA sit ad AC perpendicularis (§. 8. *Trigon. plan.*) adeoque ipsi DE parallela (§. 256. *Geom.*); erit CE : ED = CA : AF (§. 268. *Geom.*), hoc est, DB : AC = AC : AF, *vi demonstratorum.* *Q. e. d.*

THEOREMA 58.

Tab. II. Fig. 25. 105. ***In triangulo sphærico rectangulo*** **ABC**, ***cujus nullum latus quadrans, est ut sinus totus ad sinum cruris adjacentis*** **AC**, ***ita tangens anguli adjacentis*** **C** ***ad tangentem cruris oppositi*** **AB.**

DEMONSTRATIO.

Producantur latera AB, AC & BC, in P, D & E, donec fiant quadrantes & erectis perpendicularibus DL & AM ad radios FD & FA ductaque AK ad radium FC perpendiculari; erit AK sinus cruris AC (§. 2. *Trigon. plag.*), AM tangens cruris AB & DL tangens arcus DE (§. 7. *Trigon. plan.*), hoc est, quia hic mensura anguli A (§. 31), DL tangens anguli A. Eodem vero, quo supra (§. 98), modo demonstratur, angulos DFL & AKM esse æquales. Quare cum triangula DFL & AKM sint ad D & A rectangula *per construct.* erit FD : KA = DL : AM (§. 267. *Geom.*). Et simili modo ostenditur, esse sinum totum ad sinum lateris AB ut tangentem anguli adjacentis B ad tangentem cruris oppositi AC, lateribus nempe in oppositum productis. In reliquis casibus idem ostenditur ut supra (§. 98). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

106. Quia cotangens anguli C est ad sinum totum ut sinus totus ad tangentem anguli C (§. 104), & ut sinus totus ad tangentem anguli C ita sinus AC ad tangentem AB (§. 105. *Sphær.* & §. 173. *Arithm.*); erit etiam cotangens anguli C ad sinum totum, ut sinus cruris eidem adjacentis AC ad tangentem oppositi AB (§. 167. *Arithm.*).

CO-

COROLLRIUM 2.

107. Est igitur rectangulum ex sinu toto in sinum cruris unius AC æquale rectangulo ex tangente cruris alterius AB in cotangentem anguli eidem oppositi C (§. 378. *Geom.*). Et similiter rectangulum ex sinu toto in sinum cruris AB æquale rectangulo ex tangente cruris AC in cotangentem anguli B.

THEOREMA 59.

Tab. II. Fig. 22. 108. *In omni triangulo sphærico rectangulo* ABC, *cujus nullum latus est quadrans, si crurum* AB *&* AC *complementa ad quadrantem vel excessus supra quadrantem considerentur ut crura ipsa, rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ æquale est rectangulo ex cotangentibus partium conjunctarum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim pars media vel est crus alterutrum AB vel AC, vel angulus obliquus alteruter B & C, vel hypothenusa BC, adeoque in illo casu partes conjunctæ sunt vel AC & B, vel AB & C; in isto vel AB & BC, vel AC & BC; in hoc denique B & C (§. 94).

I. In casu primo rectangulum ex sinu toto in sinum cruris AC æquale est rectangulo ex tangente cruris alterius AB in cotangentem anguli C (§. 107). Quare cum cosinus atque cotangens complementi ad quadrantem sit sinus & tangens ipsius anguli vel arcus (§. 11. *Trigon plan.*), si complementa crurum AC & AB ut crura ipsa considerentur; erit rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ AC æquale rectangulo ex cotangentibus partium conjunctarum AB & C.

II. Si C sit pars media, AC & BC sint partes conjunctæ; producantur latera in E, D & F, donec fiant quadrantes; erit angulus ad E rectus (§. 90), EF complemento anguli C, angulus vero F complemento cruris AC (§. 91) & BE complemento lateris BC æqualis *per construct.* Est vero rectangulum ex sinu toto in sinum EF æquale rectangulo ex cotangente F in tangentem EB (§. 107). Ergo rectangulum ex sinu toto in cosinum anguli C seu partis mediæ æquatur in hypothesi theorematis rectangulo ex cotangentibus laterum AC & BC, seu partium conjunctarum. Idemque productis lateribus trianguli ABC in oppositam partem eodem modo demonstratur, si angulus B fuerit pars media.

III. Si

III. Si denique BC fuerit pars media, B & C sint conjunctæ, producantur latera AB, AC & BC in K, I & H, donec BK, BI, AH fiant quadrantes & per H & K ducatur arcus circuli maximi HK, qui etiam transit per I. AI ad angulos rectos in I secat & quadrans est (§. 90). Quare cum KI sit mensura anguli B (§. 33), erit HI complementum anguli B. Porro CI complementum hypothenusæ BC *per construct.* & angulus HCI suo verticali BCA æqualis (§. 43). Est vero rectangulum ex sinu toto in sinum CI æquale rectangulo ex cotangente anguli C in tangentem HI (§. 107). Ergo rectangulum ex sinu toto in cosinum hypothenusæ BC seu partis mediæ æquatur rectangulo ex cotangentibus angulorum C & B, seu partium conjunctarum.

In omni adeo casu rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediæ æquale est rectangulo ex cotangentibus conjunctarum.

COROLLARIUM 1.

109. Si ergo sinus & tangentes fuerint artificiales; sinus totus cum cosinu partis mediæ æqualis est cotangentibus partium conjunctarum (§. 337. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

110. Cum in triangulo rectangulo rectilineo tangentibus utamur, si ex cruribus AB & AC inveniri debet angulus C, tumque sit sinus totus ad cotangentem C, hoc est ad tangentem B ut AB ad AC (§. 40. *Trigon. plan.*); in triangulo quoque rectilineo, si pro sinibus & tangentibus laterum sumantur latera ipsa, erit sinus totus cum cosinu partis mediæ, hoc est cum AC, æqualis cotangentibus partium conjunctarum, hoc est, cotangenti C seu tangenti B & lateri AB. Tab. II. Fig. 27.

SCHOLION 1.

111. *En* regulam Tangentium catholicam, *quæ partem alteram constituit regulæ* Trigonometriæ catholicæ, *per quam omnia utriusque Trigonometriæ problemata solvuntur, in quibus tangentibus opus est. Equidem apparet, eam sine theoremate* 58. (§. 105) *demonstrari potuisse, cum ejus demonstratio additis iis, quæ in Cor.* 1. (§. 106) *& in demonstratione theorematis* 59. (§. 108) *habentur, ipsa sit demonstratio casus primi theor.* 59. *completa: sed ob rationem supra allatam* (§. 103) *consultum nobis visum est theorema* 58. *distincte præmittere. Regula tangentium* Neperiana (c) *facit ob rationem supra itidem allatam* (§. 103) sinum totum cum sinu partis mediæ æqualem tangentibus partium circumpositarum seu (*nostra phrasi*) conjunctarum.

CO-

(c) in Canone mirifico.

COROLLARIUM 3.

112. Est igitur Trigonometriæ universæ regula catholica: *in triangulo rectangulo* (notatis notandis, hoc est, complementis crurum AB & AC instar crurum consideratis & in triangulis rectilineis pro sinibus & tangentibus laterum lateribus ipsis assumtis) *sinus totus cum cosinu partis mediæ æquatur sinibus partium sejunctarum & cotangentibus conjunctarum.*

SCHOLION 2.

113. *Quoad triangula rectilinea notandum, ex solis angulis datis de lateribus nil determinati concludi posse* (§. 267. Geom.) *& angulo uno obliquo dato alterum quoque notum esse* (§. 241. Geom.): *unde judicatur, quinam casus sint inutiles. Nec hoc negligendum est, non esse locum regulæ tangentium, si per regulam sinuum quæsitum inveniri potest. E. gr. Ex* BC *&* B *per regulam sinuum invenitur* AC, *etiamsi dentur* C *&* BC, *quia dato* C *datur quoque* B*: tum ergo tangentium regula locum non habet. Superest ut usum regulæ nostræ in triangulis sphæricis exemplis commonstremus.*

Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 1.

114. **Datis in triangulo rectangulo sphærico præter angulum rectum duabus partibus quibuscunque, invenire reliquarum quamlibet.**

RESOLUTIO.

I. *Per regulas vulgares.*

(Wolfii Math. Tom. 3.)

Tab. II. Fig. 22.

1. Ante omnia expendatur, utrum partes, quæ in quæstionem veniunt, sint sejunctæ, an conjunctæ (§. 94. 96).
2. Si partes sejunctæ sibi mutuo opponantur, veluti si hypothenusa BC cum angulo C pro crure opposito AB detur, utendum est analogia theorematis 56 (§. 98), inferendo nempe:

   ut sinus totus
   ad sinum hypothenusæ BC;
   Ita sinus anguli C
   ad sinum cruris oppositi AB.
3. Si vero partes sejunctæ sibi mutuo non opponantur, veluti si AB cum angulo adjacente B pro angulo opposito C detur, latera trianguli continuanda sunt versus partem alterutram, donec fiant quadrantes, ut obtineatur novum triangulum, in quo partes, quæ in quæstionem veniunt, sibi mutuo opponuntur, veluti in nostro casu triangulum EBF, in quo datur BF, cruris AB complementum, & angulus B pro EF complemento anguli C (§. 90. 91). Infertur adeo ut ante:

   Ut sinus totus
   ad sinum BF seu cosinum AB;
   ita sinus anguli B
   ad sinum EF seu cosinum C.

4. Si inter partes conjunctas hypothenusa non reperiat locum, veluti si crura AB & AC pro angulo uni eorum opposito C dentur; analogia theorematis 58, (§.105) utendum est, inferendo nempe:

Ut sinus AC
ad sinum totum;
itā tangens AB
ad tangentem C.

5. Si vero in numero partium conjunctarum hypothenusa fuerit, veluti si hypothenusa BC cum angulo C pro latere adjacente AC detur; latera trianguli versus partem alterutram continuanda sunt, donec fiant quadrantes, ut novum obtineatur triangulum, in quo hypothenusa inter partes, quæ in quæstionem veniunt, non comparet, e. gr. in nostro casu triangulum EBF, in quo EB complementum hypothenusæ BC, EF complementum anguli C & angulus F complementum cruris AC (§.90.91). Cum adeo in triangulo EFB hypothenusa in quæstionem non veniat, inferendum ut ante:

Ut sinus EF seu cosinus C
ad sinum totum;
Ita tangens EB seu cotangens BC
ad tangentem F seu cotangentem AC

6. Quando trianguli latera producenda, perinde est, in quamcunque partem eadem produxeris, si nullus angulus acutus in quæstionem veniat: quodsi unus quæstionem ingreditur, latera continuantur per angulum obliquum alterum: quodsi uterque sit in nexu, per eum continuantur, qui lateri, quod est in quæstione, adjacet. Hac enim ratione semper obtineri triangulum, in quo quæsitum per regulam vel sinuum, vel tangentium invenitur, inductione omnium casuum constat.

II. *Per regulam catholicam.*

1. Expendatur, ut ante, utrum partes, quæ in quæstionem veniunt, sint conjunctæ, an sejunctæ (§. 94. 96).

2. Si crus vel alterutrum, vel utrumque circa angulum rectum quæstionem ingreditur, pro eo inter data scribatur ejus complementum ad quadrantem.

3. Cum per regulam catholicam sinus totus cum cosinu partis mediæ æqualis sinibus sejunctarum, & cotangentibus conjunctarum; a summa datorum subtrahatur tertium datum, relinquetur sinus aliquis vel tangens, cui

cui in canone triangulorum artificiali respondet angulus, vel latus quæsitum.

SCHOLION.

115. *Quoniam regula catholica in posterum utemur, eandem ad omnes casus applicare & exemplis illustrare libet: quæ in casu partium sejunctarum vulgarem methodum unà illustrant, in casu autem conjunctarum alias solutiones admittunt. Utimur autem sinibus & tangentibus artificialibus.*

PROBLEMA 2.

Tab. II. Fig. 23. 116. *Datis hypothenusa* BC 60° *& angulo* C 23° 30′, *invenire crus oppositum* AB.

RESOLUTIO.

Quia AB pars media, C & BC sejunctæ (§. 96), sinus totus cum cosinu complementi AB, hoc est sinu ipsius AB æqualis est sinibus C & BC (§. 112).

Ergo à Sin. C	96006997
Sin. BC	99375306
Summa	195382303
subduc. Sin. tot.	100000000

relinquitur Sin. AB 95382303, cui in Canone quam proxime respondent 20° 12′ 6″.

PROBLEMA 3.

Tab. II. Fig. 23. 117. *Datis hypothenusa* BC 60° *& crure* AB 20° 12′ 6″ *invenire angulum oppositum* C.

RESOLUTIO.

Patet per probl. præc. à summa sinus totius & sinus cruris AB subtrahendum esse sinum hypothenusæ BC, ut relinquatur sinus anguli C. Facile adeo exemplum casus præcedentis mutatur in exemplum casus præsentis.

PROBLEMA 4.

118. *Datis crure* AB 20° 12′ 6″ *& angulo opposito* C 23° 30′, *invenire hypothenusam* BC. Tab. II. Fig. 23.

RESOLUTIO.

Patet per probl. 2, a summa sinus totius & sinus AB subtrahendum esse sinum anguli C, ut relinquatur sinus hypothenusæ BC. Exemplum casus primi facile mutatur in exemplum casus præsentis.

PROBLEMA 5.

119. *Datis hypothenusa* BC 60° *& crure uno* AB 20° 12′ 16″, *invenire crus alterum* AC. Tab. II. Fig. 23.

RESOLUTIO.

Quia BC est pars media, AB & AC partes sejunctæ (§. 96); sinus totus cum cosinu hypothenusæ BC, æqualis est sinibus complementorum, hoc est, cosinibus crurum AB & AC (§. 112).

Ergo a Sin.tot.	100000000
Cof.BC	96989700
Summa	196989700
subducatur Cof.AB	99724279

relinquitur Cof.AC: 97265421, cui in Canone quam proxime respondent 32° 11′ 34″. Ergo AC 57° 48′ 26″.

PROBLEMA 6.

120. *Datis cruribus* AC 57° 48′ 26″ *&* AB 20° 12′ 6″ *invenire hypothenusam* BC.

RESOLUTIO.

Patet per casum præcedentem, a summa cosinuum crurum AB & AC subducendum esse sinum totum ut relinquatur cosinus hypothenusæ BC. Exemplum casus præcedentis facile abit in casum præsentem.

PROBLEMA 7.

121. *Datis crure* AC 57° 48′ 26″ *& angulo adjacente* C 23° 30′, *invenire angulum oppositum* B.

RESOLUTIO.

Quia B est pars media, AC & C partes sejunctæ (§. 96); sinus totus cum cosinu B æquatur sinui C & sinui complementi, hoc est, cosinui AC (§. 112).

Ergo a Sin. C	96006997
Cosin. AC	97265421
Summa	193272418
subducatur Sin.tot.	100000000

relinquetur Cosin.B 93272418, cui in Canone quam proxime respondent 12° 15′ 56″. Ergo B 77° 44′ 4″.

PROBLEMA 8.

122. *Datis crure* AC 57° 48′ 26″ *& angulo opposito* B 77° 44′ 4″, *invenire adjacentem* C. Tab. II. Fig. 23.

RESOLUTIO.

Patet per casum præcedentem, a summa sinus totius & cosinu B subtrahendum esse cosinum AC, ut relinquatur sinus C. Exemplum ejus haud invitum transit in casum præsentem.

PROBLEMA 9.

123. *Datis angulis obliquis* B 77° 44′ 4″ *&* C 23° 30′, *invenire crus alteri adjacens* AC.

RESOLUTIO.

Patet per probl. 7. (§. 121), a summa sinus totius & cosinu B subtrahendum esse sinum C, ut relinquatur cosinus AC. Exemplum problematis septimi facile huc applicatur.

PROBLEMA 10. Tab. II.

124. *Datis crure* AC 57° 48′ 26″ *& an-* Fig. 23.

& angulo adjacente C 23° 30′, *invenire crus oppositum* AB.

RESOLUTIO.

Quia AC est pars media, C & AB partes conjunctæ (§.94); sinus totus cum cosinu complementi, hoc est, sinui AC, æqualis est cotangenti C & cotangenti complementi, hoc est, tangenti AB (§. 112).

Ergo a Sin.tot.		1000000000
	Sin. AC	99275039
	Summa	199275039
subducatur Cotang. C		103616981
relinquitur Tang. AB		95658058,

cui in Canone quam proxime respondent 20° 12′ 6″, prorsus ut supra (§. 116) reperimus.

PROBLEMA 11.

125. *Datis crure* AB 20° 12′ 6″ *& angulo opposito* C 23° 30′, *invenire crus adjacens* AC.

RESOLUTIO.

Patet per casum præcedentem, a summa cotangentis C & tangentis AB subtrahendum esse sinum totum, ut relinquatur sinus AC. Exemplum ibi propositum facile huc applicatur.

Tab. II. Fig. 23. PROBLEMA 12.

126. *Datis cruribus* AB 20° 12′ 6″ *&* AC 57° 48′ 26″, *invenire angulum* C *uni eorum oppositum.*

RESOLUTIO.

Patet per probl. 10 (§. 124), a summa sinus totius & sinus AC subtrahendum esse tangentem BA, ut relinquatur cotangens C. Exemplum ibi propositum facile huc applicatur.

PROBLEMA 13.

127. *Datis hypothenusa* BC 60° *& angulo obliquo* C 23° 30′ *invenire crus adjacens* AC.

RESOLUTIO.

Quia C pars media, BC & AC partes conjunctæ (§. 94); erit sinus totus cum cosinu C, æqualis cotangenti BC & cotangenti complementi, hoc est, tangenti AC (§. 112).

Ergo a Sin. tot.		100000000
	Cosin. C.	99623978
	Summa	199623978
subducatur Cotang. BC		97614394
relinquetur Tang. AC		102009584,

cui in Tabulis quam proxime respondent 57° 48′ 26″, prorsus ut supra reperimus (§. 119).

PROBLEMA 14.

128. *Datis crure* AC 57° 48′ 26″ *& angulo adjacente* C 23° 30′, *invenire hypothenusam* BC. Tab. II. Fig. 23.

RE-

RESOLUTIO.

Patet per casum præcedentem, a summa sinus totius & cosinu C subtrahendum esse tangentem AC, ut relinquatur cotangens BC. Exemplum ibi propositum facile huc applicatur.

PROBLEMA 15.

129. *Datis hypothenusa* BC 60° *& crure* AC 57° 48′ 26″, *invenire angulum adjacentem* C.

RESOLUTIO.

Patet *per probl.* 13. (§. 127) a summa cotangentis BC & tangentis AC subtrahendum esse sinum totum, ut relinquatur cosinus C. Exemplum ibi propositum facile huc applicatur.

PROBLEMA 16.

130. *Datis hypothenusa* BC 60° *& angulo uno* C 23° 30′, *invenire alterum* B.

RESOLUTIO.

Quia BC est pars media, B & C partes conjunctæ (§. 94); erit sinus totus cum cosinu BC æqualis cotangentibus B & C (§. 112).

Ergo a Sin. tot.	100000000
Cosin. BC	96989700
Summa	196989700
subducatur Cotang. C	103616981
relinquetur Cotang. B	93372719,

cui in Canone quam proxime respondent 12° 15′ 56″. Est ergo B 77° 44′ 4″, prorsus ut supra (§. 121).

PROBLEMA 17.

131. *Datis angulis obliquis* B 77° 44′ 4″ *&* C 23° 30′, *invenire hypothenusam* BC. Tab. II. Fig. 23.

RESOLUTIO.

Patet per casum præcedentem, a summa cotangentium C & B subducendum esse sinum totum, ut relinquatur cosinus BC. Exemplum casus præcedentis haud invitum abit in casum præsentem.

SCHOLION.

132. *Equidem in applicatione Trigonometriæ sphæricæ ad quæstiones astronomicas, geographicas, gnomonicas aliasque hujus generis ex circumstantiis peculiaribus plerumque colligitur, utrum angulus inventus sit acutus, an vero obtusus, latus inventum vel quadrante minus, vel majus, ne tamen quicquam prætermisisse videamur, ostendendum nobis adhuc erit, quomodo species anguli vel lateris inventi innotescat.*

PROBLEMA 18.

133. *In triangulo rectangulo anguli vel lateris inventi speciem determinare.* Tab. II. Fig. 23.

RESOLUTIO.

1. Si inter data fuerit angulus C; lateris oppositi AB species innote-

notescit *per theor.* 43. (§. 76), anguli vero species per speciem lateris constat (§. 75). Est nempe latus quadrante majus, si angulus obtusus; quadrante minus, si acutus & contra. Unde satisfit probl. 2. 3. 7. 9. 10. 12.

2. Si inter data fuerit hypothenusa BC & vel crus unum, vel ex angulis obliquis unus, species anguli vel lateris quæsiti patet *per theor.* 48. (§. 81). Nempe si hypothenusa quadrante minor & angulus acutus, vel crus quadrante minus; erit etiam angulus alter acutus vel crus quadrante minus: si hypothenusa quadrante minor & angulus obtusus, vel crus quadrante majus; erit etiam angulus alter obtusus, vel crus quadrante majus: si denique hypothenusa quadrante major & angulus acutus vel crus quadrante minus; erit angulus alter obtusus, vel crus quadrante majus. Unde satisfit probl. 5. 13. 15. 16.

3. Si dentur anguli, species hypothenusæ innotescit *per theor.* 45. & 47. (§. 78. 80). Est nempe quadrante major, si anguli diversæ speciei; quadrante minor, si ejusdem. Unde satisfit probl. 17.

4. Si dentur crura, species hypotenusæ innotescit *per theor.* 41. & 46 (§. 77. & 79). Est nempe quadrante minor, si illa fuerint speciei ejusdem, quadrante major, si diversæ. Unde satisfit probl. 6.

5. Si angulus cum latere opposito detur pro angulo adjacente, vel pro hypothenusa, vel pro crure altero: species quæsitorum generaliter determinari nequit. Unde etiam probl. 4. 8. & 11. generaliter satisfieri nequit.

6. Si vero crus cum angulo adjacente pro hypothenusa detur; primum species cruris oppositi innotescit per n. 1. & inde porro hypothenusa per n. 4. Et hinc satisfit probl. 14.

PROBLEMA 19.

134. *Triangula sphærica resolvere, in quibus duo vel tria latera sunt quadrantes.*

RESOLUTIO.

1. Si latera tria AB, AC & BC fuerint quadrantes; erit mensura anguli A, arcus nempe BC, quadrans (§. 31): unde constat angulum A esse rectum. Sunt vero Tab. II. Fig. 21.

ro

ro B & C itidem recti (§. 72). Nullo igitur calculo opus est.

2. Similiter si duo latera AB & AC sint quadrantes, anguli B & C erunt recti (§. 72) & BC mensura anguli A (§. 31) adeoque dato arcu BC, datur angulus A & contra, ut denuo calculo non sit opus.

CAPUT IV.

DE

RESOLUTIONE TRIANGULORUM OBLIQUANGULORUM.

DEFINITIO 12.

135. *Partes laterales* in triangulo sphærico rectangulo voco, quæ mediæ vel conjunguntur, vel ab ea sejunguntur.

THEOREMA 60.

Tab. II. Fig. 23. 136. *In omni triangulo sphærico sinus laterum sunt ut sinus oppositorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Est enim in triangulo rectangulo ABC ut sinus totus ad hypothenusam BC, ita sinus anguli C ad sinum cruris AB & ita sinus anguli B ad sinum cruris AC (§. 98). Ergo etiam ut sinus anguli C ad sinum cruris AB ita sinus anguli B ad sinum cruris AC (§. 167. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si triangulum fuerit obliquangulum ACB demisso ex C perpendiculo CD ad basin AB, erit ut sinus AC ad sinum totum ita sinus CD ad sinum anguli A & ut sinus totus ad sinum CB ita sinus B ad sinum CD (§. 98). Ergo ex æquo, ut sinus AC ad sinum CB ita sinus B ad sinum A (§. 195. *Arith.*), consequenter ut sinus AC ad sinum B ita sinus CB ad sinum A (§. 179. *Arithm.*). Quodsi perpendiculum ex angulo B in latus CA demittatur, eodem modo ostenditur, esse sinum cruris BC ad sinum A ut sinus AB ad sinum C, consequenter etiam ut sinus CA ad sinum Tab. II. Fig. 28. 29.

num B, ita sinus AB ad sinum C (§. 167. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 61.

Tab. II. Fig. 28. 29. 137. *Si ex angulo uno* C *trianguli obliquanguli sphærici* ACB *in latus oppositum* AB *demittatur perpendiculum* CD *&* *illud in duo rectangula* ACD *&* BCD *resolvatur, sitque* DC *in utroque pars lateralium una ac pro* AD *&* BD *sumantur complementa; erunt cosinus partium mediarum in iisdem triangulis* ACD *&* BCD *ut sinus partium lateralium reliquarum sejunctarum, sed ut cotangentes partium lateralium conjunctarum.*

DEMONSTRATIO.

Est enim in triangulo ACD ut sinus totus ad sinum CD, ita sinus partis lateralis sejunctæ alterius ad cosinum mediæ & in triangulo BCD similiter ut sinus totus ad sinum CD, ita sinus partis lateralis sejunctæ alterius ad cosinum mediæ (§. 100). Ergo sinus partis lateralis sejunctæ alterius ad cosinum mediæ in triangulo ACD ut sinus lateralis sejunctæ alterius ad cosinum mediæ in triangulo altero BCD (§. 167. *Arithm.*), consequenter cosinus mediarum sunt ut sinus lateralium sejunctarum (§. 179. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter in triangulis ACD & BCD est ut sinus totus ad cotangentem CD, ita cotangens partis lateralis conjunctæ alterius ad cosinum mediæ (§. 108). Ergo cotangens partis lateralis conjunctæ alterius est ad sinum partis mediæ in triangulo ACD, ut cotangens partis lateralis conjunctæ alterius in triangulo BCD ad cosinum partis suæ mediæ (§. 167. *Arithm.*), consequenter cosinus partium mediarum in iisdem sunt ut cotangentes lateralium conjunctarum (§. 179. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

138. Est igitur rectangulum ex sinu partis sejunctæ vel cotangente conjunctæ in triangulo ACD in cosinum mediæ in altero CDB, æquale rectangulo ex sinu partis sejunctæ vel cotangente conjunctæ in triangulo CDB in cosinum mediæ in altero ACD (§. 378. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

139. Quare si sinus fuerint artificiales, sinus partis sejunctæ vel cotangens conjunctæ in triangulo ACD cum cosinu mediæ in altero CDB æqualis est sinui partis sejunctæ vel cotangenti conjunctæ in triangulo CDB & cosinui mediæ in altero ACD (§. 337. *Arithm.*)

THEOREMA 61.

Tab. II. Fig. 28. 29. 140. *In triangulo sphærico obliquangulo* ACB, *demisso ex angulo* C *perpendiculo* CD *in basin* AB, *tangentes angulorum ad basin* A & B *sunt reciproce ut sinus arcuum* DB & AD.

DEMONSTRATIO.

Est enim in triangulo rectangulo ADC ut sinus totus ad sinum AD ita tangens A ad tangentem DC & in altero ut sinus totus ad sinum DB ita tangens B ad tangentem DC (*§.* 105). Quare cum etiam sit ut sinus DB ad sinum totum, ita tangens DC ad tangentem B (§. 179. *Arithm.*); erit ut sinus DB ad sinum AD ita reciproce tangens A ad tangentem B (*§.* 198. *Arithm.*).

LEMMA 6.

Tab. II. Fig. 30. 141. *Sinus summæ duorum arcuum* BC & CE, *quorum unusquisque quadrante minor, est ad summam sinuum eorundem arcuum* BC & CE *ut differentia eorundem sinuum ad sinum differentiæ arcuum.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CA = CB & FO = BF & AE = EN, ducanturque chordæ BA, AN, BO & diametri CD atque EF, erunt eædem ad illas perpendiculares ipsasque bisecabunt (*§.* 291. *Geom.*), adeoque BP sinus arcus BE seu summæ arcuum BC & CE, BG sinus ipsius BC, AM sinus ipsius AE seu differentiæ arcuum (§. 2. *Trigon. plan.*) & quia EA + AB + BF = EN + NO + FO (135. *Geom.*), AB = NO (*§.* 91. *Arithm.*), adeoque & BA + AN = AN + NO (*§.* 88. *Arith.*), consequenter chordæ AB & NO, itemque AO & BN æquales sunt (*§.* 298. *Geom.*). Ducatur EH ipsi AB parallela: erit AE = BH (*§.* 312. *Geom.*) = EN (§. 87. *Arithm.*) & hinc EA + AB + BH = BA + AE + EN (§. 88. *Arithm.*) consequenter chordæ BN & EH æquales sunt (*§.* 298. *Geom.*). Est vero AB. NO + AN. BO = AO. BN (*§.* 324. *Analys. finit.*) hoc est, ob AB = NO & AO = BN = EH *per demonstrata*, AB^2 + AN. BO = EH^2 (§. 98. *Geom.*) & ideo AG^2 + AM. BP = EI^2, nempe pars quarta parti quartæ (§. 374. *Geom.*). Demittantur perpendiculares AL & BQ ad EH; erit AG = LI & GB = IQ (*§.* 283. *Geom.*) & EL^2 + LI^2 + 2 EL. LI = EI^2 (§. 261. *Arithm.*) = AG^2 + AM. BP (*§.* 87. *Arithm.*), adeoque EL^2 + 2 EL. LI = AM. EP (§. 91. *Arithm.*), hoc est, (EL + 2 LI) EL seu EQ. EL =

EL=AM BP. Quare ut BP sinus summæ arcuum BC & CE ad EQ summam sinuum GB & EI eorundem arcuum, ita EL differentia eorundem sinuum ad AM sinum differentiæ arcuum AE (299. *Arith.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

142. Ergo rectangulum ex sinu summæ in sinum differentiæ duorum arcuum æquatur rectangulo ex summa sinuum in differentiam sinuum eorundem (§. 378. *Geom.*).

LEMMA 7.

Tab. II. Fig. 31. 143. *Sinus summæ duorum arcuum* EB *&* ED, *quorum unusquisque quadrante minor, est ad sinum differentiæ eorundem ut summa tangentium ad differentiam earum.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur LG tangens arcum DB in E (§. 311. *Geom.*) & radiis CD atque CB productis in L & G occurrens; erunt LE & EG tangentes arcuum DE & EB (§. 7. *Trig. plan.*). Fiat EF = DE & demittantur perpendiculares DK & FI, quæ erunt sinus summæ arcuum DE & EB ac differentiæ eorundem FB (§. 2. *Trigon. plan.*) atque inter se parallelæ (§. 256. *Geom.*) & quia tam DH (§. 291. *Geom.*), quam LG ad CE perpendicularis (§. 308. *Geom.*), erit DH ipsi LG parallela (§. 256. *Geom.*). Ducatur denique radius CM: quia DE=EF *per construct.* erunt eorum tangentes LE & EM æquales, adeoque LG tangentium summa, MG differentia.

Est vero ob parallelismum rectarum EG & DH *per demonstrata* LG : MG=DH : FH (§. 275. *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FI & DK *per demonstr.* DH : FH = DK : FI (§. 268 *Geom.*). Ergo LG : MG=DK : FI (§. 167. *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA 63.

144. *In triangulo sphærico obliquangulo* ACB *demisso perpendiculo* CD *est ut sinus summæ angulorum ad basin* A *&* B *ad sinum differentiæ eorundem* A−B *ita tangens basis dimidiæ* AB *ad tangentem semidifferentiæ segmentorum* AD *&* DB. Tab. II. Fig. 28. 29.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sinus DB ad sinum AD ut tangens A ad tangentem B (§. 140) & basis AB semicirculo minor (§. 61); construatur triangulum rectilineum HIK, cujus crura IH & HK sint æqualia tangentibus B & A, angulus ad verticem H vero complemento basis AB ad semicirculum: erunt anguli I & K junctim Fig. 32.

fumti basi AB æquales (§. 140 & §. 143. *Geom.*), cumque sit ut sinus I ad sinum K ita HK ad HI (§. 33. *Trigon. plan.*), erit angulus I segmento BD, angulus K segmento DA æqualis, *vi demonstratorum.* Est vero & HI + HK ad HK − IH ita tangens ½I + ½K ad tangentem ½I − ½K (§. 40. *Trigon. plan.*): ergo summa tangentium angulorum A & B est ad differentiam tangentium eorundem angulorum, consequenter sinus summæ angulorum A & B est ad sinum differentiæ eorundem (§. 143), ut tangens basis dimidiæ AB ad tangentem semidifferentiæ arcuum AD & DB. *Q. e. d.*

LEMMA 8.

145. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales* A:B=C:D; *erit summa terminorum primæ rationis* A + B *ad differentiam eorundem* A − B, *uti summa terminorum secundæ* C + D *ad differentiam eorundem* C − D.

DEMONSTRATIO.

Quia A:B = C:D *per hypoth.* erit A + B:B = C + D:D (§. 190. *Arith.*) & A − B:B = C − D:D (§. 193. *Arithm.*). Ergo A + B:A − B = C + D:C − D (§. 195. *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 64.

146. *In triangulo sphærico obliquangulo* ACB, *cruribus* CB & CA *in* F & E *continuatis, donec fiant quadranti æquales & ex polo* C *descripto arcu* FD, *donec basi* BA *continuatæ in* D *occurrat, differentia cosinuum crurum* AC & BC *est ad summam eorundem cosinuum ut tangens basis dimidiæ* AB *ad tangentem arcus dimidii compositi ex* BD & AD. Tab. III. Fig. 34.

DEMONSTRATIO.

Cum enim anguli ad E & F sint recti (§. 28) ac ideo ut sinus totus ad sinum DB ita sinus anguli D ad sinum BF & ut sinus totus ad sinum AD ita sinus ejusdem anguli D ad sinum AE (§. 136); erit etiam sinus BD ad sinum AD ut sinus BF ad sinum AE (§. 196. *Arithm.*), hoc est, ut cosinus cruris BC ad cosinum cruris AC (§. 11. *Trigon.*), consequenter cosinuum BC & AC summa ad differentiam eorundem ut summa sinuum BD & AD ad differentiam eorundem (§. 145). Quodsi in triangulo rectilineo HIK anguli K & I habuerint mensuras arcubus BD & AD æquales; erunt latera KH & HI ut sinus arcuum BD & AD (§. 33. *Trigon.*) consequenter summa sinuum BD & AD ad differentiam eorundem ut tan-

gen-

gens summæ dimidiæ arcuum BD & AD ad tangentem semidifferentiæ eorundem seu basis dimidiæ AB (§. 40. *Trigon.*). Est itaque summa cosinuum crurum BC & AC ad differentiam eorundem, ut tangens summæ dimidiæ arcuum BD & AD ad tangentem basis dimidiæ (§. 167. *Arithm.*), adeoque differentia cosinuum crurum BC & AC ad summam eorundem ut tangens basis dimidiæ AB ad tangentem summæ dimidiæ arcuum BD & AD (§. 169. *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA 9.

Tab. III. Fig. 36. 147. *Si in triangulo æquicruro sphærico* ABC *ducatur chorda basis* AC *& eidem per verticem* B *parallela* BD, *hæc circulum & sphæram in* B *tangit.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi neges BD tangere sphæram & circulum ABC in B, tangat eam in eodem recta quæcunque alia BE. Ducantur subtensæ arcuum AB & BC *per hypoth.* æqualium chordæ; erunt hæ inter se æquales (§. 289. *Geom.*), adeoque anguli ad basin A & C itidem æquales sunt (§. 184. *Geom.*). Est vero angulus EBC æqualis ipsi A (§. 323. *Geom.*), consequenter etiam ipsi C (§. 87. *Arithm.*). Ergo BE parallela ipsi AC (§. 255. *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 260. *Geom.*), BD sphæram & circulum maximum sphæræ ABC in puncto B tangit. *Q. e. d.*

THEOREMA 65.

148. *Si in triangulo sphærico quocunque* ABC *crus minus* CA *continuetur in* D, *donec arcus* CD *fiat cruri majori* BC *æqualis, & ex crure majore* CB *resecetur arcus* CE *minori* CA *æqualis, per puncta vero* A *&* E, *itemque per* D *&* B *ducantur arcus circulorum maximorum; erit rectangulum sub sinibus arcuum dimidiorum* AGE *&* DHB *æquale rectangulo sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum.* Tab. III. Fig. 37.

DEMONSTRATIO.

In arcum CD continuatum transferatur ex A in O & ex D in F basis AB. Bisecetur arcus DO in L: cum sit AO = DF *per constr.* adeoque AD = OF (§. 91. *Arith.*), etit etiam AL = LF (§. 88. *Arith.*). Sit jam AC = b, BC = a, AB = c; erit AD = $a-b$ & ob AO = c, DO = $c-a+b$, adeoque DL = $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-a$, hoc est, DL est differentia cruris majoris BC a semisumma omnium laterum. Quodsi ad DL = $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$

 $+\frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2} c - a$ addatur AD $= a - b$; prodit AL $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c - b$, hoc est, AL est differentia cruris minoris AC a semisumma omnium laterum AC, CB & BD. Quoniam arcus AD = OF *per demonstr.* ex centro sphæræ, quod idem cum centro arcus AF (§. 15), ducatur recta in punctum L, quæ bisecabit chordas AF & DO in N & M atque ad angulos rectos (§. 291. *Geom.*), eritque AN sinus arcus LA seu differentiæ cruris minoris a semisumma laterum; & DM sinus arcus DL seu differentia cruris majoris a semisumma omnium laterum. Quoniam arcus AD = EB *per constr.* & AD = OF *per demonstr.* erunt chordæ AE & DB, itemque DO & AF parallelæ (§. 312. *Geom.*), consequenter & plana triangulorum DOB & AFE parallela (§. 500. *Geom.*) & anguli BDO & EAF æquales (§. 496. *Geom.*). Quia AO = AB *per constr.* si PA ducatur chordæ OB parallela, sphæram in puncto A tangit (§. 146) consequenter & circulum FAE per punctum A transeuntem & in superficie sphæræ descriptum. Est itaque & angulus PAF æqualis angulo AEF (328. *Geom.*). Porro quia PA parallela ipsi OB *per constr.* & AF ipsi DO *per demonstr.* erit angulus PAF æqualis angulo DOB (§. 496. *Geom.*), consequenter angulus AEF ipsi DOB æqualis (§. 87. *Arithm.*). Quare cum etiam sint BDO & EAF æquales *per demonstrata*; erit AE : DO = AF : DB (§. 267. *Geom.*), adeoque & $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ DO = $\frac{1}{2}$ AF : $\frac{1}{2}$ DB (§. 181. *Arithm.*), consequenter rect. ex $\frac{1}{2}$ AE in $\frac{1}{2}$ DB = rect. ex $\frac{1}{2}$ DO in $\frac{1}{2}$ AF (§. 378. *Geom.*). Sunt vero $\frac{1}{2}$ AE, $\frac{1}{2}$ DB, $\frac{1}{2}$ DO, $\frac{1}{2}$ AF sinus arcuum dimidiorum AE, DB, DO, AF, seu arcuum GE, HB, DL & AL, adeoque rectangulum ex sinibus arcuum dimidiorum AGE & DHB æquale rectangulo ex sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum. *Q. e. d.*

THEOREMA 66.

149. *In omni triangulo sphærico* ABC *est rectangulum sub sinibus crurum* AC & CB *ad quadratum sinus totius ut rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum ad quadratum dimidii anguli verticalis* C, *qui scilicet basi* AB *opponitur.* Tab. III. Fig. 17.

DEMONSTRATIO.

Fiat CE = AC & CA continuetur in D, donec CD = CB. Per puncta A & E, itemque D & B ducantur arcus circulorum maximorum AE

AE & DB, nec non per verticem trianguli C arcus circuli maximi CK bisecans angulum verticalem ACB. Erit AG = GE & DH = BH atque anguli contigui ad G & H æquales (§. 55), adeoque utrobique recti (§. 43). Est vero in △ ACG ad G rectangulo *per demonstr.* ut sinus totus ad sinum cruris AC ita sinus dimidii anguli verticalis ACG ad sinum arcus AG & in △ DCH ad H rectangulo *per demonstr.* ut sinus totus ad sinum cruris CD vel CB ita sinus dimidii anguli verticalis DCK ad sinum arcus DH (§. 136). Quare ut quadratum sinus totius ad rectangulum sub sinibus crurum AC & CB ita quadratum dimidii anguli verticalis C ad rectangulum sub sinibus arcuum AG & DH (§. 213. *Arithm.*). Enimvero rectangulum sub sinibus arcuum AG & DH æquale est rectangulo sub sinibus differentiarum crurum a semi summa omnium laterum (§. 149). Itaque ut rectangulum sub sinibus crurum ad quadratum sinus totius, ita rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum ad quadratum dimidii anguli verticalis (§. 168. *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

150. Quoniam differentia cruris unius a semisumma omnium laterum $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - a$ = semidifferentiæ ejusdem cruris a semibasi & dimidio crure altero $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a$; rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum est æquale rectangulo sub sinibus semidifferentiarum cruris uniuscujuslibet a summa basis & cruris alterius. Est igitur ut rectangulum sub sinibus crurum ad quadratum sinus totius, ita rectangulum sub sinibus semidifferentiarum cruris uniuscujusque a basi & crure altero ad quadratum dimidii anguli verticalis (§. 168. *Arith.*).

LEMMA 10.

151. *Si coni scaleni* ACB *sectio triangularis* ACB *fuerit ad basin perpendicularis & conus secetur plano* FIG *ad sectionem triangularem perpendiculari ea lege, ut diameter sectionis* FG *cum lateribus coni* AC *&* CB *eosdem efficiat angulos, quos cum iisdem efficit diameter* DE *sectionis parallelæ* DIE, *sed contraria ratione positos, scilicet ut angulus* DFG *sit æqualis angulo* EGF; *erit sectio* FIG *circulus.* Tab. III. Fig. 38.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus DFH = HGE *per hypoth.* & verticales ad H æquales

les (§. 156. *Geom.*); erit FH:DH = HE:HG (§. 267. *Geom.*), consequenter rectangulum ex DH in HE æquale rectangulo ex FH in HG (§. 378. *Geom.*). Jam sectio triangularis ad basin AB perpendicularis & sectio DIE basi parallela *per hypoth.* Ergo & sectio parallela DIE ad triangularem CAB perpendicularis (§. 497. *Geom.*). Quare cum etiam sit sectio subcontraria FIG ad triangularem ACB perpendicularis *per hypoth.* communis parallelæ & subcontrariæ sectio IH erit ad rectas DE & FG perpendicularis (§. 508. *Geom.*). Est vero sectio parallela DIE circulus (§. 468. *Geom.*), adeoque HI^2 = rect. ex DH in HE (§. 377. *Anal. fin.*). Quamobrem cum sit rect. ex FH in HG = rect. ex DH in HE *per demonstrat.* erit etiam sectio subcontraria FIG circulus. *Q. e. d.*

LEMMA II.

152. *Si axis sphæræ fuerit perpendicularis ad aliquod planum & ex polo in idem projiciatur circulus maximus per polum transiens; projectio in isto plano erit linea recta, quæ circulum tangit. Omnis vero circulus alius, qui per polum sphæræ non transit, repræsentatur in plano projectionis per circulum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in A polus sphæræ & axis AB ad rectam BG in plano projectionis perpendicularis (§. 484. *Geom.*). Sit porro ACB semicirculus maximus per polum transiens & recta BG in plano circuli maximi. Quodsi jam oculus fuerit in polo & in punctum C dirigatur; erit cum puncto C in eodem plano, adeoque in plano semicirculi ACB, consequenter recta, juxta quam dirigitur visus, AC rectam BG in puncto E attingit. Cum eodem modo ostendatur, punctum D repræsentari in F & B in B; evidens est semicirculi ACB arcum DC repræsentari per rectam FE & arcum BC per rectam BE. Circulus adeo maximus per polum transiens in plano projectionis repræsentatur per rectam ad diametrum perpendicularem, consequenter quæ circulum tangit. *Quod erat primum.* Tab. III. Fig. 39.

In casibus ceteris radii ex polo per singula circuli in sphæra descripti puncta ducti conum producunt, cujus sectio est hic ipse circulus & planum projectionis eundem conum secat (§. 467. *Geom.*). Quodsi ergo circulo projiciendo parallelum fuerit planum projectionis; erit sectio communis Tab. III. Fig. 41.

nis hujus plani & basi coni parallela, consequenter circulus (§. 468. *Geom.*). Quamobrem cum hæc ipsa sectio sit repræsentatio circuli in sphæra descripti in hoc ipso plano; idem in plano projectionis per circulum repræsentatur. *Quod erat secundum.*

Tab. III. Fig. 40. Sit circulus in sphæra descriptus ad planum projectionis inclinatus, adeoque diameter circuli projiciendi CG, linea, in quam projicitur, EH & oculus seu polus sphæræ in B. Cum BCA sit rectus (§. 317. *Geom.*) & axis sphæræ AB ad lineam in plano projectionis DH in F perpendicularis *per hypoth.* & §. 484. *Geom.*); erit etiam EFB rectus (§. 78. *Geom.*), consequenter BCA = EFB (§. 145. *Geom.*). Quare cum porro angulus FBE utrique triangulo FBE & ABC communis sit; erit etiam angulus BEF = BAC (§. 246. *Geom.*). Est vero BAC = CGB (§. 315. *Geom.*). Ergo BEF = CGB (§. 87. *Arithm.*). Quamobrem cum angulus CBG utrique triangulo CBG & EBH communis sit: erit etiam BHE = GCB (§. 246. *Geom.*), consequenter cum CG repræsentet circulum projiciendum; FH repræsentabit circulum in plano projectionis, adeoque circulus inclinatus repræsentatur per circulum (§. 169). *Quod erat tertium.*

Sit denique circulus projiciendus ad planum projectionis perpendicularis, adeoque ejus diameter GI. Quoniam anguli BIG & BCG æquales (§. 315. *Geom.*) & BHE = BCG *per antea demonstrata*; erit BIG = BHK (§. 87. *Arithm.*). Quamobrem cum angulus GBI utrique triangulo GBI & BHK communis sit; erit angulus BGI = BKH (§. 246. *Geom.*), consequenter cum GI repræsentet circulum projiciendum, cujus nempe diameter est, etiam KH circulum in plano projectionis repræsentat, cujus itidem diameter est (§. 169). Circulus itaque ad planum projectionis perpendicularis, sed non transiens per polos, per circulum projicitur. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

153. *Ne in concipienda demonstratione imaginatio negotium facessat, tenendum est*, CB & BH *esse latera sectionis triangularis coni, cujus basis est circulus habens diametrum diametro* CG *circuli projiciendi parallelam &* EH *esse communem sectionem istius trianguli & plani projectionis atque adeo lineam, in quam projicitur diameter circuli in sphæra descripti* CG: *similiter* IB & BH *esse latera sectionis triangularis coni, cujus basis est circulus habens diametrum diametro circuli proji-*

jiciendi IG *parallelam*, KH *vero esse communem sectionem istius trianguli & plani projectionis, atque adeo lineam, in quam projicitur diameter circuli in sphæra descripti* IG.

THEOREMA 67.

Tab. III. Fig. 41. 154. *In triangulo sphærico obliquangulo* ABC, *demisso ex vertice* B *perpendiculo* BD; *est ut tangens basis dimidiæ* AC *ad tangentem semisummæ crurum* AB & BC; *ita tangens semidifferentiæ eorundem crurum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum baseos* AD & DC.

DEMONSTRATIO.

Sit triangulum sphæricum ABC & HA diameter sphæræ: crus BA transiens per A, si ex altera parte continuetur, transibit per H, quemadmodum & basis AC (§. 17). Describatur ex B tanquam polo in superficie sphæræ circulus CFGE: erit BE = BF = BC; adeoque AE summa crurum, AG differentia crurum &, quia ex demonstratione theorematis 66. (§. 149) constat perpendiculum BD basin FC trianguli æquicruri FBC secare in duas partes æquales FD & DC; erit porro AF differentia segmentorum basis AD & DC.

Concipiamus sphæram in puncto A tangere planum projectionis. Quoniam puncta G & E sunt in eodem circulo maximo per polos sphæræ A & H transeuntis, si per ea ducantur rectæ HM & HN, erunt puncta M & N, in quibus planum projectionis attingunt, cum puncto A in eadem recta AM (§. 152). Et ex eadem ratione si per C & F ducantur rectæ HK & HL, erunt puncta L & K cum puncto A in eadem recta AK. Jam cum recta HA sit ad planum projectionis perpendicularis *per hypoth.* erit eadem perpendicularis ad rectas AK & AM (§. 484. *Geom.*): Quare si AH sumatur pro sinu toto, erit AK tangens anguli AHK, AL tangens anguli AHL, AM tangens anguli AHM & denique AN tangens anguli AHN. Jam anguli AHK mensura est arcus dimidius AC seu basis dimidia, anguli AHL mensura est arcus dimidius AF, seu semidifferentia segmentorum basis, anguli AHM mensura est arcus dimidius AE seu semisumma crurum & denique anguli AHN mensura est arcus dimidius AG seu semidifferentia crurum (§. 314. *Geom.*), consequenter AK tangens basis dimidiæ, AL tangens semidifferentiæ segmentorum basis, AM tangens semisummæ crurum & denique AN est tangens semidifferentiæ crurum.

Quo-

Quoniam puncta E, C, F, G, quæ projiciuntur in M, K, L, N, sunt in peripheria circuli sphæræ inscripti, sed non transeuntis per polos H ad A *per constr.* erunt puncta M, K, L, N in peripheria circuli (§. 152). Quamobrem cum sit ut AK ad AM ita AN ad AL (§. 333. *Geom.*); evidens est esse ut tangentem dimidiæ basis ad tangentem semisummæ crurum ita tangentem semidifferentiæ crurum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum basis. *Q. e. d.*

SCHOLION.

155. *Demonstratio continet artificium analyticum, quo* Nepperus (a) *hoc theorema invenit, modo notes ipsum imitatum esse solutionem trianguli rectilinei, qua ex tribus lateribus investigantur anguli* (§. 41. Trig.).

THEOREMA 68.

Tab. II. Fig. 33. 156. *Triangulum sphæricum* ABC *potest transformari in aliud* MLK, *in quo latera singula* ML, LK, KM *angulis singulis* A, C, B *alterius* (*aut eorum complementis ad duos rectos, si qui fuerint obtusi*), *& anguli singuli* M, L, K *lateribus singulis* BC, AB, AC *alterius* (*aut eorum complementis ad semicirculum, si quæ fuerint quadrante majora*) *æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Latus unum AB continuetur in circulum AEPA, reliqua duo BC & AC producantur, donec circulo isti occurrant. Ex A, B & C tanquam polis describantur quadrantis AE, BG & CI intervallo arcus EP, GO & IN, qui erunt partes circulorum maximorum in sphæra (§. 26). Quoniam circulus ABGPA per polos A & B circulorum EP & GO transit *per construct.* hi vicissim per illius polos transeunt (§. 27). Est ergo circuli AEPA polus in L, ubi EP & GO se mutuo intersecant. Simili modo patet, in K esse polum circuli AF, quia is transit per polos A & C circulorum EP & NI se mutuo secantium in K, & in M esse polum circuli BH, quia is transit per polos B & C circulorum GO & NI se mutuo in M secantium. Sunt adeo LE & GL, itemque MQ & MH, KD & KI, AD, BQ & CH quadrantes, (§. 25), & hinc ED = LK, GQ = LM, HI = MK, AB = EG, AC = DI, BC = QH, ablato nempe a quadrantibus æ-

Iii 2 qua-

(a) Vid. Descriptio canonis mirifici Logarithmorum lib. 2. c. 6. p. m. 49. & seqq.

qualibus in casu primo arcu DL, in secundo LF, in tertio HK, in quarto BE, in quinto CD, in sexto CQ (*§. 91. Arithm.*). Sed ED mensura anguli BAC, GQ ipsius EBC, HI ipsius ICQ (*§.* 33), consequenter verticalis BCA (§. 43), EG ipsius ELG seu MLK (*§. cit.*), DI ipsius LKH, QH ipsius LMK (*§.* 33). Ergo in triangulo LMK latus LK angulo BAC, LM ipsi EBC, MK ipsi BCA, & angulus MLK lateri AB, LKH ipsi AC, LMK ipsi BC æquatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

157. *Ex jactis hactenus fundamentis formantur omnes casus Trigonometriæ Sphæricæ circa triangula obliquangula. Aut enim dantur sola latera, aut soli anguli, aut duo latera cum uno angulo, aut duo anguli cum uno latere. Duobus casibus prioribus satisfit* per theor. 64. 66 & 67. (§. 146. 149. 155); *duobus posterioribus* per theor. 60. (§. 136), *si partes in quæstionem venientes sibi mutuo opponuntur, sed* per theor. 61. (§. 137), *si oppositioni locus non est. Enimvero e re esse judicamus, ut hæc expressius doceantur.*

PROBLEMA 20.

Tab. II. Fig. 28. 158. ***Datis in triangulo sphærico obliquangulo*** ABC ***duobus lateribus*** BC & AB ***cum angulo uni eorum opposito*** A ***invenire alterum*** C.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 136):

Ut sinus lateris BC
ad sinum anguli oppositi A,
ita sinus lateris BA
ad sinum anguli oppositi C.

Sit e. gr. BC 39° 29′, A 43° 20′, BA 66° 45′: erit

Sin. BC	98033572
Sin. A	98364771
Sin. BA	99632168
	197996939
Sin. C	99963367, cui in tabulis quamproxime respondent 82° 34′ 7″.

PROBLEMA 21.

159. ***Datis in triangulo sphærico obliquangulo*** ABC ***duobus angulis*** C 82° 34′ 7″ & A 43° 20′, ***una cum latere*** AB 60° 45′ ***uni eorum*** C ***opposito, invenire latus*** BC ***alteri*** A ***oppositum.*** Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Inferatur (*§.* 136):

Ut sinus anguli C
ad sinum lateris oppositi AB;
ita sinus anguli A.
ad sinum lateris oppositi BC.

Exemplum casus præcedentis facile mutatur in casum præsentem.

PRO-

PROBLEMA 22.

Tab. II. Fig. 28. 160. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ACB *duobus lateribus* AB 66°45′ & BC 39°29′ *una cum angulo uni eorum opposito* A 43°20′, *invenire angulum comprehensum* B.

RESOLUTIO.

Ponamus angulum C esse acutum: quia alter A etiam acutus, perpendiculum CD intra triangulum cadit (§. 82).

1. In triangulo itaque rectangulo ABE ex datis angulo A & latere AB invenitur angulus ABE (§. 130).

2. Quoniam BE pro parte laterali assumta in triangulo AEB pars media est angulus ABE, conjuncta vero latus AB & in triangulo EBC pars media est angulus EBC, conjuncta latus BC (§. 94); reperietur cosinus anguli EBC, si a summa ex cosinu anguli ABE & cotangente BC subtrahatur cotangens ipsius AB (§. 139).

3. Quod si anguli ABE & EBC addantur, aut perpendiculo extra triangulum cadente a se invicem subtrahantur; prodibit quæsitus ABC.

E.gr. Sin. Tot.	100000000
Cosin. AB	95963154
Summa	195963154
Cot. A	100252805

Cot. ABE 95710349, cui in tabulis quam proxime respondent 20° 25′ 35″. Est adeo ABE 69° 34′ 25″.

Cos. ABE	95428300
Cotang. BC	100841529
Summa	196269829
Cotang. AB	96330985

Cosin. EBC 99938844, cui in tabulis quam proxime respondent, 80° 24′ 26″.
Est ergo EBC 9° 35′ 34″
Addatur ABE 69.34.25

erit ABC 79° 9′ 59″

PROBLEMA 23.

161. *Datis duobus angulis* A 43° 20′ & B 79° 9′ 59″ *una cum latere adjacente* AB 66° 45′, *invenire latus* BC *uni eorum oppositum.* Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Ex angulo uno datorum B demisso perpendiculo EB in latus ignotum AC, in triangulo rectangulo ABE ex datis angulo A & hypothenusa AB inveniatur angulus ABE (§. 130): qui

cui in tabulis respondent	57°	56'	50"
addatur DB	8	48	8
erit AB	66	44	58

PROBLEMA 27.

165. *Datis duobus lateribus* AB 66° 45' *&* BC 39° 29' *cum angulo intercepto* B 79° 9' 59", *invenire angulum* A *uni eorum oppositum.* Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Demissio perpendiculo CD invenitur ut in problemate præcedente segmentum DB (§. 164): quod
2. Ex AB subductum relinquit AD. Quodsi perpendiculum extra triangulum cadit, AB ad DB addendum.
3. Quoniam perpendiculo CD pro parte laterali assumto in triangulo CDB pars media est DB, conjuncta vero angulus B & in triangulo CDH media AD, conjuncta angulus A (§. 94), cotangens anguli A reperitur, si a summa cotangentis anguli B & sinus AD subtrahatur sinus DB (§. 139).

Exemplum problematis præcedentis facile huc applicatur.

PROBLEMA 28.

166. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus angulis* A 43° 20' *&* B 79° 9' 59" *una cum latere adjacente* AB 66° 45', *invenire angulum eidem oppositum* C. Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Ex angulo uno datorum B demisso in latus oppositum AC perpendiculo BE, in triangulo rectangulo ABE ex datis angulo A & hypothenusa AB invenitur angulus ABE (§. 130); qui
2. Ex ABC subductus relinquit angulum EBC. Quodsi perpendiculum extra triangulum cadit, ABC ex ABE auferri debet.
3. Quoniam perpendiculo BE pro parte laterali assumto in triangulo CEB pars media est angulus C, sejuncta angulus CBE, in triangulo ABE media angulus A, sejuncta angulus ABE (§. 96); cosinus anguli C habetur, si ex summa cosinus anguli A & sinus EBC subtrahatur sinus anguli ABE.

E. gr. Sinus totus	100000000
Cosin. AB	95963154
Summa	195963154
Cotang. A.	100252805
Cotang. ABE	95710349, cui in tabu-

tabulis respondent 20° 25′ 35″. Est adeo

	ABE	69° 34′ 25″	
	sed ABC	79 9 59	
Ergo	EBC	9° 35′ 34″	
	Cosin A	98617576	
	Sin.EBC	92217908	
	Summa	190835484	
	Sin.ABE	99717958	
	Cosin. C	91117526,	cui in

tabulis respondent, quam proxime 7° 25′ 54″.

Est ergo C 82° 34′ 6″.

PROBLEMA 29.

Tab. II. Fig. 28. 167. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus angulis* A 43° 20′ & C 82° 34′ 6″, *una cum latere* BA *uni eorum opposito* 66° 45′, *invenire angulum reliquum.*

RESOLUTIO.

1. Ex angulo quæsito B demisso perpendiculo BE, in triangulo rectangulo AEB ex datis angulo A & hypothenusa BA invenitur angulus ABE (§. 130).
2. Quoniam perpendiculo EB pro parte laterali assumto in triangulo ECB pars media est angulus C, sejuncta angulus CBE & in triangulo AEB pars media angulus A, sejuncta angulus ABE (§. 94); sinus anguli EBC habetur, si ex summa cosinus C & sinus ABE subtrahatur cosinus A (§. 139).
3. Quodsi ABE & EBC addantur (aut, perpendiculo extra triangulum cadente, a se invicem subtrahantur); prodibit angulus ABC quæsitus.

Exemplum problematis præcedentis facile mutatur in casum præsentem.

PROBLEMA 30.

168. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo tribus lateribus, invenire angulum uni eorum oppositum.*

RESOLUTIO.

I. Si latus unum AC fuerit quadrans, & crus AB quadrante minus, quæraturque angulus A; Tab. II. Fig. 20.

1. Continuetur AB in F, donec AF fiat quadranti æqualis & ex polo A ducatur arcus CF (§. 25), qui arcum AF secabit in F ad angulos rectos (§. 28).
2. Quoniam in triangulo CBF ad F rectangulo datur hypothenusa BC & latus BF seu complementum ipsius AB ad quadrantem, reperietur perpendiculum CF (§. 119): quod cum sit mensura anguli

$+\frac{1}{2}c - a$ addatur AD $= a - b$; prodit AL $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - b$, hoc est, AL est differentia cruris minoris AC a semisumma omnium laterum AC, CB & BD. Quoniam arcus AD = OF *per demonstr.* ex centro sphæræ, quod idem cum centro arcus AF (§. 15), ducatur recta in punctum L, quæ bisecabit chordas AF & DO in N & M atque ad angulos rectos (§. 291. *Geom.*), eritque AN sinus arcus LA seu differentiæ cruris minoris a semisumma laterum; & DM sinus arcus DL seu differentia cruris majoris a semisumma omnium laterum. Quoniam arcus AD = EB *per constr.* & AD = OF *per demonstr.* erunt chordæ AE & DB, itemque DO & AF parallelæ (§. 312. *Geom.*), consequenter & plana triangulorum DOB & AFE parallela (§. 500. *Geom.*) & anguli BDO & EAF æquales (§. 496. *Geom.*). Quia AO = AB *per constr.* si PA ducatur chordæ OB parallela, sphæram in puncto A tangit (§. 146) consequenter & circulum FAE per punctum A transeuntem & in superficie sphæræ descriptum. Est itaque & angulus PAF æqualis angulo AEF (328. *Geom.*). Porro quia PA parallela ipsi OB *per constr.* & AF ipsi DO *per demonstr.* erit angulus PAF æqualis angulo DOB (§. 496. *Geom.*), consequenter angulus AEF ipsi DOB æqualis (§. 87. *Arithm.*). Quare cum etiam sint BDO & EAF æquales *per demonstrata*; erit AE : DO = AF : DB (§. 267. *Geom.*), adeoque & $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ DO = $\frac{1}{2}$ AF : $\frac{1}{2}$ DB (§. 181. *Arithm.*), consequenter rect. ex $\frac{1}{2}$ AE in $\frac{1}{2}$ DB = rect. ex $\frac{1}{2}$ DO in $\frac{1}{2}$ AF (§. 378. *Geom.*). Sunt vero $\frac{1}{2}$ AE, $\frac{1}{2}$ DB, $\frac{1}{2}$ DO, $\frac{1}{2}$ AF sinus arcuum dimidiorum AE, DB, DO, AF, seu arcuum GE, HB, DL & AL, adeoque rectangulum ex sinibus arcuum dimidiorum AGE & DHB æquale rectangulo ex sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum. *Q. e. d.*

THEOREMA 66.

149. *In omni triangulo sphærico* ABC *est rectangulum sub sinibus crurum* AC & CB *ad quadratum sinus totius ut rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum ad quadratum dimidii anguli verticalis* C, *qui scilicet basi* AB *opponitur.* Tab. III. Fig. 17.

DEMONSTRATIO.

Fiat CE = AC & CA continuetur in D, donec CD = CB. Per puncta A & E, itemque D & B ducantur arcus circulorum maximorum

AE

AE & DB, nec non per verticem trianguli C arcus circuli maximi CK bisecans angulum verticalem ACB. Erit AG = GE & DH = BH atque anguli contigui ad G & H æquales (§. 55), adeoque utrobique recti (§. 43). Est vero in △ ACG ad G rectangulo *per demonstr.* ut sinus totus ad sinum cruris AC ita sinus dimidii anguli verticalis ACG ad sinum arcus AG & in △ DCH ad H rectangulo *per demonstr.* ut sinus totus ad sinum cruris CD vel CB ita sinus dimidii anguli verticalis DCK ad sinum arcus DH (§. 136). Quare ut quadratum sinus totius ad rectangulum sub sinibus crurum AC & CB ita quadratum dimidii anguli verticalis C ad rectangulum sub sinibus arcuum AG & DH (§. 213. *Arithm.*). Enimvero rectangulum sub sinibus arcuum AG & DH æquale est rectangulo sub sinibus differentiarum crurum a semi summa omnium laterum (§. 149). Itaque ut rectangulum sub sinibus crurum ad quadratum sinus totius, ita rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum ad quadratum dimidii anguli verticalis (§. 168. *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

150. Quoniam differentia cruris unius a semisumma omnium laterum $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - a =$ semidifferentiæ ejusdem cruris a semibasi & dimidio crure altero $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a$; rectangulum sub sinibus differentiarum crurum a semisumma omnium laterum est æquale rectangulo sub sinibus semidifferentiarum cruris uniuscujuslibet a summa basis & cruris alterius. Est igitur ut rectangulum sub sinibus crurum ad quadratum sinus totius, ita rectangulum sub sinibus semidifferentiarum cruris uniuscujusque a basi & crure altero ad quadratum dimidii anguli verticalis (§. 168. *Arith.*).

LEMMA 10.

151. *Si coni scaleni* ACB *sectio triangularis* ACB *fuerit ad basin perpendicularis & conus secetur plano* FIG *ad sectionem triangularem perpendiculari ea lege, ut diameter sectionis* FG *cum lateribus coni* AC & CB *eosdem efficiat angulos, quos cum iisdem efficit diameter* DE *sectionis parallelæ* DIE, *sed contraria ratione positos, scilicet ut angulus* DFG *sit æqualis angulo* EGF; *erit sectio* FIG *circulus.* Tab. III. Fig. 38.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus DFH = HGE *per hypoth.* & verticales ad H æquales

nis hujus plani & basi coni parallela, consequenter circulus (§. 468. *Geom.*). Quamobrem cum hæc ipsa sectio sit repræsentatio circuli in sphæra descripti in hoc ipso plano; idem in plano projectionis per circulum repræsentatur. *Quod erat secundum.*

Tab. III. Fig. 40. Sit circulus in sphæra descriptus ad planum projectionis inclinatus, adeoque diameter circuli projiciendi CG, linea, in quam projicitur, EH & oculus seu polus sphæræ in B. Cum BCA sit rectus (§. 317. *Geom.*) & axis sphæræ AB ad lineam in plano projectionis DH in F perpendicularis *per hypoth.* & §. 484. *Geom.*); erit etiam EFB rectus (§. 78. *Geom.*), consequenter BCA = EFB (§. 145. *Geom.*). Quare cum porro angulus FBE utrique triangulo FBE & ABC communis sit; erit etiam angulus BEF = BAC (§. 246. *Geom.*). Est vero BAC = CGB (§. 315. *Geom.*). Ergo BEF = CGB (§. 87. *Arithm.*). Quamobrem cum angulus CBG utrique triangulo CBG & EBH communis sit: erit etiam BHE = GCB (§. 246. *Geom.*), consequenter cum CG repræsentet circulum projiciendum; FH repræsentabit circulum in plano projectionis, adeoque circulus inclinatus repræsentatur per circulum (§. 169). *Quod erat tertium.*

Sit denique circulus projiciendus ad planum projectionis perpendicularis, adeoque ejus diameter GI. Quoniam anguli BIG & BCG æquales (§. 315. *Geom.*) & BHE = BCG *per antea demonstrata*; erit BIG = BHK (§. 87. *Arithm.*). Quamobrem cum angulus GBI utrique triangulo GBI & BHK communis sit; erit angulus BGI = BKH (§. 246. *Geom.*), consequenter cum GI repræsentet circulum projiciendum, cujus nempe diameter est, etiam KH circulum in plano projectionis repræsentat, cujus itidem diameter est (§. 169). Circulus itaque ad planum projectionis perpendicularis, sed non transiens per polos, per circulum projicitur. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

153. *Ne in concipienda demonstratione imaginatio negotium facessat, tenendum est,* CB & BH *esse latera sectionis triangularis coni, cujus basis est circulus habens diametrum diametro* CG *circuli projiciendi parallelam &* EH *esse communem sectionem istius trianguli & plani projectionis atque adeo lineam, in quam projicitur diameter circuli in sphæra descripti* CG: *similiter* IB & BH *esse latera sectionis triangularis coni, cujus basis est circulus habens diametrum diametro circuli proji-*

jiciendi IG *parallelam*, KH *vero esse communem sectionem istius trianguli & plani projectionis, atque adeo lineam, in quam projicitur diameter circuli in sphæra descripti* IG.

THEOREMA 67.

Tab. III. Fig. 41. 154. *In triangulo sphærico obliquangulo* ABC, *demisso ex vertice* B *perpendiculo* BD; *est ut tangens basis dimidiæ* AC *ad tangentem semisummæ crurum* AB & BC; *ita tangens semidifferentiæ eorundem crurum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum baseos* AD & DC.

DEMONSTRATIO.

Sit triangulum sphæricum ABC & HA diameter sphæræ: crus BA transiens per A, si ex altera parte continuetur, transibit per H, quemadmodum & basis AC (§. 17). Describatur ex B tanquam polo in superficie sphæræ circulus CFGE: erit BE = BF = BC; adeoque AE summa crurum, AG differentia crurum &, quia ex demonstratione theorematis 66. (§. 149) constat perpendiculum BD basin FC trianguli æquicruri FBC secare in duas partes æquales FD & DC; erit porro AF differentia segmentorum basis AD & DC.

Concipiamus sphæram in puncto A tangere planum projectionis. Quoniam puncta G & E sunt in eodem circulo maximo per polos sphæræ A & H transeuntis, si per ea ducantur rectæ HM & HN, erunt puncta M & N, in quibus planum projectionis attingunt, cum puncto A in eadem recta AM (§. 152). Et ex eadem ratione si per C & F ducantur rectæ HK & HL, erunt puncta L & K cum puncto A in eadem recta AK. Jam cum recta HA sit ad planum projectionis perpendicularis *per hypoth.* erit eadem perpendicularis ad rectas AK & AM (§. 484. *Geom.*). Quare si AH sumatur pro sinu toto, erit AK tangens anguli AHK, AL tangens anguli AHL, AM tangens anguli AHM & denique AN tangens anguli AHN. Jam anguli AHK mensura est arcus dimidius AC seu basis dimidia, anguli AHL mensura est arcus dimidius AF seu semidifferentia segmentorum basis, anguli AHM mensura est arcus dimidius AE seu semisumma crurum & denique anguli AHN mensura est arcus dimidius AG seu semidifferentia crurum (§. 314. *Geom.*), consequenter AK tangens basis dimidiæ, AL tangens semidifferentiæ segmentorum basis, AM tangens semisummæ crurum & denique AN est tangens semidifferentiæ crurum.

Quo-

Quoniam puncta E, C, F, G, quæ projiciuntur in M, K, L, N, sunt in peripheria circuli sphæræ inscripti, sed non transeuntis per polos H ad A *per constr.* erunt puncta M, K, L, N in peripheria circuli (§. 152). Quamobrem cum sit ut AK ad AM ita AN ad AL (§. 333. *Geom.*); evidens est esse ut tangentem dimidiæ basis ad tangentem semisummæ crurum ita tangentem semidifferentiæ crurum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum basis. *Q. e. d.*

SCHOLION.

155. *Demonstratio continet artificium analyticum, quo* Nepperus (a) *hoc theorema invenit, modo notes ipsum imitatum esse solutionem trianguli rectilinei, qua ex tribus lateribus investigantur anguli* (§. 41. Trig.).

THEOREMA 68.

Tab. II. Fig. 33. 156. *Triangulum sphæricum* ABC *potest transformari in aliud* MLK, *in quo latera singula* ML, LK, KM *angulis singulis* A, C, B *alterius* (*aut eorum complementis ad duos rectos, si qui fuerint obtusi*) *&* *anguli singuli* M, L, K *lateribus singulis* BC, AB, AC *alterius* (*aut eorum complementis ad semicirculum, si quæ fuerint quadrante majora*) *æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Latus unum AB continuetur in circulum AEPA, reliqua duo BC & AC producantur, donec circulo isti occurrant. Ex A, B & C tanquam polis describantur quadrantis AE, BG & CI intervallo arcus EP, GO & IN, qui erunt partes circulorum maximorum in sphæra (§. 26). Quoniam circulus ABGPA per polos A & B circulorum EP & GO transit *per construct.* hi vicissim per illius polos transeunt (§. 27). Est ergo circuli AEPA polus in L, ubi EP & GO se mutuo intersecant. Simili modo patet, in K esse polum circuli AF, quia is transit per polos A & C circulorum EP & NI se mutuo secantium in K, & in M esse polum circuli BH, quia is transit per polos B & C circulorum GO & NI se mutuo in M secantium. Sunt adeo LE & GL, itemque MQ & MH, KD & KI, AD, BQ & CH quadrantes, (§. 25), & hinc ED = LK, GQ = LM, HI = MK, AB = EG, AC = DI, BC = QH, ablato nempe a quadrantibus æ-

Iii 2 qua-

(a) Vid. Descriptio canonis mirifici Logarithmorum lib. 2. c. 6. p. m. 49. & seqq.

qualibus in casu primo arcu DL, in secundo LF, in tertio HK, in quarto BE, in quinto CD, in sexto CQ (*§. 91. Arithm.*). Sed ED mensura anguli BAC, GQ ipsius EBC, HI ipsius ICQ (*§*. 33), consequenter verticalis BCA (§. 43), EG ipsius ELG seu MLK (*§. cit.*), DI ipsius LKH, QH ipsius LMK (*§*. 33). Ergo in triangulo LMK latus LK angulo BAC, LM ipsi EBC, MK ipsi BCA, & angulus MLK lateri AB, LKH ipsi AC, LMK ipsi BC æquatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

157. *Ex jactis hactenus fundamentis solvuntur omnes casus Trigonometriæ Sphæricæ circa triangula obliquangula. Aut enim dantur sola latera, aut soli anguli, aut duo latera cum uno angulo, aut duo anguli cum uno latere. Duobus casibus prioribus satisfit* per theor. 64. 66 & 67. (§. 146. 149. 155); *duobus posterioribus* per theor. 60. (§. 136), *si partes in quæstionem venientes sibi mutuo opponuntur, sed* per theor. 61. (§. 137), *si oppositioni locus non est. Enimvero e re esse judicamus, ut hæc expresfius doceantur.*

PROBLEMA 20.

Tab. II. Fig. 28. 158. ***Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus lateribus* BC *&* AB *cum angulo uni eorum opposito* A *invenire alterum* C.**

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 136):
Ut sinus lateris BC
ad sinum anguli oppositi A,
ita sinus lateris BA
ad sinum anguli oppositi C.

Sit e. gr. BC 39° 29′, A 43° 20′, BA 60° 45′: erit

Sin. BC	98033572
Sin. A	98364771
Sin. BA	99632168
	197996939
Sin. C	99963367, cui in tabulis quamproxime respondent 82° 34′ 7″.

PROBLEMA 21.

159. ***Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus angulis* C 82° 34′ 7″ *&* A 43° 20′, *una cum latere* AB 60° 45′ *uni eorum* C *opposito, invenire latus* BC *alteri* A *oppositum.*** Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Inferatur (*§*.136):
Ut sinus anguli C
ad sinum lateris oppositi AB;
ita sinus anguli A.
ad sinum lateris oppositi BC.

Exemplum casus præcedentis facile mutatur in casum præsentem.

PRO-

PROBLEMA 22.

Tab. II. Fig. 28. 160. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ACB *duobus lateribus* AB 66°45′ *&* BC 39°29′ *una cum angulo uni eorum opposito* A 43°20′, *invenire angulum comprehensum* B.

RESOLUTIO.

Ponamus angulum C esse acutum: quia alter A etiam acutus, perpendiculum CD intra triangulum cadit (§.82).

1. In triangulo itaque rectangulo ABE ex datis angulo A & latere AB invenitur angulus ABE (§. 130).

2. Quoniam BE pro parte laterali assumta in triangulo AEB pars media est angulus ABE, conjuncta vero latus AB & in triangulo EBC pars media est angulus EBC, conjuncta latus BC (§. 94); reperietur cosinus anguli EBC, si a summa ex cosinu anguli ABE & cotangente BC subtrahatur cotangens ipsius AB (§.139).

3. Quod si anguli ABE & EBC addantur, aut perpendiculo extra triangulum cadente a se invicem subtrahantur; prodibit quæsitus ABC.

E.gr. Sin. Tot.	100000000
Cosin. AB	95963154
Summa	195963154
Cot. A	100252805

Cot. ABE 95710349, cui in tabulis quam proxime respondent 20° 25′ 35″. Est adeo ABE 69° 34′ 25″.

Cos. ABE	95428300
Cotang. BC	100841529
Summa	196269829
Cotang. AB	96330985

Cosin. EBC 99938844, cui in tabulis quam proxime respondent, 80° 24′ 26″.

Est ergo EBC 9° 35′ 34″
Addatur ABE 69.34.25

erit ABC 79° 9′ 59″

PROBLEMA 23.

161. *Datis duobus angulis* A 43°20′ *&* B 79° 9′ 59″ *una cum latere adjacente* AB 66° 45′, *invenire latus* BC *uni eorum oppositum.* Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Ex angulo uno datorum B demisso perpendiculo EB in latus ignotum AC, in triangulo rectangulo ABE ex datis angulo A & hypothenusa AB inveniatur angulus ABE (§. 130): qui

2. Ex angulo ABC subductus relinquit angulum EBC. Quodsi perpendiculum extra triangulum caderet, angulus ABC subtrahi deberet ex ABE.

3. Quoniam perpendiculo BE pro una partium lateralium assumto, in triangulo ABE pars media est angulus ABE, conjuncta vero AB, in triangulo EBC media angulus EBC, conjuncta BC (§. 94); cotangens lateris BC invenitur, si e summa cotangentis AB & cosinus EBC sutrahatur cosinus EBA (§. 139).

Exemplum problematis præcedentis facile mutatur in casum præsentis.

Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA 24.

162. *Datis in triangulo obliquangulo* ACB *duobus lateribus* AB 66° 45′ *&* BC 39° 29′ *una cum angulo* A *uni eorum opposito* 43° 20′, *invenire latus tertium* AC.

RESOLUTIO.

1. Demisso ut ante perpendiculo BE, in triangulo rectangulo ABE ex datis angulo A & hypothenusa AB inveniatur latus AE (§. 127).

2. Quoniam perpendiculo BE pro parte laterali assumto in triangulo AEB pars media est AB, sejuncta AE; in triangulo BEC media BC, sejuncta EC (§. 96); reperietur cosinus EC, si a summa cosinuum AE & CB subtrahatur cosinus AB (§. 139).

3. Quodsi segmenta AE & EC in unam summam colligantur (aut, perpendiculo extra triangulum cadente, a se invicem subtrahantur); prodibit latus quæsitum

E. gr. Sin. totus	100000000
Cosin. A	98617576
Summa	198617576
Cotang. AB	96330985
Tang. AE	102286591,

cui in tabulis quam proxime respondent 59° 25′ 52″.

Cosin. AE	97063540
Cosin. BC	98875102
Summa	195938642
Cosin. AB	95963154
Cosin. EC	99975488,

cui in tabulis quam proxime respondent 83° 55′ 6″.

Est ergo	EC	6° 4′ 54″
addatur	AE	59 25 52
erit	AC	65 30 46

PROBLEMA 25.

163. *Datis duobus lateribus* AC 65° 30′ 46″ *&* AB 66°, 45′, *cum angulo intercepto* A 43° 20′, *invenire* Tab. II. Fig. 28.

nire latus tertium BC *eidem oppositum.*

RESOLUTIO.

1. Demisso perpendiculo BE, in triangulo rectangulo quæratur ut in problemate præcedente segmentum AE (§. 162), quod

2. Ex AC subductum relinquit EC. Si perpendiculum extra triangulum cadit AC ex AE subducendum.

3. Quoniam perpendiculo BE pro parte laterali assumto in triangulo AEB pars media est AB, sejuncta AE, in triangulo EBC pars media CB, sejuncta EC (§. 69); reperietur cosinus BC, si a summa cosinuum AB & EC subtrahatur cosinus AE (§. 139).

Exemplum problematis præcedentis facile abit in casum præsentem.

PROBLEMA 26.

Tab. II. Fig. 28. 164. *Datis duobus angulis* A 43° 20′ *&* B 79° 9′ 59″ *una cum latere* CB *alteri eorum opposito* 39° 29′, *invenire latus utrique adjacens* AB.

RESOLUTIO.

1. Demisso ex angulo incognito C in latus oppositum AB perpendiculo CD, quod intra triangulum cadit ob A & B acutos (§. 82), in triangulo rectangulo BCD ex datis angulo B & hypothenusa BC invenietur segmentum DB (§. 127).

2. Quoniam perpendiculo CD pro parte laterali assumto in triangulo CDB pars media est DB, conjuncta vero angulus B, & in triangulo CDA pars media AD, conjuncta angulus A (§. 94), sinus segmenti AD reperitur, si ex summa sinus DB & cotangentis anguli A subtrahatur cotangens anguli B (§. 139).

3. Quod si segmenta AD & DB addantur (aut, perpendiculo extra triangulum cadente, a se invicem subtrahantur), prodibit latus quæsitum AB.

E. gr. Sinus totus 100000000

Cosin. B.	92740596
Summa	192740596
Cotang. BC	100841529
Tang. DB	91899067,

cui in tabulis quam proxime respondent 8° 48′ 8″.

Sin. DB	91847599
Cotang. A	100252805
Summa	192100404
Cotang. B	92818698
Sin. AD	99281706,

cui

cui in tabulis respondent	57°	56′	50″
addatur DB	8	48	8
erit AB	66	44	58

PROBLEMA 27.

165. *Datis duobus lateribus* AB
Tab. II. Fig. 28. 66° 45′ *&* BC 39° 29′ *cum angulo intercepto* B 79° 9′ 59″, *invenire angulum* A *uni eorum oppositum.*

RESOLUTIO.

1. Demissio perpendiculo CD invenitur ut in problemate præcedente segmentum DB (§. 164): quod
2. Ex AB subductum relinquit AD. Quodsi perpendiculum extra triangulum cadit, AB ad DB addendum.
3. Quoniam perpendiculo CD pro parte laterali assumto in triangulo CDB pars media est DB, conjuncta vero angulus B & in triangulo CDH media AD, conjuncta angulus A (§. 94), cotangens anguli A reperitur, si a summa cotangentis anguli B & sinus AD subtrahatur sinus DB (§. 139).

Exemplum problematis præcedentis facile huc applicatur.

PROBLEMA 28.

166. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus angulis* A 43° 20′ *&* B 79° 9′ 59″ *una cum latere adjacente* AB 66° 45′, *invenire angulum eidem oppositum* C. Tab. II. Fig. 28.

RESOLUTIO.

1. Ex angulo uno datorum B demisso in latus oppositum AC perpendiculo BE, in triangulo rectangulo ABE ex datis angulo A & hypothenusa AB invenitur angulus ABE (§. 130); qui
2. Ex ABC subductus relinquit angulum EBC. Quodsi perpendiculum extra triangulum cadit, ABC ex ABE auferri debet.
3. Quoniam perpendiculo BE pro parte laterali assumto in triangulo CEB pars media est angulus C, sejuncta angulus CBE, in triangulo ABE media angulus A, sejuncta angulus ABE (§. 96); cosinus anguli C habetur, si ex summa cosinus anguli A & sinus EBC subtrahatur sinus anguli ABE.

E.gr. Sinus totus	100000000
Cosin. AB	95963154
Summa	195963154
Cotang. A.	100252805
Cotang. ABE	95710349, cui in tabu-

tabulis respondent 20° 25′ 35″. Est adeo

ABE 69° 34′ 25″
sed ABC 79 9 59

Ergo EBC 9° 35′ 34″
Cosin A 98617576
Sin.EBC 92217908

Summa 190835484
Sin. ABE 99717958

Cosin. C 91117526, cui in tabulis respondent, quam proxime 7° 25′ 54″.

Est ergo C 82° 34′ 6″.

PROBLEMA 29.

Tab. II. Fig. 28. 167. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo* ABC *duobus angulis* A 43° 20′ *&* C 82° 34′ 6″, *una cum latere* BA *uni eorum opposito* 66° 45′, *invenire angulum reliquum.*

RESOLUTIO.

1. Ex angulo quæsito B demisso perpendiculo BE, in triangulo rectangulo AEB ex datis angulo A & hypothenusa BA invenitur angulus ABE (§. 130).
2. Quoniam perpendiculo EB pro parte laterali assumto in triangulo ECB pars media est angulus C, sejuncta angulus CBE & in triangulo AEB pars media angulus A, sejuncta angulus ABE (§. 94); sinus anguli EBC habetur, si ex summa cosinus C & sinus ABE subtrahatur cosinus A (§. 139).
3. Quodsi ABE & EBC addantur (aut, perpendiculo extra triangulum cadente, a se invicem subtrahantur); prodibit angulus ABC quæsitus.

Exemplum problematis præcedentis facile mutatur in casum præsentem.

PROBLEMA 30.

168. *Datis in triangulo sphærico obliquangulo tribus lateribus, invenire angulum uni eorum oppositum.*

RESOLUTIO.

I. Si latus unum AC fuerit quadrans, & crus AB quadrante minus, quæraturque angulus A; Tab. II. Fig. 20.

1. Continuetur AB in F, donec AF fiat quadranti æqualis & ex polo A ducatur arcus CF (§. 25), qui arcum AF secabit in F ad angulos rectos (§. 28).
2. Quoniam in triangulo CBF ad F rectangulo datur hypothenusa BC & latus BF seu complementum ipsius AB ad quadrantem, reperietur perpendiculum CF (§. 119): quod cum sit mensura anguli

CAB (§.31), eundem repertum esse patet.

Sit e. gr. AB = 67°, BC = 49°; erit cosinus BC cum sinu toto sinibus complementorum BF & CF, hoc est, sinui AB & cosinui CF seu anguli A æqualis, (§.112) adeoque

Sin. tot.	100000000
Cosin. BC	98169429
Summa	198169429
Sin. AB	99640261
Cosin. A	98529168

Cosin. A 98529168, cui in tabulis quam proxime respondent 45° 27′22″. Est adeo A 44° 32′38″.

II. Si latus unum AC fuerit quadrans, alterum AB quadrante majus, quæraturque denuo angulus A;

1. Ex AB resecetur quadrans AD & ex polo A describatur, arcus CD (§.25), qui arcum AB secabit in D ad angulos rectos (§.28).

2. Quoniam in triangulo CDB ad D rectangulo hypothenusa BC & latus DB seu excessus lateris AB supra quadrantem datur, reperietur ut ante perpendiculum CD (§. 119), quod est mensura anguli quæsiti A (§.31).

Sit e. gr. AB = 158°, BC = 78°, erit DB = 68°, adeoque (§.112) cosinus BC cum sinu toto æqualis sinibus complementorum DB & DC, hoc est, sinui complementi lateris AB ad semicirculum & cosinui anguli A æqualis. Ergo

Sinus totus	100000000
Cosin. BC	92805988
Summa	192805988
Cosin. BD	95735754

Cosinus A 97070234, cui in tabulis quam proxime respondent 30° 37′ 16″. Est ergo A 59° 22′ 44″.

III. Si triangulum ACF fuerit æquicrurum, ut nempe AC = CF quæraturque e. gr. angulus ACF: dividatur AF bifariam in D & per D atque C ducatur arcus DC. Quoniam eodem modo, quo idem de triangulis rectilineis demonstravimus (§.184. *Geom.*) ostendi potest, quemadmodum ex demonstratione theorematis 66. (§. 149) patet, esse CD ad AF perpendicularem, angulos A & F, itemque ACD & DCF æquales; ex datis in triangulo rectangulo ACD hypothenusa AC & crure AD invenitur angulus ACD (§. 117), cujus duplus est quæsitus ACF. Angulus vero A vel F reperiri ex iisdem datis potest (§. 129).

E. gr.

E. gr. Sit AC = 65° BA = 38°, erit AD = 19°, adeoque

Sin. totus	100000000
Sinus AD	95126419
Subtr. Sinus AC	99571757

Sin ACD 95553662, cui in tabulis quam proxime respondent 21° 3′ 9″. Est ergo angulus ACF = 42° 6′ 18″.

Tab. II. Fig. 28. IV. Si triangulum ACB fuerit scalenum, quæraturque angulus A;

1. ex angulo C demittatur perpendiculum CD & quæratur semidifferentia segmentorum AD & DB inferendo (§. 154)

   Ut tangens basis dimidiæ AB
   ad tangentem semisummæ crurum AC & CB
   ita tangens semidifferentiæ eorundem
   ad tangentem semidifferentiæ segmentorum AD & DB.

2. Addatur semidifferentia segmentorum ad basin dimidiam, ut habeatur majus segmentum; eadem ab eadem subtrahatur, ut habeatur minus (§. 39. *Trig. plan.*).

3. Datis jam in triangulo CAD rectangulo ad D hypothenusa AC & latere AD, invenitur angulus A (§. 119). Eodem modo in altero CDB ex datis CB & DB invenitur B.

Sit e. gr. AB = 66° 45′, AC = 65° 30′ 46″, BC = 39° 29′ erit ½ AB = 33° 22′ 30″, AC + BC = 104° 59′ 46″, AC − BC = 26° 1′ 46″, adeoque ½ AC + ½ BC = 52° 29′ 53″, ½ AC − ½ BC = 13° 0′ 53″. Quare

Tang. ½ AB	98187224
Tang. ½ AC + ½ BC	101149889
Tang. ½ AC − ½ BC	93638728
Summa	194788617

Tang. ½ AD − ½ DB 96601393, cui in tabulis quam proxime respondent 24° 34′ 18″.

½ AB =	33°	22′	30″
	24	34	18
AD =	57	56	48

Cotang. AC	96584473
Tang. AD	102033115
Summa	198617588
Sin. tot.	100000000

Cosin. A 98617588, cui in tabulis quam proxime respondent 46° 40′. Est igitur angulus A 43° 20′.

 Ali-

Aliter.

Inferatur (§. 149)

ut rectangulum ſub ſinibu s crurum AB & AC
ad quadratum ſinus totius;
ita rectangulum ſub ſinibus differentiarum crurum AB & AC a ſemiſumma omnium laterum AB, AC & BC
ad quadratum dimidii anguli A cruribus AB & BC comprehenſi.

Sit AB =	66°	45′	0″
AC =	65	30	46
BC =	39	29	0
Summa Lat.	171	44	46
Semiſ. Lat.	85	52	23
Crus AB	66	45	0
Differ. I. =	19	7	23
Semiſ. Lat.	85	52	23
Crus AC	65	30	46
Differ. II. =	20	21	37

Sin. AB =	99632168
Sin. AC =	99590670
Rectang. I. =	199222838
Sin. tot.	100000000
□ ſin. tot.	200000000
Sin. Differ. I. =	95153231
Sin. Differ. II. =	95414820
Rectang. II. =	190568051
Rectang. I. =	199222838
□ ſin. tot. =	200000000
Rectang. II. =	190568051
Summa Logg.	390568051
□ ſin. ½ A =	191345213

Sin. ½ A = 95672606, cui in tabulis proxime reſpondent 21° 40′.

Eſt igitur angulus A 43° 20′, quemadmodum ante repertus.

Adhuc aliter.

Inferatur (§. 150)

ut rectangulum ſub ſinibus crurum
ad quadratum ſinus totius;
ita rectangulum ſub ſinibus ſemidifferentiarum cruris uniuscujusque a baſi & crure altero
ad quadratum dimidii anguli verticalis.

Sit ut ante AB 66° 45′, AC 65° 30′ 46″ BC 39° 29′; erit

AC =	65°	30′	46″
BC =	39	29	0
AC+BC =	104	59	46
AB =	66	45	0
Differ. I. =	38	14	46
Semidiff. I. =	19	7	23

AB

AB	=	66°	45′	0″
BC	=	39	29	0
AB+BC	=	106	14	0
AC	=	65	30	46
Differ. II.	=	40	43	14
Semidiff. II.	=	20	21	37

Reliqua sunt prorsus ut ante.

Adhuc aliter.

Tab. III. Fig. 34. Si datis tribus lateribus AC, CB & BA inveniendus angulus A, basis CB & crus alterum CA, continuentur in F & E, donec fiant quadrantibus æquales & ex polo C descripto arcu FD, donec cruri alteri BA continuato in D occurrat,

1. Quæratur arcus dimidius compositus ex BD & AD inferendo (§. 146), ut differentia cosinuum basis CB & cruris unius AC ad summam eorundem laterum, ita tangens cruris dimidii alterius AB ad tangentem arcus dimidii compositi ex BD & AD.

2. Ex arcu invento subducatur crus AB, ut relinquatur duplum ipsius AD.

3. Datis in triangulo AED ad E rectangulo (§ 28) hypothenusa AD *vi num.* 2. & latere AE complemento cruris AC ad quadrantem *vi num.* 1. invenitur angulus A (§. 129), qui suo verticali BAC æqualis (§. 43).

4. Quodsi latera LA & LB fuerint quadrante majora, continuentur ad semicirculum & loco trianguli ALB solvatur triangulum ACB. Tab. II. Fig. 28.

E. gr. Sit ut ante AB 66° 45′, AC = 65° 30′ 46, BC = 39° 29′, erit

Cosinus BC	7718096
Cosinus AC	4144902
Summa Cosin.	11862998
Differ. eorund.	3573194

Respondent in Tabulis

Summæ Tang.	49°	52″	19″
Differentiæ sinus	20	56	8

Cum adeo summa cosinuum AB & BC & tangens arcus 49° 52′ 19″ itemque differentia cosinum AC & BC atque sinus arcus 20° 56′ 8″, eundem habeant logarithmum, erit

Log. Differ. Cos.	95530544
Summæ Cos	100742159
Tang. ½ AB	98187223
Summa	198929382
Tang. ½ AD + ½ DB	103398838

 cui

cui in Tabulis quam proxime respondent 65° 25′ 47″

Quare AD+AB	130	51	34
AB	66	45	0
2 AD	64	6	34
AD	32	3	17
CE	90	0	0
AC	65	30	46
AE	24	29	14

Cot. AD	102032881
Tang. AE	96584473

Cosin. A 498617354, cui in Tabulis proxime respondent 46° 39′ 50

Ergo angulus A 43° 20′ 10″.

Cum tædiosa sit logarithmorum summæ ac differentiæ cosinuum AC & BC inventio; præstat uti modis anterioribus.

SCHOLION.

169. *Quodsi in illatione prima solutionis primæ casus quarti pro tangentibus crurum & basis sumantur ipsa crura & basis, prodibit ea, qua ex datis tribus lateribus in triangulo rectilineo investigamus angulos* (§. 41. Trigon. plan.). *Patet adeo, casum difficillimum Trigonometriæ sphæricæ eadem facilitate solvi posse, qua in Trigonometria plana solvitur. Quare si praxin spectes, Trigonometria sphærica nunc ad eandem facilitatem reducta est, qua plana gaudet.*

PROBLEMA 31.

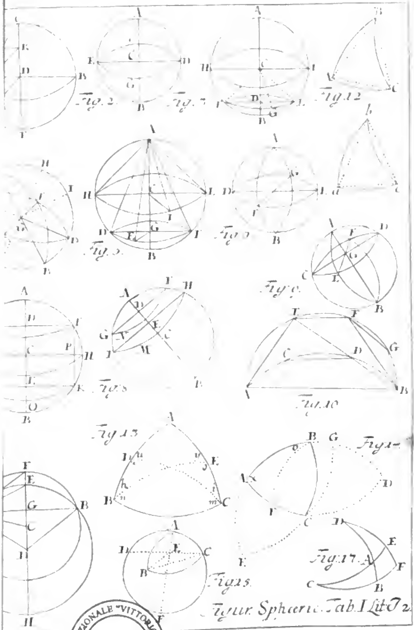
170. ***Datis tribus angulis*** **A, B & C** ***in triangulo sphærico obliquangulo*** **ABC**, ***invenire latus quodcunque.***

RESOLUTIO.

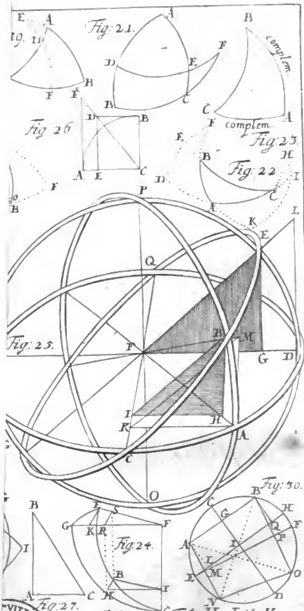
Quia loco trianguli dati aliud assumi potest, in quo latera æqualia sunt angulis, anguli vero lateribus datis (§. 156); problematis resolutio non differt a resolutione præcedentis.

FINIS
TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ.

ELE-



Figur. Sphaeric. Tab. I Lit. T 2.



Figur. Sphær. Tab. II. Lit. K 2.

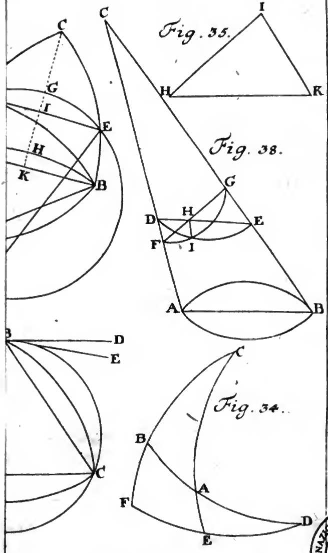


Fig. Sphær. Tab. III. a.

Lit. L 2.

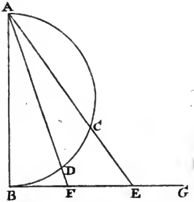


Fig. 39.

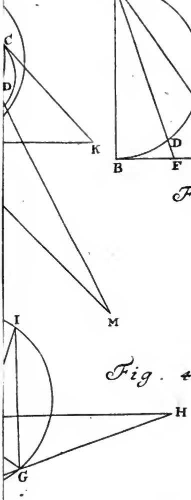


Fig. 40.

Fig. Sphær. Tab. III. b.
Lit. M 2.

ELEMENTA
ASTRONOMIÆ.

PRÆFATIO.

Summa Numinis immenſi majeſtas & excellentia intellectus humani prorſus inſignis non aliunde clarius, quam ex Aſtronomia eluceſcit, quæ per ſtructuram univerſi ſimplicitate ac vaſtitate ſua admirandam motusque ſiderum leges ſcientiæ, ſapientiæ, potentiæ, immo bonitatis divinæ immenſitatem, vulgo ab hominibus nonniſi confuſe cognitam, diſtincte cognoſcendam exhibet & intellectui humano, ſi eodem rite utamur, ad abſcondita maxime & a ſenſibus remota aditum patere exemplis evidentiſſimis demonſtrat. Commendandum igitur eſt Aſtronomiæ ſtudium tum iis, qui ex cognitione perfectionum divinarum voluptatem capiunt, ut voluptate ſumma perfundantur; tum etiam illis, qui propriis aliquando meditationibus veritates adhuc latentes in apricum producere & naturalem inprimis ſcientiam ulterius perficere cupiunt, ut ſumma intellectus perfectio nonniſi genuino uſu comparanda ipſis concilietur. Utrique fini ut ſatisfacerem, omnem Aſtro-

ELEMENTA ASTRONOMIÆ.

Pars I.

ELEMEMTA ASTRONOMIÆ SPHÆRICÆ.

CAPUT I.

OBSERVATIONES COMMUNES RECENSET AC INDE PRIMA ASTRONOMIÆ SPHÆRICÆ PRINCIPIA STABILIT.

DEFINITIO 1.

1.

A*stronomia* est scientia Universi ac phænomenorum ejus qua talis.

DEFINITIO 2.

2. *Astronomia sphærica* est, quæ universum considerat, quale in oculos incurrit.

DEFINITIO 3.

3. *Astronomia theorica* est, quæ universi veram structuram considerat & ejus phænomena inde determinat.

DEFINITIO 4.

4. *Per observationes communes* intelligo ea, quæ ad perceptiones phænomenorum universi veluti sponte sua se offerentes attenti cognoscimus.

DEFINITIO 5.

5. *Observationes astronomicas* appello ea, quæ ad perceptiones phænomenorum universi studio nostro in nobis productas attenti cognoscimus.

SCHOLION.

6. *Observationes communes primæ omnium sunt & astronomicis ansam dant. Quamobrem ut intelligatur, quomodo Astronomia enata fuerit suaque incrementa ceperit, ab observationibus communibus ordiendum nobis erit: id quod & aliis scientiis lucem affundit.*

OBSERVATIO. 1.

7. *Si noctu cœlum stellatum intuemur, omnes stellæ æqualibus intervallis a nobis distare videntur:*

tur: & hæc apparentia constans est quovis anni tempore atque ubivis locorum.

COROLLARIUM 1.

8. Quia distantiarum magnarum differentias, etsi admodum ingentes, visus non discernit (§. 250. *Optic.*); sensuum judicio constare nequit, unum stellæ omnes a nobis æqualibus intervallis revera distent, nec ne.

SCHOLION.

9. *Hoc probe notandum est, ne vitio subreptionis judicium præcipitantes periculo errandi nos exponamus & progressum scientiæ impediamus.*

COROLLARIUM 2.

10. Cœlum igitur cuivis spectatori instar hemisphærii cavi apparet, in cujus superficie stellæ sint constitutæ, in centro autem ipse sit collocatus (§. 471. *Geom.*): hinc tamen inferri nequit, hæc revera ita se habere (§. 8).

OBSERVATIO 2.

11. *Stellæ, quæ vertici nostro imminent, aliquo temporis spatio præterlapso, ab eodem distare videntur versus dextram, aliis nunc super vertice conspicuis, quæ ante versus lævam distabant, facie nempe illuc versa, ubi solem circa meridiem contuemur. Stellæ, quas versus dextram prope extremitatem cœli ante conspiciebamus, disparuerunt & aliæ vertici viciniores locum earundem occupant: contra quæ versus sinistram extremas cœli partes replebant, vertici propiores videntur, in ipsorum vero locis aliæ ante nondum præsentes cernuntur. Ceterum distantia stellarum inter se, quamdiu eas conspicimus, eadem apparet. Postero die iisdem horis redeuntibus eadem cœli facies conspicitur. Eadem interdiu de Sole, noctu de Luna observamus.*

SCHOLION.

12. *In hac observatione recensenda consulto abstinemus a terminis astronomicis, quibus excogitandis eadem inservit.*

COROLLARIUM 1.

13. Stellarum igitur, Solis ac Lunæ situs respectu puncti cujusdam fixi in superficie Telluris continuo, sed per insensibilia incrementa mutatur.

SCHOLION.

14. *Repetenda hic sunt, quæ de vitando vitio subreptionis supra inculcavimus (§. 9).*

COROLLARIUM 2.

15. Quoniam spectator locum in terra non mutat, adeoque seipsum tanquam immotum spectat; cœlum moveri videtur (§. 13), & quidem circa terram (§. 11).

COROLLARIUM 3.

16. Cum tamen in omni situ figuram

ram hemisphærii cavi referat (§.10); planum sectionis ubivis locorum est circulus maximus (§. 19. *Spheric.*), adeoque cœlum terræ incolis instar sphæræ cavæ apparet (§. 13. *Sphær.*) in cujus centro ipsi constituti (§. 15. *Sphær.*), & quæ circa terram quotidie gyratur (§. 15.).

COROLLARIUM 4.

17. Et quoniam stellæ eandem a se invicem distantiam servant (§. 11), superficiei sphæræ cavæ quasi affixæ videntur.

COROLLARIUM 5.

18. Cum Astronomia sphærica mundum consideret, qualis in oculos incurrit (§. 2); in ea recte assumitur, mundum esse sphæram cavam, quæ circa tellurem in centro ejus collocatam rotatur, stellis ejus superficiei affixis, ac inde phænomena reliqua determinantur, quæ ex hac apparentia consequuntur.

DEFINITIO 6.

19. Cum sidus apparere incipit, quod antea latebat, *oriri* dicitur: quando vero disparet, quod ante apparuerat, *occidere* dicitur. Est nempe *Ortus* apparentia sideris ante latentis: *Occasus* vero occultatio sideris antea conspicui. Denotant quoque vocabula *Ortus* & *Occasus* loca, ubi sidera oriuntur & occidunt.

SCHOLION.

20. *Has sane, non alias ortus & occasus notiones habemus* (§. 19. *Math.* Mathem.): *quæ adeo motum siderum non involvunt.*

DEFINITIO 7.

21. Motus, quo stellæ cum sphæra mundana circa tellurem ab ortu ad occasum moveri videntur, vocatur *Motus primus*, *communis*, *diurnus*, item *motus primi mobilis*.

SCHOLION.

22. *Hunc motum potissimum Astronomia sphærica expendit &, qualia inde phænomena in terra spectanda pendeant, determinat.*

OBSERVATIO 3.

23. *Si stellas notemus, quibus Luna vicina videtur; easdem die sequente ab eadem aliquo intervallo versus occasum distare observamus: Luna vero prope stellas alias cernitur. Atque hæc distantiæ mutatio quotidie accidit, donec tandem 27 circiter diebus elapsis in vicinia earundem stellarum conspiciatur, inter quas in prima observatione hærebat.*

COROLLARIUM.

24. Luna igitur interea, dum quotidie cum sphæra mundana circa tellurem rotatur (§. 16), indies certo intervallo a stellis sociis versus ortum digredi, adeoque motu contrario ab occasu versus ortum 27 circiter dierum intervallo circa eandem moveri videtur (§. 23).

DEFINITIO 8.

25. *Stellæ fixæ* dicuntur, quæ eandem a se invicem distantiam constanter servant.

OBSERVATIO 4.

26. *Si stellas notemus, quæ in ea cœli parte conspiciuntur, ubi Sol visui nostro se subduxit; observationibus per plures dies continuatis, animadvertimus, quæ in anterioribus vertici erant propiores, eas in posterioribus occasui esse proximas, donec tandem annuo spatio 365 circiter dierum elapso idem cœli situs redeat.*

COROLLARIUM.

27. Sol adeo æque ac Luna interea temporis, dum cum sphæra mundana circa tellurem rotatur, ad alias aliasque fixas ab occasu versus ortum progredi, sicque motu contrario intra anni spatium circa tellurem moveri videtur.

OBSERVATIO 5.

28. *Si stellarum distantias a se invicem quotidie attentius contemplamur, præter Lunam ac Solem quinque adhuc stellas situm suum quotidie mutare observamus, quamvis earum distantia a fixa quadam data non eadem quantitate in singulis mutetur, ita ut primus nonnisi triginta circiter, secundus duodecim, tertius duobus annis præterlapsis, duo autem a Sole non multum digredientes, eumque interdum præcedentes, interdum sequentes, annuo circiter spatio in eodem cœli loco rursus conspiciantur.*

COROLLARIUM.

29. Quinque igitur stellæ per in ... ac Sol & Luna interea temporis, dum cum sphæra mundana circa tellurem gyrantur, motu contrario ab occasu versus ortum inæqualibus temporum intervallis circa eandem moveri videntur.

DEFINITIO 9.

30. *Motus secundus* seu *proprius* appellatur, quo stella ab occasu versus ortum indies certo intervallo promovetur.

DEFINITIO 10.

31. *Planetæ* seu *stellæ erraticæ* vocantur sidera, quorum a fixis distantia indies mutatur.

DEFINITIO 11.

32. *Saturnus* est planeta debiliore lumine conspicuus, intra 30 circiter annos periodum suam circa tellurem motu proprio absolvens.

DEFINITIO 12.

33. *Jupiter* est planeta, insigni splendore refulgens, intra 12 circiter annos motu proprio periodum suam circa tellurem absolvens.

DE-

DEFINITIO 13.

34. *Mars* est planeta, lumine subrubido corruscans, intra biennium circiter motu proprio periodum circa tellurem absolvens.

DEFINITIO 14.

35. *Venus* est planeta, splendore suo lumen omnium superans, Solem constanter comitans, nec ultra 47 circiter gradus ab eo digrediens. Quando Solem præcedit, *Phosphorus* seu *Lucifer*; quando sequitur, *Hesperus* vocatur.

DEFINITIO 15.

36. *Mercurius* est planeta exiguus, lumine tamen satis claro fulgens, Solis individuus comes, nec ultra 28 gradus ab eodem digrediens.

SCHOLION.

37. *Ex his definitionibus proprio quilibet Marte planetas agnoscet. Si enim post occasum Solis videat planetarum ortui quam occasui viciniorem, inde colligit nec Venerem, nec Mercurium esse* (§. 35. 36). *An vero sit Saturnus, an Jupiter, an Mars, ex lumine ulterius dignoscit* (§. 32. 33. 34). *Qui Saturnum, Jovem & Martem agnoscit, ex lumine quoque Venerem & Mercurium distinguit* (§. 35. 36). *Contra si quis, illis adhuc sibi ignotis, planetam observat a Sole recedentem, mox iterum ad eum redeuntem, is Venerem vel Mercurium esse inde colligit: utrum vero Venus, an Mercurius sit, ex lumine dignoscit* (§. 35. 36). *Cognitis vero Venere & Mecurio reliquos ex solo lumine agnoscit* (§. 32. 33. 34).

DEFINITIO 16.

38. Sol atque planetæ certis signis indigitari solent. Est nempe

♄ signum Saturni.
♃ Jovis.
♂ Martis.
♀ Veneris.
☿ Mercurii.
☉ Solis.
☽ Lunæ.
♁ Terræ.

OBSERVATIO 6.

39. *Si distantias Solis & planetarum a vertice minimas in maxima earum elevatione quotidie observamus; eas ad certum usque terminum continuo crescere, dein rursus decrescere discimus: qui tamen uterque terminus in singulis diversus notatur.*

COROLLARIUM.

40. Omnes igitur sub circulo aliquo sphæræ mundanæ, non tamen uno eodemque motu proprio incedunt.

CA-

CAPUT II.
DE
CIRCULIS SPHÆRÆ MUNDANÆ.

DEFINITIO 17.

41. Per *circulos sphæræ mundanæ* intelligo eos, qui sphæram mundanam secant & peripheriam habent vel in ipsa superficie ejus mobili, vel in alia immobili isti contermina & æquidistante.

DEFINITIO 18.

42. *Circulus mobilis* est, cujus peripheria in superficie sphæræ mundanæ mobili existit; adeoque cum sphæra motu diurno rotatur.

DEFINITIO 19.

43. *Circulus immotus* est, cujus peripheria in superficie sphæræ mundanæ immobili existit, adeoque cum sphæra motu diurno non rotatur.

DEFINITIO 20.

44. *Axis mundi* est recta PQ, circa quam sphæra mundana motu diurno rotatur.

Tab. I. Fig. 1.

SCHOLION.

45. *Nimirum illud temporis spatium, quo sphæra mundana unam revolutionem circa Tellurem absolvit, dies dicitur in communi etiam sermone. Unde motus iste circa axem proprium diurnus appellari solet.*

DEFINITIO 21.

46. *Poli mundi* sunt puncta P & Q in superficie sphæræ mundanæ, per quæ axis PQ transit. *Polus* nobis conspicuus P dicitur *arcticus* seu *borealis*; ipsi vero oppositus Q *antarcticus* seu *australis*.

SCHOLION.

47. *Denominatio poli arctici est a sidere vicino, quod ursæ minoris fert nomen. Antarcticus vero ita dicitur, quod arctico opponatur.*

DEFINITIO 22.

48. *Æquator* DA est circulus sphæræ mundanæ maximus, mobilis & eosdem cum ipsa polos P & Q habens.

CO-

COROLLARIUM 1.

49. Singula æquatoris puncta a polis mundi quadrantis intervallo distant (§.25. *Sphæric.*).

COROLLARIUM 2.

50. Æquator sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 19. *Sphæric.*), in quorum uno est polus borealis, in altero australis (§.46, 49).

DEFINITIO 23.

Tab. I. Fig. 1. 51. *Hemisphærium boreale seu septentrionale* est dimidium sphæræ mundanæ DPA æquatore DA terminatum, in cujus vertice est polus borealis P.

DEFINITIO 24.

52. *Hemisphærium australe* seu *meridionale* est dimidium sphæræ mundanæ DQA æquatore DA terminatum, in cujus vertice est polus australis Q.

DEFINITIO 25.

53. *Circulus æquinoctialis* est circulus maximus immotus, sub cujus peripheria æquator motu diurno movetur.

SCHOLION 1.

54. *Nempe si semidiameter sphæræ per punctum æquatoris producatur (quæ eadem est cum semidiametro æquatoris* §. 15. Sphær.) *, in superficie immobili peripheria æquinoctialis describitur, dum sphæra circa axem rotatur* (§. 131. Geom.)

SCHOLION 2.

55. *Circulus æquinoctialis vulgo cum æquatore confunditur, quia idem sunt planum, nisi quod planum æquatoris mobile, æquinoctialis immobile spectetur & æquinoctiale veluti spatium consideretur, intra quod æquator continetur.*

DEFINITIO 26.

56. *Circulus diurnus* est circulus immotus, in cujus peripheria stella aliqua aut punctum aliquod in superficie mundana mobili datum motu diurno movetur.

SCHOLION.

57. *Nempe si recta ex centro stellæ ad axem mundi perpendicularis ultra superficiem sphæræ mundanæ producta concipiatur, in superficie immota peripheriam circuli diurni describit, dum sphæra circa axem rotatur* (§. 131. Geom.).

DEFINITIO 27.

58. *Zenith* seu *punctum verticale* est punctum Z in superficie sphæræ mundanæ immobili, ex quo ducta recta per verticem spectatoris per centrum terræ transit. Quod ipsi diametraliter opponitur N, vocatur *Nadir*.

COROLLARIUM 1.

59. Tot sunt Zenith, quot diversa in terra loca, e quibus cœlum spectari potest.

COROLLARIUM 2.

60. Mutato igitur loco, mutatur etiam Zenith.

DEFINITIO 28.

Tab. I. Fig. 2. 61. *Horizon rationalis* sive *verus* est circulus maximus immotus HR, cujus poli sunt Zenith Z atque Nadir N. Horizon rationalis etiam simpliciter *Horizon* dicitur.

COROLLARIUM 1.

62. Singula horizontis puncta a Zenith atque Nadir quadrantis intervallo distant (§. 25. *Sphæric.*).

COROLLARIUM 2.

63. Horizon verus sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 19. *Sphæric.*).

DEFINITIO 29.

64. *Hemisphærium superius* est dimidium sphæræ mundanæ HZR horizonte HR terminatum, in cujus vertice est Zenith Z.

DEFINITIO 30.

65. *Hemisphærium inferius* est dimidium sphæræ mundanæ HNR horizonte HR terminatum, in cujus vertice est Nadir N.

DEFINITIO 31.

66. *Horizon sensibilis* sive *apparens* est circulus *hr*, qui partem sphæræ mundanæ conspicuam a latente separat.

COROLLARIUM.

67. Quia rectæ a Zenith Z ad singula horizontis apparentis *br* puncta ductæ æquales apparent; horizontis sensibilis polus est Zenith Z (§. 12. *Sphær.*) consequenter cum Nadir N ipsi Zenith diametraliter opponatur (§. 58), Nadir est alter horizontis apparentis polus (§. 23. *Sphær.*). Tab. I. Fig. 1.

DEFINITIO 32.

68. *Horizon ortivus* est pars horizontis, in qua Sol oritur.

DEFINITIO 33.

69. *Horizon occiduus* est pars horizontis, in qua Sol occidit.

DEFINITIO 34.

70. *Circulus verticalis* est circulus sphæræ maximus immotus, per Zenith Z atque Nadir N & punctum quodcunque aliud in sphæra mundana ductus.

SCHOLION.

71. *Datis nempe in superficie sphæræ tribus punctis, circulus determinatur* (§. 294 Geom.).

DEFINITIO 35.

72. *Meridianus* est circulus verticalis AZBN per polos mundi P & Q transiens. *Verticalis primarius* dicitur, qui per polos meridiani D & E transit. Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO 36.

73. *Altitudo* stellæ vel puncti in sphæra mundana est distantia ejus

jus ab horizonte. *Profunditas* appellatur si stella vel punctum fuerit in hemisphærio inferiori. Utraque *vera* dicitur, si horizon spectetur verus; *apparens*, si apparens.

SCHOLION.

74. *Horizon nempe instar basis, centrum stellæ vel punctum quodlibet aliud in sphæra mundana datum instar verticis alicujus objecti consideratur* (§. 115. Geom.).

DEFINITIO 37.

Tab. I. Fig. 8. 75. *Declinatio* stellæ S aut puncti in sphæra mundana dati est distantia ejus ab æquatore.

COROLLARIUM 1.

76. Est ergo arcus circuli maximi GS inter punctum datum S & æquatorem AQ interceptus atque ad eum perpendicularis (§. 38. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

77. Circulus adeo, cujus arcu declinationem GS metimur, per polos æquatoris (§. 28. *Sphær*), consequenter per polos mundi P & K transit (§. 48).

DEFINITIO 38.

78. Hinc *Circulus declinationis* est circulus maximus PGDK per polos mundi P & K transiens.

COROLLARIUM.

79. Est ergo GP arcus inter æquatorem AQ & polum P interceptus circuli quadrans (§. 25. *Sphær.*).

DEFINITIO 39.

80. *Cardines mundi* sunt puncta horizontis A, D, B, E, in quibus meridianus AZBN & circulus verticalis primarius ZDNE horizontem ADBE secant. Est autem *Cardo septentrionis* A punctum intersectionis meridiani & horizontis, cui polus borealis P vicinus. *Cardo meridiei* est cardo mundi B cardini septentrionis A oppositus. *Cardo orientis* E est punctum intersectionis horizontis ortivi & verticalis primarii. *Cardo* denique *occidentis* D est punctum intersectionis horizontis occidui & verticalis primarii. Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO 40.

81. *Linea meridiana* est intersectio AB planorum meridiani AZBN & horizontis ADBE. Eodem quoque nomine venit recta quæcunque alia eidem in plano meridiani parallela. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM.

82. Transit ergo per cardinem septentrionis A & meridiei B (§. 80).

THEOREMA 1.

83. *Dimidia æquatoris pars supra horizontem rationalem, dimidia infra eum existit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim tam æquator (§. 48), quam

quam horizon rationalis circulus maximus (§. 61). Se mutuo itaque bifariam secant (§. 20. *Sphær.*), consequenter æquatoris pars dimidia supra horizontem rationalem, dimidia infra eum existit. *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

84. *Meridianus æquatorem & horizontem rationalem bifariam & ad angulos rectos secat.*

DEMONSTRATIO.

Meridianus est circulus verticalis (§. 72), adeoque maximus (§. 70). Cum itaque & æquator (§. 48), & horizon rationalis sit circulus maximus (§. 61); meridianus tam æquatorem, quam horizontem rationalem bifariam secat (§. 20. *Sphær.*). *Quod erat unum.*

Quia Zenith atque Nadir sunt poli horizontis rationalis (§. 61), & poli mundi iidem cum polis æquatoris (§. 48), meridianus cum per polos horizontis rationalis, tum per polos æquatoris transit (§. 70 & 72). Secat igitur horizontem rationalem atque æquatorem ad angulos rectos (§. 28. *Sphær.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 3.

85. *Quilibet circulus verticalis horizontem rationalem bifariam & ad angulos rectos secat.*

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis.

THEOREMA 4.

86. *Horizon rationalis & æquator per polos meridiani transit.*

DEMONSTRATIO.

Quia enim poli horizontis rationalis sunt Zenith atque Nadir (§. 61), æquatoris vero poli iidem cum polis mundi (§. 48); meridianus per polos horizontis rationalis & æquatoris transit (§. 70 & 72). Ergo horizon & æquator vicissim per polos meridiani transeunt (§. 27. *Sphær.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

87. Ibi adeo sunt poli meridiani, ubi æquator & horizon rationalis se mutuo intersecant.

COROLLARIUM 2.

88. Cum meridianus sit circulus verticalis (§. 72), adeoque immotus (§. 70); poli ejus erunt quoque puncta immota (§. 25. *Sphær.*), adeoque æquator horizontem rationalem in eodem semper puncto secat, dum sphæra mundana circa axem convertitur.

COROLLARIUM.

89. Arcus æquatoris inter horizontem & meridianum, & arcus horizontis inter æquatorem atque meridianum interceptus est quadrans (§. 25. *Sphær.*).

THE-

THEOREMA 5.

Tab. I. Fig. 2. 90. *Horizontis sensibilis poli sunt Zenith atque Nadir.*

DEMONSTRATIO.

Recta ZC ex Zenith Z ad planum horizontis sensibilis ADBE demissa perpendicularis est ad planum (§. 58), adeoque ad singulas rectas per punctum C in eodem plano ductas (484. *Geom.*). Sed rectæ CE, CB, CD, CA æquales sunt (§. 7). Ergo etiam ZB, ZE, ZA, ZD æquales sunt (§. 179. *Geom.*), consequenter Zenith Z est unus horizontis sensibilis polus (§. 12. *Sphær.*). Quare cum Nadir ipsi diametraliter opponatur (58); erit hoc punctum ejusdem polus alter (§. 24 *Sphær.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

91. Horizon ergo sensibilis & rationalis eosdem habent polos (§. 61).

COROLLARIUM 2.

92. Est adeo horizon sensibilis rationali parallelus (§. 42. *Sphær.*).

THEOREMA 6.

93. *Circuli verticales horizontem sensibilem bifariam & ad angulos rectos secant.*

DEMONSTRATIO.

Cum Zenith atque Nadir sint poli horizontis sensibilis (§. 90); meridianus per polos horizontis sensibilis transit (§. 70. 71). Secat ergo eundem bifariam & ad angulos rectos (§. 30. *Sphæric.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

94. *Altitudo alicujus puncti in sphæra mundana, itemque profunditas ejus est arcus circuli verticalis inter ipsum & horizontem interceptus.*

DEMONSTRATIO.

Cum altitudo & profunditas sint distantiæ ab horizonte (§. 73); erunt eædem arcus circulorum maximorum inter puncta data & horizontem intercepti atque ad eundem perpendiculares (§. 83. *Sphær*). Sed circuli verticales sunt maximi (§. 70) atque ad horizontem perpendiculares (§. 85). Ergo eorum arcus inter puncta in hemisphærio superiori & inferiori data atque horizontem intercepti sunt illorum altitudines, horum vero profunditates. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

95. Quia meridianus circulus verticalis (§. 72); altitudo meridiana, hoc est, altitudo puncti in meridiano constituti, est arcus meridiani inter ipsam & horizontem interceptus.

COROLLARIUM 2.

96. Et quia meridianus per polos mundi transit (§.72); altitudo poli itemque æquatoris in hemisphærio superiori & profunditas in inferiori est arcus meridiani quadrante minor inter polum ac horizontem interceptus.

THEOREMA 8.

Tab. I. Fig. 5. 97. *Altitudo æquatoris cum altitudine poli quadranti æqualis. Idem valet de profunditate ejus.*

DEMONSTRATIO.

Sit AQ æquator, HR horizon, Z Zenith, P polus, erit HZPN meridianus (§.72.70), PR altitudo poli, HA altitudo æquatoris & QR profunditas ejusdem (§.97). Est vero PA quadrans (§. 49) & HA + AP + PR semicirculus (§. 84). Ergo HA + PR quadrans. *Quod erat unum.*

PR + RQ esse itidem quadrantem patet per cor. 1. def. 22. (§.49). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

98. Quia tam HA + PR, quam PR + RQ quadrans est (§.98); erit HA = QR (§.91. *Arithm.*), hoc est, altitudo æquatoris maxima æquatur ejus profunditati maximæ.

DEFINITIO 41.

99. Altitudo poli & æquatoris PR & AH communiter etiam vocatur *Elevatio poli & æquatoris.*

THEOREMA 9.

100. *Mensura anguli O, quem efficit æquator AO ad horizontem HO sive ortivum, sive occiduum, æqualis est elevationi æquatoris HA.* Tab. I. Fig. 3.

DEMONSTRATIO.

In O est polus meridiani HZRN (§.87) & hinc OA & OH quadrantes (§.25. *Sphær.*). Est ergo HA mensura anguli O, sive O fuerit in horizonte occiduo, sive in ortivo (§.31. *Sphær.*) *Q. e. d.*

SCHOLION.

101. *Non mirum, quod anguli ex intersectione æquatoris & horizontis tam ortivi, quam occidui orti, eandem habeant mensuram: sunt enim æquales* (§. 32. Sphær.).

THEOREMA 10.

102. *Cardines orientis D & occidentis E sunt poli meridiani, a cardinibus septentrionis A & meridiei B quadrantis intervallo distant, sibique mutuo diametraliter opponuntur.* Tab. I. Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

Circulus verticalis primarius ZDNE, qui transit per cardines orientis D & occidentis E (§. 80), transit etiam per polos meridiani (§.72).

(§.72). Sed poli meridiani sunt in horizonte (§. 86): ergo cardines occidentis D & orientis E sunt poli meridiani, adeoque sibi mutuo diametraliter opponuntur (§. 24. *Sphæric.*) &, quoniam cardines meridiei ac septentrionis in intersectionibus horizontis atque meridiani A & B existunt (§ 80), adeoque arcus æquatoris inter polos Meridiani & ipsos interceptus quadrans (§. 89), quadrantis intervallo ab iisdem distant (§. 54. *Sphær.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

103. Quoniam adeo recta DE ex cardine orientis in cardinem occidentis ducta per centrum sphæræ C transit (§. 470. *Geom.*) & AD quadrans circuli existit (§.102); erit ACD angulus rectus (§.143.*Geom.*), adeoque recta DE ad lineam meridianam AB perpendicularis (§. 78. *Geom.*

THEOREMA II.

Tab. I. Fig. 4. 104. *Altitudines apparentes* MB *&* mb *æquales sunt & sub eodem angulo videntur, si veræ* MA *&* ma *fuerint æquales.*

DEMONSTRATIO.

MA = *ma per hypoth.* Sed horizon apparens *hr* vero HR parallelus (§.92), adeoque AB & *ab* æquales sunt (§. 42. *Sphær.*). Ergo etiam MB = *mb* (§. 91. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Cum itaque chordæ cognomines MB & *mb* (§. 289. *Geom.*) atque rectæ TB & *tb* (§.7), itemque anguli MBT & *mbt*, utpote eodem modo determinati (§. 93. & *per demonstr.*) similes (§. 120. *Geom.*) adeoque æquales sint (§ 174. *Geom.*); erunt quoque anguli BTM & *b*T*m*, sub quibus magnitudines apparentes BM & *bm* videntur, inter se æquales (§. 179. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

105. *Posthac evincemus, altitudines veras & apparentes ad sensum non differre, nisi fere in Luna sola. Sed antequam id constet, utendum est altitudinibus apparentibus, tanquam a veris diversis, ne in leges accuratæ methodi, quam mihi proposui, impingatur. Et quoniam altitudinum, præsertim meridianarum, observatio præcipuum totius Astronomiæ fundamentum existit; ideo e re esse videtur, ut* Quadrantem astronomicum, *quali recentiores Astronomi in observandis siderum altitudinibus utuntur, distincte describamus. Quare cum* Philippus de la Hire. *observator celeberrimus, talem dederit descriptionem* (a); *eam huc transferre libet.*

PRO-

(a) in Tabulis Astronomicis p. 56. & seqq.

PROBLEMA I.

106. *Quadrantem astronomicum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 5. n. 1. 1. Fiat quadrans ABC, cujus radius AC trium circiter pedum, ut divisiones satis minutas admittat, non tamen nimia mole molestus sit, si hinc inde transferendus aut manibus tractandus.

2. Limbus ferreus AB supra regulas ferreas AC, CB, CD, AE & EB mediocris crassitiei paululum emineat ac lamina orichalcea exacte lævigata superinducatur.

3. In centro aptetur lamina circularis C, ferrea & crassa, sed alia orichalcea superinducenda, ita ut cum limbo AB exacte in eodem sit plano.

4. In centro laminæ fiat foramen rotundum C, cujus diameter $\frac{1}{3}$ circiter unius digiti.

n. 2. 5. Per hoc foramen adigatur cylindrus ex orichalco tornatus & bene politus DE, cujus basis DF ultra laminam C paululum extet.

6. In centro basis cylindri I defigatur mucro acus tenuissimæ GI cujus caput G anconi ferreo DG mastice agglutinetur.

7. Ex mucrone acus suspendatur capillus FH cum pondere K duarum circiter unciarum ope annuli satis ampli, ne nodus H laminæ centrali C occurrens motui remoras injiciat: quem in finem etiam basis DF aliqualem habere debet convexitatem. n. 1. 2.

8. Ne capillus FK aëris motu agitetur, in lamina centrali supra ferream laminam inseratur annulus planus circa centrum volubilis; cylindro tamen DE minime occurrens, ita ut ejus superficies ultra superficiem laminæ orichalceæ non emineat, & eidem tubus ex ea parte, qua instrumentum respicit, planus duarum cochlearum ope annectatur, cum pendulo quaquaversum mobilis. n. 3. n. 2.

9. Circa centrum gravitatis instrumenti E ope cochlearum ad regulas ferreas AE, EB & DC firmetur cylindrus ferreus, longitudine 8 digitorum, diametro 10 linearum, ad planum quadrantis perpendicularis, circa quem quadrans in usu vertitur. n. 3.

10. Fiat porro regula ferrea EO, cujus crassities 3 linearum, longitudo 8 & latitudo $1\frac{1}{2}$ pollicum, eique aptentur annuli ferrei elastici, ope cochlearum P & Q ad arbitrium constringendi, intra quos

quos immittatur cylindrus ED seu axis quadrantis, hoc artificio in situ quolibet firmiter detinendus.

11. Regulæ EO afferruminetur cylindrus ferreus axi æqualis & intra tubum ferreum RS fulcro affixum reponendus & mediante cochlea T ad libitum firmandus.

12. Fulcri SVXY, cujus structura ex sola inspectione figuræ manifesta, non excedat pedes quatuor cum semisse.

13. Limbus quadrantis AB in 90 gradus & horum quilibet in dena prima seu 6 partes æquales quam accuratissime subdividatur.

n. 4. 14. Ex centro Quadrantis ducantur in limbo duo arcus concentrici, quorum distantia *bd* digiti intervallum non excedat & sexta cujuslibet gradus pars, qualis *ce*, dividatur in 10 partes æquales eodem artificio, quo in scala geometrica dividenda utimur (§. 277. *Geom.*), nisi quod loco rectarum parallelarum ducantur arcus extremis *ab* & *cd* paralleli, qui in uno gradu *abcd* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi possunt. Immo patet, eodem prorsus modo minores divisiones in dena vel quina secunda haberi posse, siquidem amplitudo instrumenti tales ferre queat.

15. Prope centrum Quadrantis affigatur cochleis quadrum ferreum *g* & eidem firmiter agglutinetur vitrum utrinque convexum, cujus focus semidiametri quadrantis intervallo circiter aut alio quocunque ab eo distat, quæ dicitur *dioptra objectiva*. n. 3.

16. In foco hujus lentis A affigatur quadrum ferreum aliud, in quo cera firmentur duo fila serica se mutuo ad angulos rectos secantia, ita ut unum eorum sit ad planum quadrantis perpendiculare, alterum vero eidem parallelum: quæ *dioptra ocularis* dicitur.

17. Inter quadra *g* & A aptetur tubus ex lamina ferrea factus, duabus partibus constans, qualem in Dioptrica (§. 337) descripsimus.

18. Dioptræ oculari A jungatur lens ocularis utrinque convexa, objectivæ *g* proportionata (§. 365. *Dioptr.*), tubo mobili inclusa, ut pro diversa oculi observatoris constitutione eidem admoveri possit, sicque objectum una

cum filis fericis diftincte videatur (374. *Dioptr.*).

19. Quodfi interdiu in Solem collimare libuerit, inter lentem ocularem & oculum collocetur vitrum coloratum vel fuligine infectum (§. 467. *Dioptr.*): fi vero noctu in ftellas oculum dirigere volueris, ut una cum iis videantur fila ferica, orificium tubi objectivum tegatur tela ferica ex filis tenuifsimis contexta & hæc candela eminus pofita illuminetur.

n. 1. 20. Quoniam perpendiculum CK *lineam fiduciæ*, juxta quam nempe fit collimatio, feu quæ ex oculo per decusfationem filorum in objectum ducitur, fub eodem angulo fecare debet, quo quadrantem fecat, necesfe eft radio quadrantis AC ex centro C per ultimum divifionis punctum A ducto fit parallela (§. 255. *Geom.*). hoc eft, ut primum divifionis punctum B a linea fiduciæ diftet intervallo 90°. Ut igitur hoc punctum obtineas, ducatur in quadrante recta AC per centrum axi tubi ad fenfum æftimato parallela & ex eodem centro erigatur normalis *m c*. Mox elevetur quadrans, donec perpendiculum CK fecet eundem in *m* & notetur punctum in objecto aliquo procul remoto, quod decusfationi filorum refpondet. Hinc tubo immoto quadrans invertatur, ita ut radius AC fit in eadem, qua ante, altitudine conftitutus & idem ejusdem objecti punctum filorum decusfationi refpondeat. Quodfi perpendiculum ita applicatum, ut quadrantem in *m* fecet, transeat per centrum C; erit *m* primum divifionis punctum. Si vero perpendiculum in alio puncto veluti *n* quadrantem fecare debet (quod tentando definitur), ut per centrum C transeat; arcu *n m* bifariam divifo, erit B punctum divifionis primum (§. 910. *Mechan.*). Quadrante igitur in fitum priorem reftituto, perpendiculum CK eum in B fecabit.

SCHOLION I.

107. *Dari lineam fiduciæ conftantem in dioptris telefcopicis, etiamfi decusfatio filorum non fit in axe tubi, facile demonftratur. Sit* AB *axis lentis objectivæ* FG *&* *decusfatio filorum extra axem in* C. *Quoniam in omni lente convexa eft punctum aliquod* E, *per quod tranfiens radius poft alteram refractionem incidenti fit parallelus* (§. 243. Dioptr.); *fit radius ifte* CE. *Cum in* C *fit focus radiorum parallelorum* Tab. I. Fig. 6.

lorum per hypoth. *erunt omnes radii ab eodem puncto egressi ad sensum ipsi* CE *paralleli. Quare cum crassities lentis respectu distantiæ objecti parvitatis contemnendæ existat, adeoque unus incidentium* DE *ad sensum in directum situs ipsi* CE; *punctum aliquod objecti habebit constanter imaginem in decussatione filorum, quamdiu ipsum & dioptræ fuerint immota. Erit igitur* DC *linea fiduciæ.*

SCHOLION 2.

108. *Dioptras telescopicas observatores recentiores adhibent, tum quod myopes ac presbytæ non minus distincte remota contemplari possunt, quam qui oculis valent, tum quod per fila serica locus exactissime stellis assignatur, ita ut observator celeberrimus* Philippus de la Hire (b) *se nescire profiteatur, an unquam in tota Astronomia practica aut industria, aut utilitatis majoris aliquid inventum fuerit.* Tycho de Brahe *usus est dioptris, quarum oculo proxima duas vel quatuor habet fissuras ope cochleæ striatæ nunc coarctandas, nunc laxandas, prout usus tulerit; altera in centro quadrantis erecta est lamella quadrata, in centro autem sextantis vel octantis constituta cylindrus ejus quidem latitudinis, quanta est rimularum distantia. Et has quoque adhibuit* Hevelius (c). *Ad capiendas altitudines Solis lamellam in medio perforavit & in dioptra oculari circellum designavit, cujus peripheria lumen per foraminulum transmissum continetur, si axis coni luminosi fuerit in linea fiduciæ. Stellas vero accedere ad planum verticalis, in quo quadrans collocatur, manifestum est, quamprimum a dioptra objectiva teguntur.*

PROBLEMA 2.

109. *Observare altitudinem sideris apparentem.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quadrans ACB ita constituatur, ut filum perpendiculi CE a pondere D extensum tangat limbum illius.
2. Hinc circa axem suum vertatur, donec oculo per tubum AC aut dioptras collineanti stella S occurrat, ita ut S appareat in intersectione filorum, aut a dioptra centrali (si telescopio non utaris) tegatur.

Dico, arcum EB esse mensuram anguli, sub quo altitudo apparens stellæ S videtur.

DEMONSTRATIO.

Quia perpendiculum CD a pondere D extensum quadrantem tangit, *per hypoth.* quadrans cum ipso in eodem est plano. Quare cum perpendiculum continuatum per centrum terræ transeat (§. 212.

 Me-

(b) loc. cit. p. 59.
(c) Vid. Mach. cœlest. Tom. I. c. 14. f. 219. & seqq.

Mechan.); planum etiam, in quo quadrans existit, per centrum terræ transit, adeoque circulus sphæræ maximus (§.15. *Sphær.* & §.16. *Astron.*). Sed idem transit per Zenith Z centri quadrantis C (§.58): est ergo circulus verticalis (§.70), consequenter arcus hujus circuli inter stellam S & horizontem quadrantis HR interceptus est altitudo apparens stellæ super eodem horizonte (§.94), quæ adeo sub angulo SCR videtur. Est vero ACE + ECB = 90° &, quia planum, in quo quadrans hæret, horizontem sensibilem ejus HR ad angulos rectos secat (§.93), ZCS + SCR = 90° (§. 143, *Geom.*). Quoniam itaque ZCS=ACE (§.156. *Geom.*); erit ECB=SCR (§. 91. *Arithm.*), consequenter cum arcus EB sit mensura anguli ECB (§.57. *Geom.*), idem quoque arcus est mensura anguli SCR (§. 142. *Geom.*), sub quo apparens altitudo stellæ S videtur, *per demonstr. Q. e. d.*

OBSERVATIO 7.

110. *Si fixæ cujuscunque altitudinem observes in circulo verticali quocunque & in eodem quadrans per plures dies fuerit immotus: stellæ ad eum redeuntis eadem constanter erit altitudo. Immo stellarum non occidentium altitudo utraque in eodem circulo verticali per dies plures non variatur. Quodsi ope horologii oscillatorii* (§. 994. Mechan.) *notaveris tempus integræ revolutionis; idem quoque in pluribus observationibus deprehenditur.*

SCHOLION.

111. *Equidem fieri solet, ut in minutiis quibusdam seu scrupulis secundis differentia subinde aliqua occurrat; sed si plures observationes instituere libuerit, facile apparebit, differentiam illam exiguam inde esse, quod omnimoda accuratione institui nequeant. Eadem nempe nocte nunc in excessu, nunc in defectu peccabis.*

COROLLARIUM 1.

112. Horizon adeo sensibilis, consequenter etiam rationalis (§.92), sphæram mundanam per plures dies eodem modo secat.

COROLLARIUM 2.

113. Et quia arcus circuli verticalis ST est altitudo stellæ S (§.94); circulus declinationis idem PK, per plures dies eundem circulum verticalem ZN in eodem puncto S secat. Tab. I. Fig. 3.

THEOREMA 12.

114. *Polus P in eadem rotatione sphæræ mundanæ non mutatur.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Ponamus eundem mutari: aut igitur

igitur ex P ascendet in p versus Zenith Z, aut inde in ϖ versus horizontem HR descendet. Ascendat, si fieri potest in p. Quoniam altitudo maxima SR stellæ nunquam occidentis S per plures dies eadem observatur (§. 110), stella S ad polum p continuo accedit. Sed quia altitudo minima fR ejusdem stellæ eadem itidem deprehenditur (§. *cit.*); a polo p recedat necesse est. Quare cum fieri nequeat, ut eadem stella S ad polum continuo accedat & una ab eodem recedat; polus ex P in p intra plures dies non ascendit adeoque multo minus in eadem rotatione ascendit.

Descendat polus ex P in ϖ', si fieri potest. Quoniam altitudo maxima SR stellæ nunquam occidentis S eadem observatur (§. 110); stella S a polo ϖ recedit. Sed quia minima fR similiter non mutatur, ad polum ϖ accedat necesse est. Quare cum fieri nequeat, ut eadem stella f a polo eodem tempore recedat & ad eundem accedat; polus ex P in ϖ intra plures dies non descendit, adeoque multo minus in eadem rotatione descendit.

Quoniam itaque in eadem rotatione polus nec versus Zenith ascendit, nec versus horizontem descendit, *per demonstrata;* locum suum prorsus non mutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

115. Cum idem circulus declinationis PK verticalem eundem ZN in eodem puncto S secet (§. 113), declinatio stellæ SG non mutatur in una sphæræ mundanæ revolutione. Tab. I. Fig. 3.

SCHOLION.

116. *Non licet excipere, antequam planum meridiani determinetur, observari non posse, utrum stellæ semper apparentis altitudo maxima & minima perinde ac reliquæ non mutentur, nec ne. Sufficit enim illud utcunque cognitum esse, quadrante firmato in eo situ, quando stellæ altitudo maxima observatur. Præterea si stella* S *a polo* p *magis distaret, quam polus* p *ab horizonte, cum antea esset* SP < PR; *quæ semper antea apparuerat, nunc occideret: quod cum de nulla stella intra paucos dies observetur, quæ de altitudinibus immutatis extra meridianum observantur, ad meridianas quoque extendi debere manifestum est.* Tab. I. Fig. 3.

OBSERVATIO 8.

117. *Si Solis altitudo in circulo verticali quocunque eo anni tempore observetur, quo vertici proximus in meridie apparet, hoc est, præsenti ævo circa* 21 *Junii, & quadrante immoto die subsequente eadem observatio repetatur, diffe-*

rentia altitudinum nonnisi in minutis secundis consistet.

COROLLARIUM.

118. Cum polus P interea temporis locum non mutet; declinatio Solis SG intra 24 horas illo tempore parum mutatur, adeoque multo magis intervallo temporis minore sensibiliter mutatur.

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 9. 119. *Si duo in sphæra mundana puncta* F *&* f *in parte cœli orientali & occidentali æquales altitudines* FE *&* fe *atque declinationes* Fg *&* fg *habuerint: arcus æquatoris* AG *&* Ag *inter meridianum atque circulos declinationum* PG *&* Pg, *itemque arcus horizontis* HE *&* He *inter meridianum atque circulos verticales* ZE *&* Ze *intercepti æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia in P polus mundi & AQ æquator *per hypoth.* erit P polus æquatoris (§. 48) & PG atque Pg erunt quadrantes (§. 49). Quare cum GF = *gf per hypoth.* erit PF = P*f* (§. 91. *Arithm.*). Similiter quia in Z Zenith & HR horizon; erunt ZE & Z*e* quadrantes (§. 62). Quare cum FE = *fe per hypoth.* erit ZF = Z*f* (§. 91. *Arithm.*) Est vero latus PZ utrique triangulo PFZ & P*f*Z commune: ergo tam anguli FPZ, & *f*PZ, quam FZP & *f*ZP (§. 58. *Sphær.*), adeoque etiam his deinceps positi EZH & *e*zH (§. 43. *Sphæric.*), consequenter etiam tam illorum mensuræ AG & A*g*, quam horum mensuræ HE & H*e* (§. 31. *Sphæric.*) æquales sunt. *Q.e.d.*

PROBLEMA 3.

120. *Invenire lineam meridianam.*

RESOLUTIO.

1. Plaga meridiei præter propter cognita, in parte orientali observetur altitudo stellæ alicujus FE, dum meridiano HZRN fuerit vicina. Tab. I. Fig. 9.
2. Quadrante circa axem immoto, ut perpendiculum constanter eundem in eodem gradu secet, sed in partem occidentalem verso, expectetur, donec eandem habuerit altitudinem *fe*.
3. Angulus EC*e* ex intersectione planorum, in quibus constituitur quadrans in duabus observationibus, dividatur bifariam per rectam HR.

Dico, HR esse lineam meridianam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam declinatio stellæ illo temporis intervallo, quod inter observationes intercedit, non mutatur

tatur (§. 115); erit FG = *fg*. Quare cum etiam FE = *fe*, *per observ.* arcus horizontis inter meridianum ZHNR & utrumque verticalem ZEN & Z*en* intercepti EH & H*e* æquales sunt (§. 119). Sed circuli verticales se mutuo intersecant in recta ZC ex Zenith Z ad planum horizontis perpendiculari (§. 93) & in eadem est centrum horizontis, consequenter arcus E*e* (§. 10), qui est mensura anguli EC*e* (§. 57. *Geom.*). Ergo si angulus EC*e* bifariam dividatur per rectam HR; erit ea linea meridiana (§. 81). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. I. Fig. 16. 1. In plano horizontali, quod haud difficulter determinatur (§. 219. *Mechan.*) ex eodem centro C describantur aliquot arcus circuli BA, *ba* &c.

2. In eodem centro C erigatur stylus ad planum ACB perpendicularis, cujus longitudo dimidii, immo integri pedis.

3. Circa 21. Junii ante meridiem ab hora circiter 9 usque ad 11 & a meridie ab hora circiter prima usque ad tertiam notentur puncta B, *b* &c. A, *a* &c. in quibus terminatur umbra styli.

4. Arcus AB, *ab* &c. bisecentur in D, *d* &c.

Quodsi eadem recta DE bisecet omnes arcus AB, *ab* &c. erit ea linea meridiana quæsita.

DEMONSTRATIO.

Quia stylus in centro arcuum AB, *ab* &c. erectus, *per hypoth.* umbræ in eadem peripheria terminatæ AC & BC, *a*C & *b*C &c. æquales sunt (§. 40. *Geom.*). Quamobrem cum etiam æquales sint cotangentes altitudinum Solis (§. 149. *Optic.*), consequenter distantiæ Solis a vertice, altitudinum complementa (§. 94), Sol in circulis verticalibus, qui horizontale planum in AC & BC, *a* C & *b* C &c. secant, eandem habet altitudinem. Quare cum declinatio Solis exiguo illo temporis spatio, quod inter duas observationes intercedit, non mutetur (§. 115); si arcus AB, *ab* &c. bisecentur ut nempe sit AD = BD, *ad* = *bd* &c. erit DE intersectio meridiani & horizontis (§. 119), hoc est, linea meridiana (§. 81). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

121. *Circuli plures ex centro* C *describuntur, ut plurium observationum consensus accurationem confirmet.*

SCHOLION 2.

122. *Quia extremum umbræ difficulter admodum observatur; ideo consultius est, ut stylus in planum desinat exiguo foramine pertusum & punctum luci-*

lucidum in arcus AB & ab *incidens loco extremitatis umbræ notetur. Alias quoque suadetur, ut circuli non atramento, sed colore flavo aut solo circini ductu designentur, ut finis umbræ in oculum distinctius incurrat.*

SCHOLION 3.

123. *Nonnulli peculiaria excogitarunt instrumenta ad lineam meridianam observandam, aut aquales potius altitudines Solis in parte cæli tam orientali, quam occidentali deprehendendas. Enimvero cum prior methodus satisfaciat observatoribus, posterior ad praxes communes sufficiat; iis describendis supersedemus.*

COROLLARIUM 1.

124. Quoties umbra styli lineam meridianam tegit, centrum Solis in meridiano hæret (§.125. *Optic.*), adeoque meridies existit.

SCHOLION 4.

125. *Usus ergo est lineæ meridianæ in momento temporis determinando, quo centrum Solis in Meridiano existit, consequenter in motu horologiorum ad motum Solis aptando. Index nimirum ad lineam horæ duodecimæ adducitur, quando umbra styli lineam meridianam tegit.*

COROLLARIUM 2.

126. Quodsi linea meridiana in centro C, ubi erigitur stylus, vel in puncto, cui in observandis altitudinibus centrum quadrantis perpendiculariter imminet, per rectam OV dividatur ad angulos rectos; erit OV intersectio horizontis & circuli maximi per polos horizontis transeuntis (§. 28. *Sphær.*), adeoque verticalis (§. 70. 61), consequenter cum puncta intersectionum O & V a Meridiano, qui in D & E secat horizontem (§.81), quadrantis intervallo removentur (§. 173. *Geom.*) ac ideo poli Meridiani sunt (§.25. *Sphær.*), recta OV est intersectio horizontis & verticalis primarii (§.72). Hinc O cardinem orientis, & V cardinem occidentis monstrat (§. 80).

COROLLARIUM 3.

127. Quando itaque umbra styli lineam CO vel CV tegit; Sol in verticali primario existit (§. 125. *Optic.*).

COROLLARIUM 4.

128. Quodsi in plano quocunque alio horizontali perpendiculariter, in verticali autem seu perpendiculari ad horizontem utcunque stylum infigas &, dato a socio signo, quando umbra styli lineam meridianam in alio plano inventam tegit, in apice umbræ a stylo altero projectæ punctum notetur; in rectam per punctum istud & pedem styli ductam, seu punctum illud, in quod cadit recta ex vertice styli ad planum perpendicularis, in momento meridiei umbra Solis cadet (§. 125. *Optic.*), consequenter ope lineæ meridianæ unius in aliquo plano repertæ, in alio etiam plano quocunque lineam meridianam designare licet.

COROLLARIUM 5.

129. Si planum Quadrantis, hoc est,

est planum, in quo radius ejus unus lineam fiduciæ ad angulos rectos secat, ita constituatur, ut planum horizontale in linea meridiana ad angulos rectos intersecet; altitudines siderum meridianas observare licet.

SCHOLION 5.

130. *Altitudinum meridianarum observatio præcipuum totius Astronomiæ fundamentum est: unde summa cura adhibenda, ut planum quadrantis exacte in plano meridiani existat.* Tycho de Brahe *in hunc usum quadrantem ingentem muro in ipso plano meridiei, hoc est super linea meridiana perpendiculariter excitato, firmiter aptavit* (d). *Quadrans supra descriptus, præcipiente observatore celeberrimo* Philippo de la Hire (e) *ad observandas altitudines meridianas ita collocandus, ut regula* VY *lineæ meridianæ congruat, seu ejus longitudines eidem sint parallelæ, & cochlea* Y *planum Quadrantis inclinandum, donec observatore ad* Y *sedente plano meridiei accommodetur, duabus reliquis* S & X *instrumentum paululum elevandum aut deprimendum, donec filum penduli altitudinem optatam indicet. Addit, accidere interdum, quod in convertendis cochleis in* S *vel* X *positis, instrumentum a vera positione deflectatur. Suadet ergo, ut si paucula desint minuta, pondus mobile e quadrantis compactione appendatur & ita mutato centro gravitatis inclinatio quadrantis mutetur. Immo cum difficillimum sit planum Quadrantis plano meridiei aptare, consultum eidem videtur,* (f) *præsertim in peregrinationibus, ut quadrante portatili per singula minuta temporis ante transitum per meridianum observetur altitudo sideris & observationes continuentur, donec decrescere incipiant; earum enim maxima erit meridiana.*

Tab. II. Fig. 5. n. 3.

COROLLARIUM 6.

131. Quodsi in limbo quadrantis quidam gradus fuerint divisi ultra nonagesimum ipsi Zenith respondentem & ejus facie divisa in orientem conversa observetur altitudo meridiana stellæ a Zenith non procul distantis (§. 129), mox nocte sequente eadem observatio repetatur, sed limbi facie divisa in occidentem conversa, punctum medium arcus inter duas observationes intercepti, erit primum divisionis punctum. Atque ita dioptrarum positio probatur. Quare si contingat, punctum illud incidere in gradum nonagesimum, dioptrarum positio exacta erit; sin minus, aut restituendæ sunt in situm debitum (§. 107), aut semiarcu isto utendum est tanquam excessu vel defectu in corrigendis altitudinibus, quas instrumento capere libuit.

SCHOLION 6.

132. *Cum* A. 1671. Picardus, *celebris Astronomus Gallus, in observato-*

(d) Vid. Huttonæ cœlestis Prolegomena f. 113.
(e) in Tab. Astronom. p. 58.
(f) loc. cit. p. 95.

rio Tychonis *Uraniburgicæ lineam meridianam duceret, eam non sine admiratione reperit a* Tychonica 18 *minutis aberrantem: unde nonnulli & cum his* Wallisius (g) *suspicati sunt, polos mundi, consequenter meridianum, qui per eos ducitur* (§. 72) *esse mutabiles. Sed cum* de Chazelles (h) *in Ægypto observaverit, quatuor pyramidis maximæ latera quatuor mundi cardines exacte respicere, nec hæc positio fortuita censeri possit, evidens est, per* 3000 *annorum nullam in Meridiano variationem contigisse: quod etiam, quamvis minori intervallo temporis, confirmatur linea meridiana a celeberrimo* Cassino 1655. *in templo* S. Petronii *Bononiæ ducta.*

DEFINITIO 41.

133. *Culminatio* stellæ est transitus ejus per meridianum. Unde sidus *culminare* dicitur, quando per meridianum transit.

PROBLEMA 4.

134. *Invenire culminationem stellæ.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. II. 1. Super linea meridiana AB perpendiculariter extendatur filum DC & ex D in E aliud DE secans meridianam oblique sub angulo quocunque. Secabit ergo *triangulum filare* DCE planum horizontale in linea meridiana ad angulos rectos, eritque adeo in plano meridiei (§. 84).

2. Oculo ita constituto, ut filum DE tegat filum DC, expectetur, donec stella bisecetur per triangulum DCE. Tum enim oculus pariter ac stella cum triangulo DCE erunt in eodem plano, consequenter stella in meridiano existit, *vi num.* 1. hoc est, culminat (§. 133).

COROLLARIUM 1.

135. Quodsi stellarum quorcunque culminationem duabus noctibus immediate se invicem subsequentibus observes & intervalla temporis ab una culminatione usque ad alteram interjecta ope horologii oscillatorii exacte dimetiaris; eadem inter se æqualia deprehendes.

COROLLARIUM 2.

136. Sphæra igitur mundana motu æquabili circa tellurem movetur (§. 24. *Mechan.*).

PROBLEMA 5.

137. *Ope Gnomonis astronomici observare altitudinem meridianam Solis.*

RESOLUTIO.

1. Super linea meridiana perpendiculariter erigatur stylus insignis altitudinis.

2. Notetur punctum, ubi definit um-

(g) in Transact. Anglican. n. 255. p. 285. 286.
(h) Histoire de l'Acad. Royal. des Sciences A. 1710. p. 194.

umbra gnomonis in lineam meridianam incidens.

3. Investigetur distantia ejus a gnomone, hoc est, longitudo umbræ.

4. Data enim altitudine gnomonis & longitudine umbræ invenitur altitudo Solis apparens (§. 147. *Optic.*)

Aliter.

1. In lamina orichalcea fiat foramen circulare, per quod transmissi radii Solis imaginem in pavimento sensibilem efficere valent.

2. Firmetur eadem in loco sublimi & ad observandum commodo, ita ut horizonti sit parallela.

3. Demisso plumbo, quod filo alligatur, exploretur distantia foraminis a pavimento, quæ erit altitudo seu *Pes Gnomonis* (§. 227. *Geom.*).

4. Pavimentum juxta libellam complanetur, ut sit exacte horizontale, ac dealbetur, ut imago Solis distincte in ea expressa cernatur.

5. Ducatur in eo linea meridiana (§. 120. 128) transiens per pedem gnomonis.

Tab. 6. I. Fig. 12. 6. Notentur puncta extrema diametri solaris in linea meridiana K & I & utrinque auferatur recta semidiametro foraminis æqualis, nempe KH ex una parte, LI ex altera: erit HL diametri solaris imago, qua bifariam divisa in B, habetur punctum, ad quod radius e centro solis pertingit.

7. Datis ergo recta AB & altitudine Gnomonis AG invenitur denuo angulus ABG (§. 40. *Trig. plan.*) seu altitudo centri solis apparens (§. 145. *Optic.*).

DEMONSTRATIO.

Non aliud demonstrandum, quam cur a recta KI subtrahi debeant KH & LI semidiametro foraminis EG æquales, ut habeatur diametri solaris imago HL: quod etsi ex iis pateat, quæ de lumine Solis per foramen in cameram obscuram immisso demonstrata sunt (§. 304. *Optic.*), idem tamen etiam hoc modo demonstrari potest.

Sint ergo CH & DL radii ab extremitatibus diametri solaris D & C per centrum foraminis G propagati: subtendet HL angulum HGL, qui cum sit æqualis suo verticali CGD (§. 156. *Geom.*), etiam æqualis est diametro apparenti Solis ex centro laminæ G visæ (§. 208. *Optic.*). Sit diameter foraminis EF: radii adeo extimi DF & EC

pertingent ad I & K. Jam cum radii DL & DI ex eodem puncto Solis D procedant; erunt ad sensum paralleli (§. 94. *Optic.*). Est vero etiam GF ipsi LI parallela, *per construct.* ergo LI = GF (§. 257. *Geom.*). Et eodem prorsus modo patet esse KH = EG. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

138. *Hæc demonstratio convenit quoque theoremati 66 Opticæ, ad quod provocavimus.*

COROLLARIUM.

139. Quoniam ex datis AH & AG angulus AGH & ex datis AL & AG angulus AGL invenitur (§. 40. *Trigon. plan.*), si angulus AGH ex AGL subtrahatur, relinquetur semidiameter Solis apparens HGL (§. 208. *Optic.*).

SCHOLION 2.

140. Cl. de la Hire (i) *observavit, foraminis lamina calefacta non satis exacte exprimi Solis in pavimento imaginem. Suadet itaque, ut lamina tegatur, nonnisi observationis momento retegenda.*

SCHOLION 3.

141. *Gnomonis usum Quadrantibus minoribus præferendum esse haud inviti largiuntur, qui observationibus operam dedere, præsertim cum accurata ejus excitatio multo minus industriæ requirat, quam instrumentorum exacta divisio, usque Gnomonis facilior sit, quam quadrantum. Unde & veteres, & recentiores gnomonibus usi sunt ad observationes selectissimas instituendas* (k). Ulugh Beigh, *Rex Parthiæ ac Indiæ, magni* Tamerlanis *nepos, circa annum Christi* 1437 *usus est gnomone, cujus altitudo* 180 *pedes Romanos superavit. Gnomon* Ignatii Dantis *in templo* S. Petronii *Bononiæ* A. 1576. *erectus fuit* 67 *circiter pedum Bononiensium; gnomon celeberrimi* Cassini *in ædibus* Malvaricis Bononiæ An. 1655. *excitatus pedum* 20, *correctus vero in ædibus* S. Petronii *pedum Romanorum antiquorum* $95\frac{1}{24}$; Riccioli *gnomon in templo* S. Luciæ *Bononiensi pedum* 66, *unciarum* $10\frac{11}{100}$; R. P. Heinrichii *gnomon Uratislaviæ* A. 1705. *erectus pedum* 35 (l).

PROBLEMA 6.

142. ***Altitudinem stellæ meridianam ope Gnomonis observare.***

RESOLUTIO.

1. In plano horizontali ope libellæ accuratius constructæ aut canalis aqua repleti determinato inveniatur linea meridiana (§. 110) aut cum *Cassino* super fulcris suis collo- Tab. II. Fig. 13.

(i) In Tab Astron. p. 102.

(k) Videatur Ricciolus Astronomiæ Reformatæ Lib. 1. f. 5. & seqq. & Geogr. Reform. Lib. 7. c. 15 f 286

(l) Vid. Altitudo Poli Vratislaviæ part. 1. p. 5.

collocetur canalis ligneus, pice illitus & aqua plenus AB, ita ut linea per medium ejus ducta sit horizonti parallela, nec ullibi margo ultra aquæ superficiem emineat.

2. In fastigio templi aut domus, vel in vertice styli perpendiculariter erecti C ita affigatur regula orichalcea DE, octo circiter digitos aut pedem unum longa, ut ejus latus superius sit horizonti parallelum.

3. Ex medio C demittatur filum cum appenso pondere F & notetur punctum G, ubi canalem aut lineam meridianam intersecat, simulque exploretur distantia puncti C a linea meridiana vel canali AB, hoc est altitudo Gnomonis CG (§.284.*Geom.*).

4. In M aptetur furcula ultro citroque mobilis cum filo bombycino tenui IL, ad horizontem parallelo.

5. Observetur culminatio stellæ S (§.134) & mox furcula promoveatur aut retrahatur, donec oculo in O constituto centrum stellæ a regula DE bisectæ in recta LC appareat.

6. Distantia fili a linea meridiana aut aquæ in canali stagnantis superficie KM accurate dimensa subtrahatur ab altitudine Gnomonis GC, ut habeatur CN.

7. Porro investigetur longitudo KN & tandem.

8. Ex datis in triangulo CKN ad N rectangulo cruribus KN & NC inveniatur angulus CKN (§.40. *Trigon. plan.*), qui erit altitudo stellæ apparens super horizonte KN (§.145. *Optic.*).

OBSERVATIO. 9.

143. *Si ad umbram Sole oriente vel occidente a stylo* C *ad lineam meridianam* DE *perpendiculari projectam quotidie attendas; bis in anno eandem in intersectionem verticalis primarii & horizontis* OV *incidere advertes. Tum autem tempus ab ortu usque ad occasum Solis elapsum, horologio oscillatorio indice, erit duodecim horarum seu semidiurnum. Tanti quoque temporis deprehenditur mora stellæ supra horizontem, quæ ope trianguli filaris super linea* OV *extensi eo modo, quo stellæ culminatio observatur* (§.134), *in circulo verticali primario oriri deprehenditur. Tales stellæ sunt superior in cingulo Orionis, stella exigua in collo Antinoi, nodus piscium.* Tab. I. Fig. 10.

COROLLARIUM 1.

144. Quoniam semicirculus diurnus

Tab. nus Solis ac stellæ tempore observa-
I. tionis supra horizontem sensibilem
Fig. existit (§. 56); horizon sensibilis *br*
15. per centrum diurni transit. Sed centrum diurni est in axe PQ (§. 44. 56), qui per centrum terræ C transit (§. 44); erit ergo extra centrum terræ in O, consequenter Sol & stella non oritur in cardine orientis apparente *c*, sed ultra eum versus septentrionem in O: quod cum observationi repugnet, quia verticalis primarius horizontem in cardine orientis & occidentis intersecat (§. 126) necesse est distantiam *c*O esse imperceptibilem, consequenter semidiametrum telluris C*c* respectu motus primi Solis atque fixarum evanescere.

COROLLARIUM 2.

145. In motu adeo primo Solis atque fixarum horizon sensibilis *br* atque verus HR coincidunt, hoc est, arcus meridiani H*b* inter utrumque interceptus insensibilis, consequenter altitudines Solis atque fixarum apparentes cum veris eædem sunt.

COROLLARIUM 3.

146. Tellus itaque in Astronomia sphærica salvis phænomenis pro puncto habetur.

PROBLEMA 7.

Tab. 147. *Observare altitudinem Poli.*
I.
Fig. *RESOLUTIO.*
14. 1. Tempore hiberno, quando longitudo noctis horas 12 excedit, adeoque stellæ semper apparentes bis in Meridiano observari possunt, observetur altitudo meridiana stellæ polaris, hoc est, ultimæ in cauda ursæ minoris, cum maxima SR, tum minima MR (§. 109. 142).

2. Subtrahatur MR ex SR & differentia MS bifariam dividatur, ita enim prodibit stellæ a Polo distantia PM (§. 114).

3. Addatur PM altitudini minimæ MR: erit summa PR altitudo poli quæsita.

E. gr. *Coupletus* junior Ulyssippone A. 1697. circa finem Septembris observavit (m)

	SR =	41°	5'	40"
	MR =	36	28	0
Ergo	SM =	4	37	40
	PM =	2	18	50
	MR =	36	28	0
	PR =	38	46	50

SCHOLION 1.

148. *Ut altitudo poli, quæ cum linea meridiana basis est omnium observationum astronomicarum satis exacta habeatur, altitudines meridianæ* SR *&* MR *ex doctrina refractionum inferius tradenda corrigendæ: unde* Coupletus *in exemplo proposito subtrahit ulterius* 1' 25", *ut* PR *sit* 38° 45' 25".

CO-

(m) Memoir. de l'Acad. Royal. des Sciences A. 1700. p. m. 175.

COROLLARIUM 1.

149. Quodsi elevatio Poli PR ex quadrante seu 90 gradibus auferatur, relinquetur altitudo æquatoris AH (§. 97).

E. gr. in nostro exemplo

PR + AH =	89°	59′	60″
PR =	38	45	25
AH =	51	14	35

COROLLARIUM 2.

150. Si altitudo meridiana stellæ vel Solis HD observata major fuerit altitudine æquatoris AH; hæc ex illa subducta, relinquit declinationem ejus borealem AD; sin vero altitudo stellæ HT minor altitudine æquatoris HA, illa ex hac subducta relinquit declinationem stellæ vel Solis australem TA.

Tab. I. Fig. 14.

E. gr. *Tycho* Uraniburgi observavit caudæ Leonis altitudinem meridianam

	HD	50°	59′	0″
Alt. Æquat.	HA	34	5	20
Ergo Declinatio	AD	16	53	40

COROLLARIUM 3.

151. Si stella fuerit in quadrante ZR; tum altitudo minima MR a poli altitudine PR subducta relinquit distantiam a polo PM: quæ si porro subducatur a quadrante PQ (§. 49), relinquetur declinatio MQ.

E. gr. in observatione *Coupleti* PM erat 2° 18′ 50″, his ergo ex 90° subductis, relinquitur MQ 87° 41′ 10″. Vel cum QR = AH (§. 98), altitudo minima MR additur elevationi æquatoris, ut prodeat declinatio MQ, veluti in dato exemplo ubi neglecta refractione AH 51° 13′ 10″ & MR 36° 28′ 0″, MQ 87° 41′ 10″.

SCHOLION 2.

152. *Et hac ratione per observationes construuntur tabulæ declinationum fixarum, quales exhibent* Ricciolus (n) *atque* Dechales (o).

COROLLARIUM 4.

153. Collatio observationum recentiorum cum antiquioribus variabilitatem declinationis fixarum arguit in diversis stellis diversam. In aliis enim crescit, in aliis decrescit, quantitate minime eadem. Maximum incrementum & decrementum intra decennium minuta tria cum dimidio non excedit.

COROLLARIUM 5.

154. Data declinatione stellæ ab aliis observata (§. 150) & ejus altitudine meridiana a nobis observata (§. 109. 142), inveniri potest altitudo æquatoris in nostro observatorio (§. 150) & inde porro altitudo poli pro eodem (§. 97).

COROLLARIUM 6.

155. Si altitudines Solis meridianæ per

(n) Astron. Reform. lib. 4. c. 9. f. 288.
(o) Tom. 3. Mund. Math. in Tract. de Navigat. lib. 7. f. m. 325. & seqq.

per totum annum observatæ conferantur cum altitudine æquatoris; Solem quotannis bis in æquatore hærere, reliquo tempore vel ultra eum ad certum terminum ascendere, deinde rursus ad eundem descendere, vel infra eum descendere ad terminum certum, deinde rursus ab eodem ad illum ascendere deprehendimus.

COROLLARIUM 7.

156. Circulus itaque, sub quo centrum Solis motu proprio incedit, æquatorem duobus in punctis intersecat.

DEFINITIO 43.

157. Circulus ille in sphæræ mundanæ superficie immobili descriptus, sub quo centrum Solis motu proprio incedit, dicitur *Ecliptica*.

DEFINITIO 44.

158. *Puncta æquinoctialia* sunt puncta intersectionum æquatoris & eclipticæ. *Vernale* dicitur, unde Sol versus polum borealem ascendit: *Autumnale*, unde idem versus polum australem descendit. Tempus, quando Sol in punctum æquinoctiale ingreditur, dicitur *æquinoctium*, quod adeo vel *vernale*, vel *autumnale*.

DEFINITIO 45.

159. *Puncta Solstitialia* sunt puncta eclipticæ, in quibus terminatur ascensus Solis supra æquatorem & descensus infra eundem. Punctum prius dicitur *æstivum*; posterius *brumale* seu *hibernum*. Tempus, quando Sol in puncta solstitialia ingreditur, vocatur *Solstitium*, quod adeo vel *æstivum*, vel *brumale*.

DEFINITIO 46.

160. *Signum cœleste* est duodecima eclipticæ pars in 30 gradus divisa. Primi principium est in puncto æquinoctiali vernali. Nomina signorum cœlestium ac ordo his versiculis continentur:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo;
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Signis sequentibus indigitantur.

♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓.

DEFINITIO 47.

161. *Signa vernalia* sunt aries, taurus & gemini: *æstiva* cancer, leo & virgo: *autumnalia*, libra, scorpius & arcitenens seu sagittarius: *brumalia* capricornus, amphora seu aquarius & pisces.

DEFINITIO 48.

162. *Signa borealia* vel *septentrionalia* sunt signa vernalia & æstiva: *signa australia* vel *meridionalia*

nalia sunt signa autumnalia & brumalia.

PROBLEMA 8.

163. *Observare declinationem maximam eclipticæ.*

RESOLUTIO.

1. Circa solstitium æstivum vel brumale per aliquot dies observetur maxima cum cura altitudo Solis meridiana (§. 129).
2. Ab altitudine maxima subtrahatur elevatio æquatoris.

Residuum est declinatio maxima in puncto solstitiali (§. 149).

E. g. Ricciolus A. 1646. Bononiæ observavit (p) altitudinem Solis meridianam

d. 20 Jun.	68°	59′	55″
21	69	0	10
22	68	59	55

Erat ergo altitudinum meridianarum Solis maxima

	69°	0	10
Elevat. Æquat.	45	29	50
Declinat. Max.	23	30	20

COROLLARIUM.

164. Quodsi alio tempore altitudines Solis meridianæ observentur; eodem modo declinationes in aliis Eclipticæ punctis eliciuntur.

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

OBSERVATIO 10.

165. *Declinationem maximam Eclipticæ observarunt.*

Ante Christ.					
A. 324	Pytheas	23°	52′	41″.
230	Eratosthenes	23	51	20
140	Hipparchus	23	51	20
Post Christ.					
A. 140	Ptolemæus	23	51	20
880	Albategnius	23	35	
1460	Regiomontanus	23	30	
1476	Waltherus	23	30	
1525	Copernicus	23	28	30
1570	Rothmannus & Byrgius	23	30	20
1587	Tycho	23	30	22
1627	Keplerus	23	30	30
1636	Gassendus	23	31	
1646	Ricciolus	23	30	20
	Hevelius	23	30	20
	Moutonus	23	30	
1702	Philippus de la Hire	23	29	
1715	de Louville	23	28	24

Eadem declinatio reperitur in utroque puncto solstitiali. Ostendit autem Ricciolus (q) Eratosthenem *ex observationibus suis falso conclusisse declinationem maximam* 23° 51′ 20″, *cum vi earundem esse debeat* 23° 31′ 5″. *Similiter*

Ppp Py-

(p) Astron. Reform. lib. 1. c. 5. f. 18.
(q) in Astron. Reform. c. 6. §. 4. f. 19.

Pytheas *Massiliæ umbram solstitialem ad gnomonem observavit ut* $213\frac{1}{5}$ *ad* 600 *seu ut* $31951\frac{1}{2}$ *ad* 90000; Gassendus *cum* Peirescio *ibidem* A. 1636 *ut* 31950 *ad* 90000 (r).

COROLLARIUM I.

166. Quia observationes intra duo secula postrema peractæ in scrupulis secundis tantum differunt, nec *Eratosthenis* errore correcto, quem *Hipparchus* atque *Ptolemæus* retinuerunt, major differentia reperitur inter antiquissimas & recentiores, *Gassendus* insuper umbram solstitialem ejusdem longitudinis deprehendit, quantam annis fere bis mille ante observaverat *Pytheas*; declinationem eclypticæ immutabilem esse communiter concluditur.

SCHOLION.

167. *Qui errores* Eratosthenis *atque* Pytheæ *in modo, quo ex observationibus suis declinationem maximam eclypticæ collegerunt, non agnoverunt* Purbachius, Reinholdus, Regiomontanus, Copernicus, Rheticus, Tycho, Longomontanus, Snellius, Lansbergius, Bullialdus *aliique, eam variabilem statuerunt. Inprimis nostro tempore* Eugenius de Louville (s) *operose adstruit, eclipticæ obliquitatem singulis seculis uno minuto primo decrescere.* Herodotus *autor est, ex Ægytiorum traditione eclipticam ad circulum æquinoctialem fuisse perpendicularem: unde patet ipsos diminutionem obliquitatis eclipticæ agnovisse. Cumque teste* Diodoro Siculo *Chaldæi jactaverint observationes tam antiquas, ut a primis suis observationibus usque ad ingressum* Alexandri M. *Babylonem* 403 *millia annorum numerarent, ex mutabilitate autem eclipticæ ab ipso asserta consequatur hæc periodus, si initium statuatur in eo tempore, quo ecliptica per polos mundi transiit; inde concludit, Chaldæos quoque mutabilitatem declinationis eclipticæ observasse & quantitatem diminutionis agnovisse. Sed de his futuris seculis certius quid statuere licebit. Sumamus interim declinationem eclipticæ constantem.*

COROLLARIUM 2.

168. Ob plerarumque observationum consensum communiter assumitur, declinationem eclypticæ maximam esse 23° 30′. Sed quia Cl. *de la Hire* eandem ex observationibus prope æquatorem habitis (ubi per inferius independenter ab his demonstranda refractio non adeo turbat observationes altitudinum meridianarum) 23° 29′ colligit, nos cum ipso in posterum eadem utemur.

OBSERVATIO II.

169. *Si in solstitio brumali observetur transitus stellæ alicujus per meridianum* (§. 134), *notetürque ope horologii oscillatorii tempus culminationis; eadem vero nocte vel aliis*

(r) in Vita Peirescii.

(s) in Dissertatione de mutabilitate Eclipticæ, quæ legitur in Actis Eruditorum A. 1719. p. 281 & seqq.

aliis subsequentibus eodem modo observetur temporis intervallum, quod inter culminationes ejusdem aliarumque stellarum fixarum intercedit, ac tandem in solstitio æstivo observetur culminatio unius ex istis stellis una cum momento, quo accidit, & ex anterioribus observationibus colligatur tempus, quo stella primæ observationis illo die sit culminatura; hoc a tempore culminationis duodecim horis differre deprehenditur.

COROLLARIUM.

170. Quoniam motus sphæræ mundanæ æquabilis (§. 136) & duodecim horæ præterlabuntur a culminatione puncti solstitialis brumalis usque ad punctum solstitiale æstivum (§. 169); puncta solstitialia sibi mutuo diametraliter opponuntur.

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. 16. 171. *Ecliptica est circulus sphæræ maximus.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEQL meridianus, AQ æquator, EL ecliptica. Quoniam puncta solstitialia sibi mutuo diametraliter opponuntur (§. 170), si E fuerit æstivum, erit L brumale. Sunt vero AEQ & ALQ semicirculi (§. 84. *Sphær.*), adeoque AE + EQ = AL + LQ (§. 177. *Arith.*). Quare cum sit AE = QL (§. 165); erit etiam EQ = AL (§. 91. *Arithm.*), consequenter EQ + QL = EA + AL (§. 88. *Arithm.*). Transit ergo EL per centrum sphæræ C (§. 135. *Geom.*) & hinc ecliptica circulus maximus sphæræ mundanæ (§. 15. *Spæric.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

172. Ecliptica æquatorem bifariam secat (§. 20. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

173. Puncta igitur æquinoctialia sibi mutuo diametraliter opponuntur (158) adeoque signa borealia sunt in hemisphærio boreali, australia in australi (§. 51. 52, 161. 162).

COROLLARIUM 3.

174. Cum & meridianus (§. 70. 72) & ecliptica (§. 171) sit circulus maximus; se mutuo bifariam secant (§. 20. *Sphær.*). Et eodem modo patet, eclipticam ab horizonte tam rationali (§. 61), quam sensibili (§. 145) bifariam secari.

COROLLARIUM 4.

175. Arcus adeo eclipticæ inter horizontem & meridianum interceptus quadrans est.

COROLLARIUM 5.

176. Quare si ponamus punctum solstitiale æstivum E esse in meridiano, cum tunc alterum L etiam sit in meridiano (§. 174), puncta æquino- Tab. I. Fig. 16.

ficie dato puncto culminans, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 55.

191. *Ascensio obliqua* est punctum æquatoris cum stella aut alio quocunque puncto in sphæræ mundanæ superficie dato per horizontem ortivum transiens, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 56.

192. *Descensio obliqua* est punctum æquatoris cum puncto in superficie sphæræ mundanæ dato per horizontem occiduum transiens, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 57.

193. *Differentia ascensionalis* est differentia inter ascensionem rectam & obliquam ejusdem puncti: *differentia descensionalis* est differentia inter ascensionem rectam & descensionem obliquam ejusdem puncti.

DEFINITIO 58.

194. *Azimuthum* est arcus horizontis inter circulum verticalem datum & meridianum interceptus.

DEFINITIO 59.

195. *Amplitudo ortiva* est distantia puncti orientis a cardine orientis: *Amplitudo* vero *occidua* est distantia puncti occidentis a cardine occidentis.

COROLLARIUM 1.

196. Est itaque amplitudo ortiva & occidua arcus horizontis inter punctum oriens & occidens atque cardinem orientis & occidentis interceptus (§. 54. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

197. Azimuthum est amplitudinis ortivæ & occiduæ complementum ad quadrantem (§. 194).

PROBLEMA 4.

198. *Datis obliquitate eclipticæ G puncti cuiuscunque eclipticæ dati S declinationem DS invenire.*

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo SDG angulus D rectus est (§. 75) & præter angulum G 23° 29′ (§. 168) ob datum punctum S etiam arcus GS datur; reperietur DS (§. 116. *Sphær.*). Tab. I. Fig. 16.

Sit e. gr. S 20° ♉, erit GS 50°, adeoque

Log. Sin. G		96004090
	Sin. GS	98842540

Sin. DS 94846630, cui in tabulis quam proxime respondent 17° 46′ 25″.

SCHO-

SCHOLION.

199. *Hoc modo construitur Tabula declinationum singulorum graduum ecliptica.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 14. 200. Si declinatio Solis borealis AD in tabulis reperta ab altitudine Solis meridiana HD observata (§. 129), auferatur; elevatio æquatoris residua fit (§. 150), quæ porro ex 90° subducta elevationem poli relinquit (§. 97). Similiter æquatoris altitudo prodit, si declinatio australis TA altitudini Solis meridianæ HT addatur.

SCHOLION.

201. *Patet ex theoricis cognitum esse debere locum Solis in ecliptica.*

COROLLARIUM 2.

202. Contra data elevatione æquatoria HA & declinatione Solis AD vel TA, invenitur altitudo ejus meridiana HD vel HT, si declinatio borealis AD illi addatur, australis vero TA dematur.

E gr. Altitudo Æquat. Halæ	38°	22′	
Declinat. ☉ in 25 ♉	19	3	6″
Altitudo ☉ meridiana	57	25	6

PROBLEMA 5.

203. ***Data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis una cum obliquitate eclipticæ invenire ejus locum in ecliptica.***

RESOLUTIO.

1. Ex datis altitudinibus æquatoris & Solis quæratur ejus declinatio (§. 150). Tab. I. Fig. 16.
2. Cum adeo in triangulo DSG ad D rectangulo (§. 75) dentur angulus obliquitatis eclipticæ G & declinatio DS; reperietur arcus GS (§. 118. *Sphæric.*): quo dato, locus Solis quæsitus S innotescit, modo constet, in quo quadrante eclipticæ Sol commoretur. Etenim in primo quadrante GS est distantia a principio arietis; in secundo complementum ejus ad semicirculum; in tertio excessus ejusdem supra semicirculum; in quarto denique complementum ad circulum integrum.

E. gr. *Ricciolus* (t) A. 1643. d. 23. Martii (quo tempore Sol erat in primo quadrante eclipticæ) observavit

Altit. ☉ merid.	46°	33′	40″
Altit. Æquat.	45	29	50
Ergo Declinatio DS	1	3	50

Et Log. Sin DS	82687487
Sin. tot.	100000000
Summa	182687487
Sin. G	96004090
Sin. GS.	8.6683397, cui in

(t) Astron. Reform. lib. 1. c. 8. f. 26.

in tabulis quam proxime respondent 2° 40′ 15″.

Fuit ergo locus Solis ♈ 2° 40′ 15″.

PROBLEMA 6.

Tab. I. Fig. 16. 204. ***Data obliquitate eclipticæ* G, *invenire puncti cujuscunque* S *ascensionem rectam* D *&* *angulum eclipticæ cum meridiano* DSG.**

RESOLUTIO.

Quoniam circulus declinationis PD æquatorem AQ secat ad angulos rectos (§. 75); triangulum DSG rectangulum. Quare cum in eo detur angulus G & ob datum punctum S arcus GS, qui vel distantia Solis ab ariete, si Sol fuerit in primo quadrante, vel complementum ad principium libræ, si fuerit in secundo; vel distantia a principio libræ, si fuerit in tertio; vel denique complementum ad principium arietis, si fuerit in tertio: reperietur angulus DSG (§. 130. *Sphæric.*) & arcus DG (§. 127. *Sphæric.*), qui in primo casu indicat ipsam ascensionem rectam; in secundo ejus complementum ad semicirculum; in tertio excessum supra semicirculum; in quarto denique complementum ad circulum integrum.

E. gr. Sit Sol in ♈ 2° 40′ 15″. Quia G 23° 29′

erit Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. G	99624527
Summa	199624527
Cotang. GS.	113311611
Tang. GD	8.6312916,

cui in tabulis quam proxime respondent 2° 27′. Tanta nimirum est ascensio recta in 2° 40′ 15″ ♈.

Porro Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. GS	99995279
Summa	199995279
Cotang. G.	103620437
Cotang. S	9.63748421,

cui in tabulis quam proxime respondent 23° 27′ 38″.

Est ergo angulus GSD 66° 32′ 22″.

SCHOLION.

205. *Hoc modo construuntur Tabulæ Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ & Tabulæ anguli eclipticæ cum meridiano ad partes orientales in hemisphærio boreali.*

PROBLEMA 7.

206. ***Data elevatione Poli* PR *una cum declinatione Solis* DS, *invenire differentiam ascensionalem* OD, *amplitudinem ortivam* SO *&* *Azimuthum* HS.** Tab. III. Fig. 18. 19.

RESOLUTIO.

Quia circulus declinationis PD æquatorem AQ ad angulos rectos secat (§. 75), triangulum OSD rectan-

ctangulum ad D. Quare cum in eo detur declinatio DS & angulus O ob elevationem poli datam (§. 97. 100); reperietur OD (§. 125. *Sphær.*) & SO (§. 118. *Sphær.*), consequenter ob OH = 90° etiam HS.

Sit e. gr. elevatio poli, quemadmodum Halæ 51° 38′ & Sol in 24° ♊: erit O 38° 22′, DS 23° 20′ 48″. Unde

Log. Cotang. O	101014704
Tang. DS	96351154
Sin. OD	97365858,

cui in tabulis quam proxime respondent 33° 2′ 27″.

Log. Sin. tot.	100000000
Sin. DS	95980165
Summa	195980165
Sin. O	97928759
Sin. OS	98051406,

cui in tabulis quam proxime respondent 39° 40′ 40″.

SCHOLION 1.

207. *Hac ratione construuntur Tabulæ differentiarum ascensionalium itemque amplitudinum ortivarum pro singulis gradibus declinationis sub singulis gradibus elevationis poli. Et per idem problema differentias descensionales & amplitudines occiduas inveniri per se patet.*

Tab. III. Fig. 18. COROLLARIUM 1.

208. Si Sol fuerit in signo boreali & differentia ascensionalis DO ex

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

ascensione recta D subtrahatur, relinquetur ascensio obliqua O (§. 193). E. gr. si Sol fuerit in 24° ♊.

Ascensio recta D	83°	27′	46″
Differentia Ascens. OD	33	2	27
Ascensio Obliqua O	50	25	19

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 19. 209. Si Sol fuerit in signo australi & differentia ascensionalis DO ascensioni rectæ D addatur, prodibit obliqua O (§. 193).

SCHOLION 2.

210. *Patet adeo, quomodo construantur Tabulæ ascensionum obliquarum pro singulis eclipticæ gradibus sub singulis gradibus elevationis poli.*

PROBLEMA 8.

211. *Determinare tempus tam primi mobilis, quam solare, quo arcus æquatoris datus meridianum transit & contra.*

RESOLUTIO.

Quoniam meridianus æquatorem continuo ad angulos rectos secat (§. 84); dum datus arcus æquatoris per meridianum transit, perinde est ac si arcum æquatoris immotum punctum intersectionis in meridiano eadem celeritate interea temporis descripsisset. Cum adeo motus æquatoris sit æquabilis (§. 136); erunt arcus per meridianum transeuntes temporibus proportionales (§. 24. *Mechan.*).

 Qua-

Quare si inferatur: ut 360 ad 24 horas primi mobilis, ita arcus datus ad numerum quartum proportionalem; erit is tempus primi mobilis quæsitum. Quodsi adeo quæratur arcus dato tempore per meridianum transiens, inferendum erit: ut 24 ad 360, ita tempus datum ad arcum quæsitum.

Quia Sol intra 24 horas primi mobilis ascensionem rectam fere mutat 59′ 8″ 20‴, hoc est, 212900‴, si hoc intervallum per 24 dividatur, quotus 8870‴ seu 2′ 28″ erit pars adjicienda arcui intra horam primi mobilis per meridianum transeunti, ut habeatur arcus intra horam solarem per eundem transiens.

Quodsi inferas: ut 360 59′ 8′ 20‴ ad 24 horas solares, ita arcus datus ad numerum quartum proportionalem; erit is tempus solare, quo arcus æquatoris datus per meridianum transit.

SCHOLION.

212. *Quia conversio temporis in gradus æquatoris & graduum æquatoris in tempus multum in Astronomia usum habet; ideo constructæ sunt tabulæ, in quibus exhibentur arcus æquatoris singulis horis tam primi mobilis, quam solaribus, & singulis scrupulis horæ unius per meridianum transeuntes, & contra. Earundem cum sit in problematis frequentibus usus eas hic contractas apponere libet. Usus facilis. Etenim gradus æquatoris dati cum suis scrupulis resolvuntur in partes, quæ in tabula extant, & ex ea excerpuntur horæ ac scrupula horaria ipsis respondentia. Hæc enim in unam summam collecta dant tempus, quo arcus æquatoris datus per Meridianum transit. Simili modo proceditur, si tempus datum in arcum æquatoris convertendum. Exempla in problematis sequentibus occurrunt.*

Conversio partium æquatoris in tempus primi mobilis & contra.

Æquat. Grad. Min. Sec. Tert.	Hor. I. II. II.	I. II. III. IV.	Horæ	Æquat. Grad.	Hor. Min. Sec. Tert. Quart.	Æquat. Gr I. II. III	I. II. III. IV.
			1	15	1	0	15
1	0	4	2	30	2	0	30
2	0	8	3	45	3	0	45
3	0	12	4	60	4	1	0
4	0	16	5	75	5	1	15
5	0	20	6	90	6	1	30
10	0	40	9	135	10	2	30
15	1	0	12	180	20	5	0
30	2	0	15	225	30	7	30
60	4	0	18	270	40	10	0
90	6	0	21	315	50	12	30
180	12	0	24	360	60	15	0
360	24	0					

Con-

Converſio partium æquatoris in tempus ſolare & contra.

Æquat.	Hor.	I.	II	III.	Hor.	Grad.	I.	II.	III.
Grad.					1	15	2	28	
Min.	I	II.	III.	V.	2	30	4	56	
Sec.	II.	III.	IV.	V.	3	45	7	24	
					5	75	12	20	
Tert.	III.	IV.	V.	VI.	10	150	24	40	
1	0	3	59	20	20	300	49	20	
2	0	7	58	40	Min.	Grad.	I.	II.	III.
3	0	11	58	1	Sec.	I.	II.	III.	IV.
4	0	15	57	22					
5	0	19	56	42	1	0	15	2	28
10	0	39	53	24	2	0	30	4	56
15	0	59	50	6	3	0	45	7	24
30	1	59	40	12	5	1	15	12	20
60	3	59	20	24	10	2	30	24	40
90	5	59	0	36	20	5	0	49	20
180	11	58	1	12	40	10	1	38	40
360	23	56	2	24	60	15	2	28	0

PROBLEMA 9.

213. ***Dato loco Solis in ecliptica una cum elevatione poli, invenire longitudinem diei atque noctis.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur declinatio Solis (§. 198) & inde porro differentia aſcenſionalis (§. 206).
2. Differentia aſcenſionalis convertatur in tempus ſolare: quod
3. tempori, quo quadrans æquatoris per meridianum tranſit, addatur, ſi Sol fuerit in ſigno boreali, vel ab eadem auferatur, ſi idem in auſtrali extiterit. Ita nimirum in utroque caſu obtinetur tempus ſemidiurnum.
4. Quodſi hoc ex 12 horis ſubducas, relinquetur tempus ſemino-cturnum.

E. gr. Sit Sol in 24° ♊ & elevatio poli 51° 38′: erit differentia aſcenſionalis 33° 2′ 27″ (§. 206).

Sed 30° reſp. 1 hor. 59′ 40″ 12‴
3 11 58 1
2′ 7 58 40⁗
10″ 39 53 24ᵛ
15 59 50 6
2 7 58 40

Ergo diff. aſcenſ. 2 hor. 11. 47. 59. 22. 10
Porro 90° 5 59. 0. 36

Unde temp. ſemidiu. 8 hor. 10 48. 35. 22. 10
hoc eſt, 8 hor. 10′ 45″
11 59 60

tempus ſemino. 3 hor. 49′ 11″

Ergo tempus diurnum 16 hor. 21′ 38″; nocturnum vero 7 hor. 38′ 22″.

DEMONSTRATIO.

Quia punctum D eſt aſcenſio recta; ab ortu Solis usque ad meridiem arcus æquatoris AD per meridianum tranſit (§. 190.). Eſt vero AO quadrans (§. 89): quodſi ergo quadrans & differentia aſcen- Tab. III. Fig. 18. 19.

 ſio-

ſionalis in tempus convertantur, inde elici poſſe tempus inter ortum Solis & meridiem intercedens, hoc eſt tempus ſemidiurnum, patet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

214. Quia tempus ortus numeratur a media nocte, tempus vero occaſus a meridie; tempus ſeminocturnum eſt ſimul tempus, quo Sol oritur; ſemidiurnum vero indicat momentum, quo occidit. In noſtro nempe exemplo ☉ oritur hor. 3. 49′ 11″; idem occidit hor. 8. 10′ 49″.

PROBLEMA 10.

Tab. III. Fig. 20. 215. *Data elevatione* PR *& declinatione Solis* DS, *invenire altitudinem ejus ad datum quodcunque momentum.*

RESOLUTIO.

I. Sit HZR Meridianus, in Z Zenith & Sol C in æquatore AQ. (Fig. 18.) In triangulo ZAC ad A rectangulo (§. 84), datur AZ elevationi poli PR æqualis (§. 97), &, ſi tempus usque ad meridiem reſiduum (vel pomeridianum in altero caſu) in arcum æquatoris convertatur (§. 212), arcus AC: reperitur adeo arcus ZC (§. 120 *Sphær.*), qui ex quadrante ZE (§. 62) ſubductus relinquit altitudinem Solis CE (§. 94).

E. gr. Sit PR 51° 38′, ☉ in 0 ♈: quæratur altitudo hora 9 matutina. Quoniam horæ 3 usque ad meridiem ſuperſunt; erit AC 45° 7′ 24″.

Quare Log. Coſin. AZ 98943464
Coſin. AC 98485459

Coſin. ZC ſeu Sin. CE 19.7428923, cui in tabulis quam proxime reſpondent 33° 35′ 16″.

II. Si Sol S fuerit in ſigno boreali; cum ſit in Z Zenith, in P polus, AQ æquator, HR Horizon, in triangulo ZPS dantur latera PS declinationis DS complementum (§. 79) & ZP elevationis poli PR complementum ad quadrantem (§. 62). Quodſi tempus in arcum æquatoris convertatur (§. 212); prodibit arcus AD, qui ob quadrantem PD (§. 79) eſt menſura anguli ZPS (§. 33. *Sphær.*). Reperitur adeo SE (§. 163. *Sphær.*). (Tab. III. Fig. 20.)

E. gr. Sit Sol in 24° ♊ ſub elevatione poli 51° 38′: quærenda eſt altitudo ad horam 9 antemeridianam. Quoniam DS 23° 20′ 48″; erit PS 66° 39′ 12″; & AD ſive angulus P eſt 45° 7′ 24″. Quoniam in triangulo DGS ad D rectangulo (§. 76) hypothenuſa GS quadrante minor, quia ZE quadrans (§. 62), & DG itidem quadrante minor, quia AQ quadrans (§. 89), erit angulus S acutus (§. 81. *Sphær.*). Cum adeo in triangulo ZSP anguli S (§. 43. *Sphær.*) & P *per hypoth.* ſint acuti, perpendiculum ZK ex angulo Z in latus PS

PS demissum intra triangulum cadit (§. 82. *Sphær.*). Quamobrem

Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. P.	98485459
Summa	198485459
Cot. ZP	101014704

Tang. PK 9.7470755, cui in tabulis quam proxime respondent

	29°	11′	10″
Sed PS	66	39	12
Ergo SK	37	28	2

Porro Log. Cosin. SK	98996474
Cosin. ZP	98943464
Summa	197939938
Cosin. PK	99410343

Cosin. ZS seu Sin. SE 98529595, cui in tabulis quam proxime respondent 45° 27′ 43″.

III. Si Sol fuerit in signo australi; P*s* est aggregatum ex quadrante P*d* (§. 79) & declinatione *sd*, Reliqua se habent ut ante.

PROBLEMA II.

216. ***Data elevatione poli una cum declinatione & altitudine Solis, invenire horam diei.***

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 18. I. Si Sol C fuerit in æquatore AQ, cum sit in Z Zenith, in P polus, HR horizon, in triangulo ZAC ad A rectangulo (§. 84.) datur AZ elevationi poli PR æqualis (§. 97) & ZC altitudinis CE complementum ad quadrantem (§. 94. 62). Invenitur adeo arcus AC (§. 119. *Sphæric.*), qui in tempus solare conversus (§. 212) indicat horas vel ad meridiem residuas, si Sol fuerit in parte orientali, vel a meridie præterlapsas, si fuerit in occidentali.

Exemplum problematis præcedentis in casu eodem facile huc applicatur.

II. Si Sol S fuerit in signo boreali; in triangulo ZSP dantur latera singula, nimirum ZP elevationis poli PR & ZS altitudinis Solis SE complementum (§. 94. 62) atque PS declinationis SD complementum (§. 79). Invenitur adeo angulus ZPS (§. 168. *Sphæric.*), cujus mensura AD (§. 79. *Astron.* & §. 33. *Sphær.*) in tempus solare conversa (§. 212) tempus desideratum ut ante patefacit. Tab. III. Fig. 20.

Sit e. gr. PR 51° 38′, SE 45° 27′ 43″, locus Solis 24° ♊; erit DS 23° 20′ 48″, adeoque PS 66° 39′ 12″ & hinc ½ PS 33° 19′ 36″. Erit porro

Pytheas *Massiliæ umbram solstitialem ad gnomonem observavit ut* $213\frac{1}{5}$ *ad* 600 *seu ut* $31951\frac{1}{2}$ *ad* 90000; Gassendus *cum* Peirescio *ibidem* A. 1636 *ut* 31950 *ad* 90000 (r).

COROLLARIUM 1.

166. Quia observationes intra duo secula postrema peractæ in scrupulis secundis tantum differunt, nec *Eratosthenis* errore correcto, quem *Hipparchus* atque *Ptolemæus* retinuerunt, major differentia reperitur inter antiquissimas & recentiores, *Gassendus* insuper umbram solstitialem ejusdem longitudinis deprehendit, quantam annis fere bis mille ante observaverat *Pytheas*; declinationem eclypticæ immutabilem esse communiter concluditur.

SCHOLION.

167. *Qui errores* Eratosthenis *atque* Pytheæ *in modo, quo ex observationibus suis declinationem maximam eclypticæ collegerunt, non agnoverunt* Purbachius, Reinholdus, Regiomontanus, Copernicus, Rheticus, Tycho, Longomontanus, Snellius, Lansbergius, Bullialdus *aliique, eam variabilem statuerunt. Inprimis nostro tempore* Eugenius de Louville (s) *operose adstruit, eclipticæ obliquitatem singulis seculis uno minuto primo decrescere.* Herodotus *autor est, ex Ægytiorum traditione eclipticam ad circulum æquinoctialem fuisse perpendicularem: unde patet ipsos diminutionem obliquitatis eclipticæ agnovisse. Cumque teste* Diodoro Siculo *Chaldæi jactaverint observationes tam antiquas, ut a primis suis observationibus usque ad ingressum* Alexandri M. *Babylonem* 403 *millia annorum numerarent, ex mutabilitate autem eclipticæ ab ipso asserta consequatur hæc periodus, si initium statuatur in eo tempore, quo ecliptica per polos mundi transiit; inde conclu lit, Chaldæos quoque mutabilitatem declinationis eclipticæ observasse & quantitatem diminutionis agnovisse. Sed de his futuris seculis certius quid statuere licebit. Sumamus interim declinationem eclipticæ constantem.*

COROLLARIUM 2.

168. Ob plerarumque observationum consensum communiter assumitur, declinationem eclipticæ maximam esse 23° 30'. Sed quia Cl. *de la Hire* eandem ex observationibus prope æquatorem habitis (ubi per inferius independenter ab his demonstranda refractio non adeo turbat observationes altitudinum meridianarum) 23° 29' colligit, nos cum ipso in posterum eadem utemur.

OBSERVATIO 11.

169. *Si in solstitio brumali observetur transitus stellæ alicujus per meridianum* (§. 134), *noteturque ope horologii oscillatorii tempus culminationis; eadem vero nocte vel aliis*

(r) in Vita Peirescii.

(s) in Dissertatione de mutabilitate Eclipticæ, quæ legitur in Actis Eruditorum A. 1719. p. 281 & seqq.

aliis subsequentibus eodem modo observetur temporis intervallum, quod inter culminationes ejusdem aliarumque stellarum fixarum intercedit, ac tandem in solstitio æstivo observetur culminatio unius ex istis stellis una cum momento, quo accidit, & ex anterioribus observationibus colligatur tempus, quo stella primæ observationis illo die sit culminatura; hoc a tempore culminationis duodecim horis differre deprehenditur.

COROLLARIUM.

170. Quoniam motus sphæræ mundanæ æquabilis (§. 136) & duodecim horæ præterlabuntur a culminatione puncti solstitialis brumalis usque ad punctum solstitiale æstivum (§. 169); puncta solstitialia sibi mutuo diametraliter opponuntur.

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. 16. 171. *Ecliptica est circulus sphæræ maximus.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEQL meridianus, AQ æquator, EL ecliptica. Quoniam puncta solstitialia sibi mutuo diametraliter opponuntur (§. 170). si E fuerit æstivum, erit L brumale. Sunt vero AEQ & ALQ semicirculi (§. 84. *Sphær.*), adeoque AE + EQ = AL + LQ (§. 177. *Arith.*). Quare cum sit AE = QL (§. 165); erit etiam EQ = AL (§. 91. *Arithm.*), consequenter EQ + QL = EA + AL (§. 88. *Arithm.*). Transit ergo EL per centrum sphæræ C (§. 135. *Geom.*) & hinc ecliptica circulus maximus sphæræ mundanæ (§. 15. *Spæric.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

172. Ecliptica æquatorem bifariam secat (§. 20. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

173. Puncta igitur æquinoctialia sibi mutuo diametraliter opponuntur (158) adeoque signa borealia sunt in hemisphærio boreali, australia in australi (§. 51. 52, 161. 162).

COROLLARIUM 3.

174. Cum & meridianus (§. 70. 72) & ecliptica (§. 171) sit circulus maximus; se mutuo bifariam secant (§. 20. *Sphær.*). Et eodem modo patet, eclipticam ab horizonte tam rationali (§. 61), quam sensibili (§. 145) bifariam secari.

COROLLARIUM 4.

175. Arcus adeo eclipticæ inter horizontem & meridianum interceptus quadrans est.

COROLLARIUM 5.

176. Quare si ponamus punctum solstitiale æstivum E esse in meridiano, cum tunc alterum L etiam sit in meridiano (§. 174), puncta æquino- Tab. I. Fig. 16.

ctialia sibi mutuo diametraliter opposita (§. 173) sint in horizonte (§. 174), puncta solstitialia ab æquinoctialibus quadrantis intervallo distare manifestum est (§. 175. *Astron.* & §. 54. *Sphær.*).

COROLLARIUM 6.

177. Sunt adeo puncta solstitialia in principio cancri & capricorni, æquinoctialia vero in principio arietis atque libræ (§. 160).

COROLLARIUM 7.

Tab. I. Fig. 16. 178. Cum declinatio maxima eclipticæ AE sit arcus circuli maximi (§. 75), quadrantis intervallo a punctis æquinoctialibus distans (§. 176); erit eadem mensura *obliquitatis eclipticæ*, hoc est, anguli EGA ex intersectione æquatoris AQ & eclipticæ EL orti (§. 33. *Sphæric.*). Sunt vero omnes illi anguli AGE, LGQ, AHE, QHL inter se æquales (§. 32. 43. *Sphær.*).

COROLLARIUM 8.

179. Cum distantia poli eclipticæ M ab ecliptica AM quadrans sit (§. 25. *Sphæric.*) & AP itidem quadrans sit (§. 49); distantia poli eclipticæ a polo æquatoris, consequenter a polo mundi (§. 48), est declinationi maximæ æqualis (§. 91. *Arithm.*), adeoque 23° 29′ (§. 168).

COROLLARIUM 9.

180. Quia angulus obliquitatis eclipticæ immutabilis (§. 166); Sol constanter sub eodem circulo motu proprio incedit.

DEFINITIO 49.

181. *Tropici* sunt circuli immobiles ME & NL cum æquatore AD paralleli, per puncta solstitialia ducti. *Tropicus Cancri* vocatur, qui per principium cancri E transit: *Tropicus* vero *Capricorni*, qui per principium capricorni L transit. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM 1.

182. Quoniam declinatio eclipticæ est arcus EA vel LD ad æquatorem AD perpendicularis (75); erit EN distantia tropicorum (§. 83. *Sphæric.*). Est vero EA = LD (165) & AN = DL (§. 42. *Sphær.*). Ergo EA = AN (§. 87. *Arithm.*), consequenter distantia tropicorum EN declinationis maximæ EA dupla.

COROLLARIUM 2.

183. Quare si altitudinem Solis meridianam observes cum in solstitio brumali, tum in æstivo (§. 129. 137). & illam ex hac auferas: relinquetur distantia tropicorum, cujus dimidium est declinatio eclipticæ maxima, independenter adeo ab elevatione æquatoris invenienda.

DEFINITIO 50.

184. *Circuli polares* sunt circuli immobiles cum æquatore paralleli & a polo mundi tanto intervallo distantes, quanta est declinatio eclipticæ maxima. Polo arctico vicinus dicitur *polaris arcticus*; qui vero Tab. I. Fig. 1.

vero antarctico proximus, *polaris antarcticus*.

COROLLARIUM.

185. Quia polus eclipticæ a polo mundi tanto intervallo distat, quanta est declinatio eclipticæ maxima (§. 179); circuli polares sunt circuli diurni polorum eclipticæ (§. 56).

DEFINITIO 51.

186. *Coluri* sunt circuli sphæræ maximi mobiles per polos mundi & puncta eclipticæ solstitialia & æquinoctialia ducti. *Colurus æquinoctiorum* est, qui per puncta æquinoctialia transit: *Colurus solstitiorum* est, qui transit per solstitialia.

DEFINITIO 52.

187. *Circuli excursuum* sunt circuli cum ecliptica paralleli & ab ea tanto intervallo distantes, quanto planetarum versus polos eclipticæ excursus coërceri possunt, quod 10 vulgo statuitur graduum.

DEFINITIO 53.

188. *Zodiacus* est fascia circulis excursum terminata. Dividitur in 12 signa seu *Dodecatemoria* ejusdem nominis ac ordinis cum signis eclipticæ (§. 160).

SCHOLION.

189. *Circuli omnes optime dignoscuntur ex* sphæra armillari, *in qua* P & Q *sunt* poli mundi, AD æquator, EL ecliptica *cum* Zodiaco, PAGD meridianus, *vel etiam* colurus solstitiorum, T terra, FG tropicus cancri, MN circulus polaris arcticus, HI tropicus capricorni, OV polaris antarcticus, N & O poli eclipticæ, RS *denique* horizon. Tab. III. Fig. 17.

CAPUT III.

DE

MOTU COMMUNI SOLIS INDEQUE PENDENTIBUS PHAENOMENIS.

DEFINITIO 54.

190. *Ascensio recta* est punctum æquatoris cum stella aut alio quocunque in sphæræ mundanæ superficie

ficie dato puncto culminans, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 55.

191. *Ascensio obliqua* est punctum æquatoris cum stella aut alio quocunque puncto in sphæræ mundanæ superficie dato per horizontem ortivum transiens, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 56.

192. *Descensio obliqua* est punctum æquatoris cum puncto in superficie sphæræ mundanæ dato per horizontem occiduum transiens, a puncto æquinoctiali vernali numeratum.

DEFINITIO 57.

193. *Differentia ascensionalis* est differentia inter ascensionem rectam & obliquam ejusdem puncti: *differentia descensionalis* est differentia inter ascensionem rectam & descensionem obliquam ejusdem puncti.

DEFINITIO 58.

194. *Azimuthum* est arcus horizontis inter circulum verticalem datum & meridianum interceptus.

DEFINITIO 59.

195. *Amplitudo ortiva* est distantia puncti orientis a cardine orientis: *Amplitudo* vero *occidua* est distantia puncti occidentis a cardine occidentis.

COROLLARIUM 1.

196. Est itaque amplitudo ortiva & occidua arcus horizontis inter punctum oriens & occidens atque cardinem orientis & occidentis interceptus (§. 54. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

197. Azimuthum est amplitudinis ortivæ & occiduæ complementum ad quadrantem (§. 194).

PROBLEMA 4.

198. *Datis obliquitate eclipticæ* G *puncti cuiuscunque eclipticæ dati* S *declinationem* DS *invenire.*

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo SDG angulus D rectus est (§. 75) & præter angulum G 23° 29′ (§. 168) ob datum punctum S etiam arcus GS datur; reperietur DS (§. 116. *Sphær.*). Tab. I. Fig. 16.

Sit e. gr. S 20° ♉, erit GS 50°, adeoque

Log. Sin. G		96004090
	Sin. GS	98842540

Sin. DS 194846630, cui in tabulis quam proxime respondent 17° 46′ 25″.

SCHO-

SCHOLION.

199. *Hoc modo construitur Tabula declinationum singulorum graduum eclipticæ.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 14. 200. Si declinatio Solis borealis AD in tabulis reperta ab altitudine Solis meridiana HD observata (§. 129), auferatur; elevatio æquatoris residua fit (§. 150), quæ porro ex 90° subducta elevationem poli relinquit (§. 97). Similiter æquatoris altitudo prodit, si declinatio australis TA altitudini Solis meridianæ HT addatur.

SCHOLION.

201. *Patet ex theoricis cognitum esse debere locum Solis in ecliptica.*

COROLLARIUM 2.

202. Contra data elevatione æquatoria HA & declinatione Solis AD vel TA, invenitur altitudo ejus meridiana HD vel HT, si declinatio borealis AD illi addatur, australis vero TA dematur.

E gr. Altitudo Æquat. Halæ	38°	22′	
Declinat. ☉ in 25 ♉	19	3	6″
Altitudo ☉ meridiana	57	25	6

PROBLEMA 5.

203. *Data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis una cum obliquitate eclipticæ invenire ejus locum in ecliptica.*

RESOLUTIO.

1. Ex datis altitudinibus æquatoris & Solis quæratur ejus declinatio (§. 150). Tab. I. Fig. 16.
2. Cum adeo in triangulo DSG ad D rectangulo (§. 75) dentur angulus obliquitatis eclipticæ G & declinatio DS; reperietur arcus GS (§. 118. *Sphæric.*): quo dato, locus Solis quæsitus S innotescit, modo constet, in quo quadrante eclipticæ Sol commoretur. Etenim in primo quadrante GS est distantia a principio arietis; in secundo complementum ejus ad semicirculum; in tertio excessus ejusdem supra semicirculum; in quarto denique complementum ad circulum integrum.

E. gr. *Ricciolus* (t) A. 1643. d. 23. Martii (quo tempore Sol erat in primo quadrante eclipticæ) observavit

Altit. ☉ merid.	46°	33′	40″
Altit. Æquat.	45	29	50
Ergo Declinatio DS	1	3	50

Et Log. Sin DS	82687487
Sin. tot.	100000000
Summa	182687487
Sin. G	96004090
Sin. GS.	8.6683397, cui in

(t) Astron. Rem. lib. 1. c. 8. f. 26.

in tabulis quam proxime respondent 2° 40′ 15″.

Fuit ergo locus Solis ♈ 2° 40′ 15″.

PROBLEMA 6.

Tab. I. Fig. 16. 204. ***Data obliquitate eclipticæ* G, *invenire puncti cujuscunque* S *ascensionem rectam* D *& angulum eclipticæ cum meridiano* DSG.**

RESOLUTIO.

Quoniam circulus declinationis PD æquatorem AQ secat ad angulos rectos (§. 75); triangulum DSG rectangulum. Quare cum in eo detur angulus G & ob datum punctum S arcus GS, qui vel distantia Solis ab ariete, si Sol fuerit in primo quadrante, vel complementum ad principium libræ, si fuerit in secundo; vel distantia a principio libræ, si fuerit in tertio; vel denique complementum ad principium arietis, si fuerit in tertio: reperietur angulus DSG (§. 130. *Sphæric.*) & arcus DG (§. 127. *Sphæric.*), qui in primo casu indicat ipsam ascensionem rectam; in secundo ejus complementum ad semicirculum; in tertio excessum supra semicirculum; in quarto denique complementum ad circulum integrum.

E. gr. Sit Sol in ♈ 2° 40′ 15″. Quia G 23° 29′

erit Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. G	99624527
Summa	199624527
Cotang. GS.	113311611
Tang. GD	8.6312916,

cui in tabulis quam proxime respondent 2° 27′. Tanta nimirum est ascensio recta in 2° 40′ 15″ ♈.

Porro Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. GS	99995279
Summa	199995279
Cotang. G.	103620437
Cotang. S	9.6374842,

cui in tabulis quam proxime respondent 23° 27′ 38″.

Est ergo angulus GSD 66° 32′ 22″.

SCHOLION.

205. *Hoc modo construuntur Tabulæ Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ & Tabulæ anguli eclipticæ cum meridiano ad partes orientales in hemisphærio boreali.*

PROBLEMA 7.

206. ***Data elevatione Poli* PR *una cum declinatione Solis* DS, *invenire differentiam ascensionalem* OD, *amplitudinem ortivam* SO *& Azimuthum* HS.** Tab. III. Fig. 18. 19.

RESOLUTIO.

Quia circulus declinationis PD æquatorem AQ ad angulos rectos secat (§. 75), triangulum OSD re-

ctan-

ctangulum ad D. Quare cum in eo detur declinatio DS & angulus O ob elevationem poli datam (§. 97. 100); reperietur OD (§. 125. *Sphær.*) & SO (§. 118. *Sphær.*), consequenter ob OH = 90° etiam HS.

Sit e. gr. elevatio poli, quemadmodum Halæ 51° 38′ & Sol in 24° ♊: erit O 38° 22′, DS 23° 20′ 48″. Unde

Log. Cotang. O	101014704
Tang. DS	96351154
Sin. OD	497365858,

cui in tabulis quam proxime respondent 33° 2′ 27″.

Log. Sin. tot.	100000000
Sin. DS	95980165
Summa	195980165
Sin. O	97928759
Sin. OS	98051406,

cui in tabulis quam proxime respondent 39° 40′ 40″.

SCHOLION 1.

207. *Hac ratione construuntur Tabulæ differentiarum ascensionalium itemque amplitudinum ortivarum pro singulis gradibus declinationis sub singulis gradibus elevationis poli. Et per idem problema differentias descensionales & amplitudines occiduas inveniri per se patet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. III. Fig. 18. 208. Si Sol fuerit in signo boreali & differentia ascensionalis DO ex ascensione recta D subtrahatur, relinquetur ascensio obliqua O (§. 193). E. gr. si Sol fuerit in 24° ♊.

Ascensio recta D	83° 27′ 46″
Differentia Ascens. OD	33 2 27
Ascensio Obliqua O	50 25 19

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 19. 209. Si Sol fuerit in signo australi & differentia ascensionalis DO ascensioni rectæ D addatur, prodibit obliqua O (§. 193).

SCHOLION 2.

210. *Patet adeo, quomodo construantur Tabulæ ascensionum obliquarum pro singulis eclipticæ gradibus sub singulis gradibus elevationis poli.*

PROBLEMA 8.

211. ***Determinare tempus tam primi mobilis, quam solare, quo arcus æquatoris datus meridianum transit & contra.***

RESOLUTIO.

Quoniam meridianus æquatorem continuo ad angulos rectos secat (§. 84); dum datus arcus æquatoris per meridianum transit, perinde est ac si arcum æquatoris immotum punctum intersectionis in meridiano eadem celeritate interea temporis descripsisset. Cum adeo motus æquatoris sit æquabilis (§. 136); erunt arcus per meridianum transeuntes temporibus proportionales (§. 24. *Mechan.*).

Quare si inferatur: ut 360 ad 24 horas primi mobilis, ita arcus datus ad numerum quartum proportionalem; erit is tempus primi mobilis quæsitum. Quodsi adeo quæratur arcus dato tempore per meridianum transiens, inferendum erit: ut 24 ad 360, ita tempus datum ad arcum quæsitum,

Quia Sol intra 24 horas primi mobilis ascensionem rectam fere mutat 59′ 8″ 20‴, hoc est, 212 900‴, si hoc intervallum per 24 dividatur, quotus 8870‴ seu 2′ 28″ erit pars adjicienda arcui intra horam primi mobilis per meridianum transeunti, ut habeatur arcus intra horam solarem per eundem transiens.

Quodsi inferas: ut 360 59′ 8′ 20‴ ad 24 horas solares, ita arcus datus ad numerum quartum proportionalem; erit is tempus solare, quo arcus æquatoris datus per meridianum transit.

SCHOLION.

212. *Quia conversio temporis in gradus æquatoris & graduum æquatoris in tempus multum in Astronomia usum habet; ideo constructæ sunt tabulæ, in quibus exhibentur arcus æquatoris singulis horis tam primi mobilis, quam solaribus, & singulis scrupulis horæ unius per meridianum transeuntes, & contra. Earundem cum sit in problematis sequentibus usus eas hic contractas apponere libet. Usus facilis. Etenim gradus æquatoris dati cum suis scrupulis resolvuntur in partes, quæ in tabula extant, & ex ea excerpuntur horæ ac scrupula horaria ipsis respondentia. Hæc enim in unam summam collecta dant tempus, quo arcus æquatoris datus per Meridianum transit. Simili modo proceditur, si tempus datum in arcum æquatoris convertendum. Exempla in problematis sequentibus occurrunt.*

Conversio partium æquatoris in tempus primi mobilis & contra.

Æquat. Grad. / Min. / Sec. / Tert.	Hor. / I. / II. / II.	I. / II. / III. / IV.	Horæ	Æquat Grad.	Hor. Min. / Sec. / Tert. / Quart.	Æquat. Gr / I: / II. / III	′. / II. / III. / V.
			1	15	1	0	15
1	0	4	2	30	2	0	30
2	0	8	3	45	3	[illegible]	45
3	0	12	4	60	4	1	0
4	0	16	5	75	5	1	15
5	0	20	6	90	6	1	30
10	0	40	9	135	10	2	30
15	1	0	12	180	20	5	0
30	2	0	15	225	30	7	30
60	4	0	18	270	40	10	0
90	6	0	21	315	50	12	30
180	12	0	24	360	60	15	0
360	24	0					

Con-

Converſio partium æquatoris in tempus ſolare & contra.

Æquat.	Hor.	I.	II	III.	Hor.	Grad.	I.	II.	III.
Grad.					1	15	2	28	
Min.	I	II.	III.	V.	2	30	4	56	
Sec.	II.	III.	IV.	V.	3	45	7	24	
					5	75	12	20	
Tert.	III.	IV.	V.	VI.	10	150	24	40	
1	0	3	59	20	20	300	49	20	
2	0	7	58	40	Min.	Grad.	I.	II.	III.
3	0	11	58	1	Sec.	I.	II.	III.	IV.
4	0	15	57	22					
5	0	19	56	42	1	0	15	2	28
10	0	39	53	24	2	0	30	4	56
15	0	59	50	6	3	0	45	7	24
30	1	59	40	12	5	1	15	12	20
60	3	59	20	24	10	2	30	24	40
90	5	59	0	36	20	5	0	49	20
180	11	58	1	12	40	10	1	38	40
360	23	56	2	24	60	15	2	28	0

PROBLEMA 9.

213. *Dato loco Solis in ecliptica una cum elevatione poli, invenire longitudinem diei atque noctis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur declinatio Solis (§. 198) & inde porro differentia aſcenſionalis (§. 206).
2. Differentia aſcenſionalis convertatur in tempus ſolare: quod
3. tempori, quo quadrans æquatoris per meridianum tranſit, addatur, ſi Sol fuerit in ſigno boreali, vel ab eadem auferatur, ſi idem in auſtrali extiterit. Ita nimirum in utroque caſu obtinetur tempus ſemidiurnum.
4. Quodſi hoc ex 12 horis ſubducas, relinquetur tempus ſeminocturnum.

E. gr. Sit Sol in 24° ♊ & elevatio poli 51° 38′: erit differentia aſcenſionalis 33° 2′ 27″ (§. 206).

Sed 30° reſp. 1 hor. 59′ 40″ 12‴
3 11 58 1
2′ 7 58 40⁗
10″ 39 53 24ᵛ
15 59 50 6
2 7 58 40

Ergo diff. aſcenſ. 2 hor. 11.47.59.22.10
Porro 90° 5 59. 0.36

Unde temp. ſemidiu. 8 hor. 10 48. 35. 22.10
hoc eſt, 8 hor. 10′ 45″
11 59 60

tempus ſemino. 3 hor. 49′ 11″

Ergo tempus diurnum 16 hor. 21′ 38″; nocturnum vero 7 hor. 38′ 22″.

DEMONSTRATIO.

Quia punctum D eſt aſcenſio recta; ab ortu Solis usque ad meridiem arcus æquatoris AD per meridianum tranſit (§. 190.). Eſt vero AO quadrans (§. 89): quodſi ergo quadrans & differentia aſcen- Tab. III. Fig. 18. 19.

 ſio-

ſionalis in tempus convertantur, inde elici poſſe tempus inter ortum Solis & meridiem intercedens, hoc eſt tempus ſemidiurnum, patet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

214. Quia tempus ortus numeratur a media nocte, tempus vero occaſus a meridie; tempus ſeminocturnum eſt ſimul tempus, quo Sol oritur; ſemidiurnum vero indicat momentum, quo occidit. In noſtro nempe exemplo ⊙ oritur hor. 3. 49′ 11″; idem occidit hor. 8. 10′ 49″.

PROBLEMA 10.

Tab. III. Fig. 20. 215. *Data elevatione* PR *& declinatione Solis* DS, *invenire altitudinem ejus ad datum quodcunque momentum.*

RESOLUTIO.

I. Sit HZR Meridianus, in Z Zenith & Sol C in æquatore AQ.
Fig. 18. In triangulo ZAC ad A rectangulo (§. 84), datur AZ elevationi poli PR æqualis (§. 97), &, ſi tempus usque ad meridiem reſiduum (vel pomeridianum in altero caſu) in arcum æquatoris convertatur (§. 212), arcus AC: reperitur adeo arcus ZC (§. 120 *Sphær.*), qui ex quadrante ZE (§. 62) ſubductus relinquit altitudinem Solis CE (§. 94).

E. gr. Sit PR 51° 38′, ⊙ in ♈; quæratur altitudo hora 9 matutina. Quoniam horæ 3 usque ad meridiem ſuperſunt; erit AC 45° 7′ 24″.

Quare Log. Coſin. AZ 98945464
Coſin. AC 98485459

Coſin. ZC ſeu Sin. CE 9.7428923, cui in tabulis quam proxime respondent 33° 35′ 16″.

II. Si Sol S fuerit in ſigno boreali, cum ſit in Z Zenith, in P polus, AQ æquator, HR Horizon, in triangulo ZPS dantur latera PS declinationis DS complementum (§. 79) & ZP elevationis poli PR complementum ad quadrantem (§. 62). Quodſi tempus in arcum æquatoris convertatur (§. 212); prodibit arcus AD, qui ob quadrantem PD (§. 79) eſt menſura anguli ZPS (§. 33. *Sphær.*). Reperitur adeo SE (§. 163. *Sphær.*). Tab. III. Fig. 20.

E. gr. Sit Sol in 24° ♊ ſub elevatione poli 51° 38′: quærenda eſt altitudo ad horam 9 antemeridianam. Quoniam DS 23° 20′ 48″; erit PS 66° 39′ 12″; & AD ſive angulus P eſt 45° 7′ 24″. Quoniam in triangulo DGS ad D rectangulo (§. 76) hypothenuſa GS quadrante minor, quia ZE quadrans (§. 62), & DG itidem quadrante minor, quia AQ quadrans (§. 89), erit angulus S acutus (§. 84. *Sphær.*). Cum adeo in triangulo ZSP anguli S (§. 43. *Sphær.*) & P *per hypoth.* ſint acuti, perpendiculum ZK ex angulo Z in latus

PS

PS demissum intra triangulum cadit (§. 82. *Sphær.*). Quamobrem

Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. P.	98485459
Summa	198485459
Cot. ZP	101014704

Tang. PK 9.7470755, cui in tabulis quam proxime respondent

	29°	11′	10″
Sed PS	66	39	12
Ergo SK	37	28	2

Porro Log. Cosin. SK	98996474
Cosin. ZP	98943464
Summa	197939938
Cosin. PK	99410343

Cosin. ZS seu Sin. SE 98529595, cui in tabulis quam proxime respondent 45° 27′ 43″.

III. Si Sol fuerit in signo australi; P*f* est aggregatum ex quadrante P*d* (§. 79) & declinatione *fd*. Reliqua se habent ut ante.

PROBLEMA II.

216. ***Data elevatione poli una cum declinatione & altitudine Solis, invenire horam diei.***

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 18. I. Si Sol C fuerit in æquatore AQ, cum sit in Z Zenith, in P polus, HR horizon, in triangulo ZAC ad A rectangulo (§. 84.) datur AZ elevationi poli PR æqualis (§. 97) & ZC altitudinis CE complementum ad quadrantem (§. 94. 62). Invenitur adeo arcus AC (§. 119. *Sphæric.*), qui in tempus solare conversus (§. 212) indicat horas vel ad meridiem residuas, si Sol fuerit in parte orientali, vel a meridie præterlapsas, si fuerit in occidentali.

Exemplum problematis præcedentis in casu eodem facile huc applicatur.

II. Si Sol S fuerit in signo boreali; in triangulo ZSP dantur latera singula, nimirum ZP elevationis poli PR & ZS altitudinis Solis SE complementum (§. 94. 62) atque PS declinationis SD complementum (§. 79). Invenitur adeo angulus ZPS (§. 168. *Sphæric.*), cujus mensura AD (§. 79. *Astron.* & §. 33. *Sphær.*) in tempus solare conversa (§. 212) tempus desideratum ut ante patefacit. Tab. III. Fig. 20.

Sit e. gr. PR 51° 38′, SE 45° 27′ 43″, locus Solis 24° ♊; erit DS 23° 20′ 48″, adeoque PS 66° 39′ 12″ & hinc ½ PS 33° 19′ 36″. Erit porro

ZS	44°	32′	17″
ZP	38	22	
ZS+ZP	82	54	17
½ ZS + ½ZP	41	27	8

ZS	44°	32′	17″
ZP	38	22	
ZS − ZP	6	10	17
½ ZS − ½ZP	3	5	8

Demissum ex Z in PS perpendiculum cadere intra triangulum PZS, ex problemate præcedente patet. Cumque sit rectangulum ex cosinu ZS in sinum PK æquale rectangulo ex cosinu PZ in sinum SK (§. 162. *Sphæric.*); erunt cosinus ZP & ZS ut Sinus PK & KS (§. 299. *Arithm.*). Quare cum ZS > ZP *per hypoth.* adeoque cosinus ZP major cosinu ZS; erit etiam Sinus SK major Sinu PK, consequenter SK > PK. Hinc

Log. Tang. ½ PS	98179245
Tang. ½ ZS + ½ ZP	99460785
Tang. ½ ZS − ½ ZP	87316308
Summa	186777093
Tang. ½ SK − ½ PK	88597848,

cui in tabulis quam proxime respondent

	4°	8′	30″
Sed ½ PS	33	19	36
Ergo PK	29	11	6

Unde porro Cotang. ZP	101014704
Tang. KP	97470523
Cosin. P	98485227,

cui in tabulis quam proxime respondent 44° 52′ 23″.

Est ergo angulus P, consequenter arcus AD 45° 7′ 37″, qui in tempus conversus

30°	1h.	59′	40″	12‴		
15		59	50	6		
5′			19	56	42⁗	
2			7	58	40	
30″			1	59	40	12ᵛ
5				7	58	40
2						
producit 3h.	0	0	21	0	52	

Residuæ ergo sunt usque ad meridiem 3h: unde tempus observationis fuit hora nona.

III. Si Sol S fuerit in signo aûstrali, latus P*s* est quadrante majus. Ejus itaque loco resolvitur triangulum *sp*N & angulus *p* reperitur ut ante.

SCHOLION.

217. *Hujus problematis multum est in Astronomia practica usus, in eclipsibus præsertim solaribus observandis.*

PROBLEMA 12.

218. ***Data elevatione æquatoris* AH *una cum loco Solis* S *& obliquitate eclipticæ* G, *invenire ad datum tempus punctum eclipticæ oriens* M *& angulum orientis* AMH.** Tab. III. Fig. 21.

RE-

RESOLUTIO.

1. **Tempus usque ad meridiem residuum convertatur in arcum æquatoris (§. 212), ut habeatur arcus AD, consequenter ejus complementum DO (§. 89).**
2. **Ex loco Solis dato quæratur ejus ascensio recta (§. 204): qua data innotescit arcus DG.**
3. **Subducatur DG ex DO, relinquetur GO.**
4. **Cum in triangulo GMO præterea dentur anguli MGO & MOG, quorum ille obliquitas eclipticæ, hic altitudini æquatoris AH æqualis (§. 100); reperietur arcus GM (§. 164. *Sphær.*) & inde porro angulus M (§. 126. *Sphær.*).**

E. gr. Sit Sol in 17° ♌, elevatio poli 51° 38′: quærendum est punctum eclipticæ M hora 9 matutina oriens cum angulo orientis. Quoniam adhuc tres horæ usque ad meridiem supersunt; erit arcus AD 45° 7′ 24″ (§. 212), adeoque DO 44° 52′ 36″. Ascensio recta Solis D est 139° 27′ 38″, adeoque GD (sublata nempe ista ex 180) 40° 32′ 22″, consequenter DO−DG=GO=4° 20′ 14″. Porro angulus GOM 38° 22′ (§. 100) & MGO 23° 29′. Demittatur ex G in HM perpendiculum GN. Quoniam in triangulo GNO ad N rectangulo datur hypothenusa GO cum angulo O; erit

Log. Sin. tot. 100000000
Cosin. GO 99987544

Summa 199987544
Cotang. O 101014704

Cotang. NGO 98972840, cui in tabulis quam proxime respondent 38° 17′ 12″.

Est ergo NGO 51° 42′ 48″
Sed MGO 23 29 0

Ergo NGM 28 13 48
Porro Cosin. NGM 99450034
Cot. GO 111199295

Summa 210649329
Cosin. NGO 97921088

Cot. GM 112728241, cui in tabulis respondent 86° 56′ 45″. Est ergo GM 3° 3′ 15″ seu punctum eclipticæ oriens M 3° 3′ 15″ ♎.

Denique Sin. totus 100000000
Cosin. GM 99993826

Summa 199993826
Cotang. NGM 102701311.

Cotang. NMG 97292515, cui in tabulis quam proxime respondent 28° 11′ 46″.

Est ergo angulus puncti eclipticæ orientis NMG 61° 48′ 14″.

Si punctum æquinoctiale G fuerit infra horizontem, ex DG subtra- Tab. III. Fig. 22.

trahitur DO, ut habeatur OG: reliqua fiunt ut ante.

COROLLARIUM.

219. Quodsi ex puncto eclipticæ oriente M subtrahantur 90°, relinquitur nonagesimus eclipticæ gradus ab oriente numeratus.

DEFINITIO 59.

220. *Nonagesimus* vocatur eclipticæ gradus nonagesimus a puncto ejus oriente numeratus. Hinc *Altitudo nonagesimi* est altitudo gradus nonagesimi a puncto ejus oriente numerati.

THEOREMA 15.

Tab. III. Fig. 23. 221. *Altitudo nonagesimi est angulo orientis* KMI *æqualis & continuata per polos eclipticæ transit.*

DEMONSTRATIO.

Ex puncto oriente M tanquam polo intervallo quadrantis descriptus intelligatur circulus ZK; erit KI mensura anguli orientis KMI (§. 33. *Sphæric.*). Jam cum ecliptica EL atque horizon HR se mutuo intersecent in polo M circuli KIZ *per constr.*; hic per polos eclipticæ atque horizontis, consequenter per Zenith atque Nadir (§. 61), transit (§. 34. *Sphær.*). Est igitur ZK circulus verticalis (§. 70), adeoque KI altitudo nonagesimi (§. 94): Unde patet, altitudinem nonagesimi *vi demonstratorum* esse angulo orientis M æqualem & continuatam per polos eclipticæ transire. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

222. Ad datum igitur tempus sub data elevatione poli invenitur altitudo nonagesimi (§. 218).

SCHOLION.

223. *Patet adeo, quomodo construantur Tabulæ anguli orientis seu altitudinis nonagesimi sub elevatione poli assumta.*

COROLLARIUM 2.

224. Quodsi altitudinem nonagesimi IK ex 90° subducas, relinquitur distantia nonagesimi a vertice IZ (§. 73. *Astron.* & §. 54. *Sphær.*). Tab. III. Fig. 23.

CAPUT

CAPUT IV.
DE
LOCIS FIXARUM.

PROBLEMA 13.

Tab. III. Fig. 24. 225. *Distantias stellarum observare.*

RESOLUTIO.

1. Quadrans circa axem suum vertatur, donec per dioptras radio AC affixas stella una N adpareat in linea fiduciæ.

2. Loco perpendiculi, quo in metiendis altitudinibus utimur (§. 106), applicetur regula cum dioptris sive telescopicis, sive aliis, prout fixæ vel telescopicæ fuerint, vel alterius generis, circa centrum C mobilis CD & coobservator eam ultro citroque moveat, donec stella altera S in linea fiduciæ appareat.

Dico arcum AD indicare distantiam stellarum SN.

DEMONSTRATIO.

Quoniam stellæ S & N ad sensum a centro instrumenti C æqualiter absunt (§. 7), arcus ex C radio CS descriptus transit etiam per N seu punctum sphæræ mundanæ, (*Wolfii Math. Tom.* 3.) ubi videtur stella N (§. 40. *Geom.*). Sed quia distantia centri instrumenti C a centro telluris respectu fixarum evanescit, hoc est, pro nulla considerari debet (§. 144); circulus ex C descriptus idem est cum eo, qui ex centro telluris describitur, adeoque maximus (§. 15. *Sphær.*), & hinc arcus SN est distantia fixarum (§. 54. *Sphær.*). Quare cum SN sit mensura anguli SCN (§. 57. *Geom.*) & AD mensura ipsi æqualis ACD (§. 156. *Geom.*); arcus AD & SN similes sunt (§. 141. *Geom.*), adeoque eundem numerum graduum continent (§. 138. *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 14.

226. *Datis distantia fixarum* ST, *vel* TH, *vel* SV *& declinationibus earundem* SH, TI *vel* VI, *invenire differentiam ascensionum rectarum* HI. Tab. III. Fig. 25.

RESOLUTIO.

Si stella una H fuerit in æquatore, latus PH est quadrans, si utriusque declinatio borealis, latera

SP & PT sunt complementa declinatiounm SH & TI; si denique unius declinatio australis IV, latus PV est aggregatum ex quadrante PI & declinatione IV (§. 49) & HI mensura est in omni casu anguli HPI (§. 33. *Sphæric.*). Cum adeo in casu primo in triangulo HPT; in secundo in triangulo SPT; in tertio in triangulo VPS dentur tria latera; invenitur angulus HPI (§. 168. *Sphær.*).

E. gr. *Ricciolus* observavit distantiam capitis Andromedæ a lucida arietis 27° 9′ (u). Juxta Tabulas Cel. *de la Hire* (x) fuit A. 1700 declinatio capitis Andromedæ 27° 27′ 3″ & declinatio lucidæ arietis 22° 2′ 1″. Quoniam utraque declinatio borealis & caput Andromedæ lucida arietis occidentalior; erit HS 27° 27′ 3″, TI 22° 2″ 1″, TS 27° 9′, adeoque PT 67° 57′ 59″ & ½ PT 33° 58′ 59″ ½.

PS	62°	32′	57″
ST	27	9	0
PS + ST	89	41	57
½ PS + ½ ST	44	50	58½
PS	62°	32′	57″
ST	27	9	0
PS − ST	35	23	57
½ PS − ½ ST	17	41	58½

Quare Log. Tang. ½ PT	98287127
Tang. ½ PS + ½ ST	99977197
Tang. ½ PS − ½ ST	95039713
Summa	195016910
Tang. ½ PK − ½ TK	96729783,

cui in Tabulis respondent 25° 13′ 5″

Sed ½ PT	33	58	59½
Ergo PK	59	12	4½

Tandem Log. Cos. PS	97155661
Tang. PK	102246880
Cosin. P	99402541,

cui in tabulis quam proxime respondent 60° 37′ 50″.

Est igitur P sive HI 29° 22′ 10″.

COROLLARIUM.

227. Datis declinationibus duarum fixarum SH & TI una cum earum ascensionibus rectis H & I; evidens est in triangulo SPT dari duo latera PS & PT complementa declinationum datarum, & angulum interceptum P, quem metitur ascensionum rectarum datarum differentia HI (§. 33. *Sphæric.* & §. 190. 49. *Astron.*). Invenitur adeo distantia earundem ST (§. 165. *Sphæric.*). Exemplum problematis facile huc applicatur.

PROBLEMA 15.

228. *Observare ascensionem rectam alicujus fixæ.*

RESO-

(u) in Almagest. Novo lib. 4. c. 10. f. 426.

(x) in Tabul. Astron. p. 13 & 14.

RESOLUTIO.

1. Observetur momentum meridiei (§. 124) & index in horologio oscillatorio dirigatur ad horam duodecimam.
2. Observetur eodem momento a coobservatore altitudo Solis meridiana (§. 129. 137) & inde eliciatur ejus declinatio (§. 154), locus in ecliptica (§. 203) & tandem ascensio recta (§. 204).
3. Nocte insequente observetur culminatio fixæ (§. 134) & notetur tempus ab horologio oscillatorio indicatum.
4. Tempus a meridie usque ad culminationem stellæ præterlapsum convertatur in arcum æquatoris (§. 212): qui si
5. addatur ad ascensionem rectam Solis, prodibit ascensio recta fixæ (§. 190. 135). Quodsi aggregatum fuerit 360° major; excessus supra eosdem erit ascensio desiderata.

Aliter.

1. Ope telescopii observetur interdiu stella cum Sole culminans (§. 134) & altitudo Solis meridiana (§. 129. 137).
2. Hinc ut ante eliciatur ascensio recta Solis, quæ eadem erit ascensio recta fixæ.
3. Quodsi stella paulo ante meridiem aut post eundem culminet; tempus inter meridiem & culminationem stellæ intercedens dabit ut ante differentiam ascensionum rectarum Solis & fixæ.

SCHOLION 1.

229. *Accurata temporis observatione opus est, quod inter meridiem & stellæ culminationem intercedit: error enim 4 secundorum in tempore admissus producit errorem integri minuti in ascensione recta stellæ* (§. 212). *Tanta autem est horologiorum oscillatoriorum affabre constructorum perfectio, ut error unius scrupuli secundi ab observatore exercitato præcaveri possit* (y).

SCHOLION 2.

230. *Stellarum interdiu per tubos seu dioptras telescopicas instrumentorum observationem primam sibi tribuit observator præstantissimus* Cel. de la Hire (z). *Incidit autem in hunc modum observandi longe utilissimum circa annum* 1680.

COROLLARIUM 1.

231. Quoniam ex altitudine Solis meridiana locus ejus in ecliptica determinari potest (§. 203); si transitus stellæ cum Sole per meridianum observetur, punctum eclipti-

(y) Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1700. p. m. 376.
(z) loc. cit.

cæ una innotescit, cum quo stella culminat.

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 25. 232. Quodsi quarundam fixarum ascensiones rectæ fuerint observatæ; ascensiones reliquarum innotescunt, si differentia ascensionum rectarum ex distantiis eruta HI (§. 226) ex ascensione orientalioris I subtrahatur, vel ad ascensionem occidentalioris H addatur (§. 190. 136).

OBSERVATIO 12.

233. *Declinationem stellæ ultimæ in cauda ursæ maioris observarunt*

Ante Christ.

An. 295	Timocharis & Aristyllus	61°	30′	
128	Hipparchus	60	45	
Post Christum				
An. 138	Ptolemæus	59	40	
1585	Tycho	51	26	30
1660	Ricciolus	51	23	24
1700	de la Hire	50	47	29

& similis differentia deprehenditur in declinationibus aliarum fixarum a Ricciolo studiose collectis (a) *& in ascensionibus rectis earundem.*

COROLLARIUM 1.

234. Patet adeo, declinationem fixarum esse mutabiles, consequenter etiam earum distantias a polo, hoc est, declinationum complementa ad quadrantem (§. 79. *Astron.* & §. 54. *Sphæric.*).

COROLLARIUM 2.

235. Eodem modo patet, ascensiones rectas fixarum mutabiles esse.

DEFINITIO 60.

236. *Latitudo stellæ* S est distantia ejus ab ecliptica EL. Tab. III. Fig. 26.

COROLLARIUM 1.

237. Est ergo arcus circuli maximi TS inter centrum stellæ S & eclipticam EL interceptus atque ad eam perpendicularis (§. 79. *Sphær.*).

COROLLARIUM 2.

238. Circulus adeo, cujus arcu latitudinem TS metimur, per polos eclipticæ M & *m* transit (§. 28. *Sphæric.*).

DEFINITIO 61.

239. Hinc *Circulus latitudinis* est circulus maximus MST*m* per polos eclipticæ transiens.

COROLLARIUM.

240. Est ergo TM circuli quadrans (§. 25. *Sphær.*).

DEFINITIO 62.

241. *Longitudo* stellæ S est arcus eclipticæ a principio Arietis usque ad circulum latitudinis TM per stellæ

(a) in Astron. Reform. lib. 4. f. 204. & seqq.

stellæ centrum S ductum continuatus.

SCHOLION.

242. *Patet latitudinem stellæ respondere declinationi, longitudinem ascensioni rectæ, si situs stellæ respectu æquatoris conferatur cum situ ejus respectu ecliptica.*

PROBLEMA 16.

243. ***Data declinatione stellæ una cum ejus ascensione recta & obliquitate eclipticæ; invenire ejus longitudinem & latitudinem.***

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 27. I. Si stella S fuerit in æquatore AQ, in triangulo TSG ad T rectangulo (§. 237) datur angulus G seu obliquitas eclipticæ & arcus SG, qui in primo quadrante est stellæ ascensio recta; in secundo ejus complementum ad semicirculum; in tertio excessus supra semicirculum; in quarto complementum ad circulum integrum. Invenitur adeo tum latitudo TS (§. 116. *Sphæric.*), tum arcus GT (§. 117 *Sphæric.*), qui in primo quadrante est longitudo stellæ (§. 241), in secundo ejus complementum ad semicirculum, in tertio excessus supra semicirculum, in quarto complementum ad circulum integrum.

II. Si stella S habeat declinationem borealem DS, in triangulo PSM datur distantia polorum mundi & eclipticæ PM, quæ obliquitati eclipticæ æqualis (§. 179;) angulus QPD, cujus mensura est arcus DQ (§. 31. *Sphær.*), compositus ex quadrante GQ & arcu DG ob ascensionem rectam D dato, prout ex antecedente casu manifestum; & latus PS, declinationis SD complementum (§. 79). Invenitur adeo latus SM (§. 162. *Sphær.*) latitudinis TS complementum (§. 240), & angulus M (§. 165, *Sphær.*), cujus mensura est arcus ET (§. 240. *Astron.* & §. 31. *Sphær.*), complementum longitudinis GT in primo quadrante; excessus ejusdem ultra quadrantem in secundo quadrante. Tab. III. Fig. 26.

E. gr. Quærenda est longitudo caudæ Leonis ad annum 1700. Juxta *Philippum de la Hire* ejus declinatio borealis DS 16° 14′ 44″, ascensio recta D 173° 26′ 44″ & obliquitas eclipticæ G 23° 29′. Est adeo DG 6° 33′ 16″ & hinc DQ seu angulus SPM 96° 33′ 16″; PM 23° 29′; SP 73° 45′ 16″. Demisso ex M perpendiculo MK, quod extra triangulum SPM cadit (§. 82. *Sphær.*), erit

Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. P.	90574655
Summa	190574655
Cotang PM	103620436

Tang. PK 86954219, cui in tabulis quam proxime respondent

	2°	50′	29″
Sed SP	73	45	16
Ergo SK	76	35	45

Log. Cosin. PM	99624526
Cosin. SK	93651482
Summa	193276008
Consin. PK	99994656

Cosin. SM seu Sin. TS 93281352, cui in tabulis quam proxime respondent 12° 17′ 30″

Log. Sin. tot	100000000
Cosin. PM	99624526
Summa	199624526
Cotang. P	90603135

Cotang. PMK 10.9021391, cui in tabulis quam proxime respondent 82° 51′ 34″. Ergo PMK 7° 8′ 26″.

Porro Log. Cos. PMK	99966186
Cotang. SM	93382231
Summa	193348417
Cotang. PM	103620436
Cosin. SMK	8.9727981,

cui in tabulis quam proxime respondent 5° 23′ 22″.

Est ergo SMK	84°	36′	38″
Sed PMK	7	8	26
Ergo ET seu PMS	77	28	12
Addantur	90		
erit Longitudo	167	28	12
seu	17° ♍	28′	12″

III. Si declinatio stellæ fuerit australis; ejus longitudo & latitudo simili modo inveniri potest.

SCHOLION I.

244. *Per problema præsens construitur* Catalogus fixarum, *in quo earum longitudines & latitudines annotantur. Primus de catalogo fixarum condendo cogitavit* Hipparchus Rhodius *annis circiter* 120 *ante Christum natum*, Tymocharidis & Aristylli *observationibus* 180 *retro annis habitis una usus.* Hipparchi *Catalogum retinuit* Ptolemæus, *utut ipse quoque eum in finem observationibus vacaret; sed circa annum Christi* 880 Albategnius *Syrus eundem ad sua tempora reduxit.* A. 1437 Ulugh Beigh, *Rex Parthiæ ac Indiæ supra laudatus* (§. 141), *novum Catalogum fixarum condidit*, a D. Thoma Hyde *Anglo in Latinum idioma translatum. Tertius, qui catalogum fixarum ex propriis observationibus condidit, fuit* Tycho de Brahe, *qui stellis* 777 *loca sua assignavit ad annum* 1600: *quem* Keplerus *ex aliis observationibus* Tychonis *in Tabulis Rudolphi-*

dolphinis usque ad 1000 *fixas extendit. Eodem tempore* Guilielmus *Hassiæ Landgravius cum suis Mathematicis* Christophoro Rothmanno & Justo Byrgio 400 *fixarum loca per proprias observationes determinavit, quas* Tychonicis *præfert* Hevelius. Ricciolus *in Astronomia Reformata centum & unius stellarum loca ex propriis observationibus ad annum* 1700 *determinavit; in reliquis Catalogum* Tychonis, *prout ipsi visum fuit, mutavit.* A. 1677 Edmundus Halley, *nunc Geometriæ Professor in Academia Oxoniensi celeberrimus, & Astronomus Regius in observatorio Grenovicensi, in insula S. Helenæ* 350 *stellas australes observavit, in nostro horizonte non conspicuas. Eundem laborem iteravit* R.P. Noel & *novum earundem stellarum catalogum ad annum* 1687 *constructum* A. 1710 *edidit.* Johannes Hevelius *ex propriis observationibus catalogum* 1888 *fixarum condidit, quarum* 950 *etiam a veteribus,* 335 *ab* Hallejo & 603 *tantum ab ipso fuerunt observatæ. Tandem celeberrimi* Flamstedii *catalogus stellarum fixarum Britannicus, ad annum ineuntem* 1690 *ex observationibus per multorum annorum intervallum indefesso studio in observatorio Grenovicensi constructus, prodiit in historia cœlesti Britannica.*

SCHOLION I.

245. [*Ut autem catalogum condere liceret & ut astrophili stellas a se invicem discernere valerent: in certas figuras, quæ* asterismi *vocantur, distributæ & nominibus hominum atque animalium insignitæ sunt jam ab antiquis. In Zodiaco conspiciuntur* Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Sagittarius, Capricornus, Aquarius, Pisces: *a quibus signa eclipticæ ac Zodiaci nomina sua sortita, quamvis hodie asterismis cognominibus non amplius contigua. Præterea in parte cœli boreali deprehenduntur* Ursa major & minor, Draco, Cepheus, Boores, Corona septentrionalis, Hercules, Lyra, Cygnus, Cassiopea, Perseus, Andromeda, Triangulum, Auriga, Pegasus, Equuleus, Delphinus, Sagitta, Aquila, Ophiuchus *seu* Serpentarius, Serpens Antinous & Coma Berenices. *In parte australi fulgent* Cetus, Eridanus *fluvius,* Lepus, Orion, Canis major, Canis minor, Argo navis, Hydra, Crates, Corvus, Centaurus, Lupus, Ara, Corona meridionalis, Piscis australis, Phœnix, Grus, Indus, Pavo, Apis, Triangulum australe, Piscis volans, Toucan, Hydrus & Dorado. *Ex his asterismi quindecim postremi cum maxima parte navis, Centauri & Lupi in nostro Horizonte non conspiciuntur. Stellas reliquas, his asterismis non comprehensas, nudo tamen oculo conspicuas,* informes *seu* sporades *dixere veteres: quarum nonnullas recentiores Astronomi in novas figuras redegerunt.* E. gr. Hevelius *inter leonem & ursam majorem ponit* Leonem minorem; *inter ursam minorem & aurigam supra geminos* Lyncem; *sub cauda ursæ majoris* canes venaticos & *ita porro.*

SCHO-

SCHOLION 3.

246. *In his asterismis* Bayerus (b) *stellas per litteras alphabeti distinguit: plurimorum vero peculiaria sunt nomina.* *Huc pertinent* Arcturus *inter pedes Bootis*, Gemma *seu* Lucida *coronæ septentrionalis*, Capella *cum* hoedis *in humero aurigæ*, Palilitium *seu* oculus tauri, Plejades *in dorso & Hyades in fronte tauri*, Castor & Pollux *in capitibus geminorum*, Præsepe & asini *in cancro*, Regulus *seu* Cor Leonis, Spica Virginis *in manu* & Vindemiatrix *in humero Virginis*, Antares *seu* Cor Scorpii, Fomahant *in ore piscis australis*, Regel *in pede Orionis*, Sirius *in ore canis majoris*, Alcor *exigua admodum stella mediæ in cauda ursæ majoris contigua*, stella polaris *ultima in cauda ursæ minoris.*

SCHOLION 4.

247. *Poetæ Græci atque Romani de astrorum origine insulsas commenti sunt fabulas, quas* Hyginus *in Poetico Astronomico &* Natalis Comes *in Mythologia enarrant*, *a* Ricciolo *in compendio propositas* (c). *Hinc nonnulli vano magis zelo, quam in scientiam amore ducti aut astrorum figuras, aut saltem nomina earum immutari jusserunt.* Beda venerabilis *in astris Zodiaci nomina ex sacris substituit profanis: cujus exemplum secutus* Julius Schillerus, *Augustanus*, Anno 1627 *in Cælo stellato omnibus astris nomina ex sacris imposuit, vocans e. gr. arietem* Petrum, *taurum* Andream, *Andromedam* Sepulchrum Christi, *Lyram* Præsepe Christi, *Herculem* Magos ex oriente venientes, *Canem majorem* Davidem *&c.* Weigelius, *Mathematum quondam Professor Jenensis, in* Cœlo Heraldico *insignia Principum Europæorum in cælum invexit.* E. gr. *Ursam majorem in* elephantem regni Daniæ, *Cygnum in* Rutam cum gladiis domus Soxonicæ, *Ophiuchum in* Crucem Coloniensem, *triangulum in* Circinum, *quem artificum & scholarum*, *plejades in* Abacum pythagoricum, *quem mercatorum insigne appellat.* *Enimvero saniores nunquam approbarunt hunc ausum, nullo prorsus usui futurum, sed turbas in Astronomia daturum.* *Nos cum* Copernico (d) & Tychone (e) *necessarium judicamus, ut nomina & figuræ veterum retineantur, non solum quod meliores istis substituere non liceat, sed ut scripta Astronomorum ad nostrum usque tempus evulgata intelligi & veterum observationes cum recentioribus conferri possint, nec sine ratione, quæ Astronomum deceat, memoria multitudine discendorum oneretur, neque pronior ad errandum via sternatur.*

SCHOLION 5.

248. *Cæterum ad astrognosiam felicius absolvendam non modo conducunt globi artificiales. in quorum superficie figuræ astrorum decenter descriptæ; verum*

(b) in Uranometria.
(c) in Almagesto Novo lib. 6. c. 3. f. 397. & seqq.
(d) Revolut. cœlest. lin. 2. c. 14.
(e) Tom. 1. Progymnasm. p. m. 256.

rum etiam Uranometria Bayeri, *cujus designatione stellarum per litteras Græcas utuntur hodie Astronomi. Multo tamen emendatiores & splendidiores hos asterismos effecit* Flamstedius (f). *Ad eundem scopum faciunt* mappæ cœlestes, *in quibus asterismi decenter depicti, & Astroscopium inprimis* Schickardi. *Si quis enim vel solam ursam majorem cognoverit, his subsidiis adjutus reliquas facile agnoscet.*

SCHOLION 6.

249. *Secundum magnitudinem apparentem stellæ distinguuntur in* stellas primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, sextæ magnitudinis *atque in* stellas nebulosas. *Quamvis autem omnes in hanc divisionem consentiant; multus tamen dissensus apud Autores occurrit, si definiendum, quænam stellæ sint primæ magnitudinis, quænam secundæ, quænam tertiæ & ita porro.* E. gr. *Stellæ primæ magnitudinis ab omnibus agnoscuntur Aldebaran seu oculus tauri, Regel, Alhabor seu Sirius, Capella, cor Leonis, cauda Leonis, spica virginis, Arcturus, summa in pede Centauri, lucida seu fidicula lyræ, Fomalant, Canopus in temone Argo navis, Acarnar in extremo Eridani: controversæ autem sunt Procyon in cane minore, humerus Orionis, cor hydræ, cor scorpii, lucida centauri. Similiter nebulosas admittunt omnes præsepe in Cancro, aliam in aculeo scorpii, adhuc aliam in oculo sagittarii: controversæ autem sunt, quas aliqui in capite Persei, Orionis & Capricorni, in cornubus Capricorni, in pede Herculis, in Phœnice, Pavone & alibi admittunt.*

OBSERVATIO 13.

250. *Post Christum natum observarunt Cordis Leonis.*

		Longitudinem	Latitudinem
A.	138 Ptolemæus	2°. 30′	0. 10′ B.
	1115 Persæ	17. 30	0. 10′ B.
	1386 Alphonsini	20. 40	0. 10 B.
	1586 Wilhelmus Landgravius Hassiæ	24. 11	0. 32 B.
	1601 Tycho	24. 17	0. 26 B.

Et simili modo se habent observationes longitudinis & latitudinis aliarum fixarum.

COROLLARIUM 1.

251. Latitudo fixarum immutabilis; longitudo vero continuo crescit.

COROLLARIUM 2.

252. Videntur adeo fixæ motu proprio progredi secundum successionem signorum, seu in consequentia, in circulis eclipticæ parallelis.

SCHOLION 1.

253. *Hunc fixarum motum primus suspicabatur* Hipparchus, *cum* Tymocharidis *atque* Aristylli *observationes cum suis conferret:* Ptolemæus, *qui tribus*

(f) in Atlante coelest.

tribus fere seculis post Hipparchum *floruit, invictis argumentis eundem probavit* (g).

SCHOLION 2.

254. *Fuere etiam nonnulli, qui latitudinem fixarum mutabilem asseruerunt; sed cum rationibus parum firmis nitatur eorum assertio, ideo plerisque contrarium magis arridet.*

PROBLEMA 17.

255. ***Determinare quantitatem incrementi longitudinis annuam.***

RESOLUTIO.

1. Quia fixæ in consequentia moventur (§. 252); longitudo olim observata auferatur a longitudine recentiori ævo observata.
2. Residuum in scrupula secunda redactum dividatur per intervallum annorum inter utramque observationem intercedens; quotus erit longitudinis annuum incrementum.

E. gr. Longitudo Cordis ♌ fuit

A. 1586	♌ 24°	11′	
A. 1115	17	30	
Incrementum annorum 471	6°	41′ seu	24060″

quod per 471 divisum dat incrementum annuum 51 scrupulorum secundorum.

COROLLARIUM 1.

256. Si incrementum annuum per 100 multiplices, prodibit incrementum seculare in nostro casu 5100 scrupulorum secundorum, hoc est, 1° 25′.

RESOLUTIO.

257. *Tantum incrementum longitudinis fixarum assignat* Tycho de Brahe: & Copernicus ponit 1° 23′ 40″ 12‴, Flamstedius *cum* Ricciolo 1° 23′ 20″, Bullialdus 1° 24′ 54″ Hevelius 1° 24′ 46″, 50‴. *Unde incrementum annuum commode statuitur* 50″, *quale prodit per observationes* Flamstedii.

COROLLARIUM 2.

258. Quia incrementum annuum longitudinis fixarum 50″ (§. 257); singulis annis 72 longitudo fixarum gradu uno augetur.

PROBLEMA 18.

259. ***Data longitudine stellæ fixæ ad datum annum quemcunque invenire longitudinem ad datum annum quemcunque alium.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur differentia annorum datorum.
2. Per eam multiplicentur 50″ (§. 257), productum ad scrupula prima vel gradus (si fieri possit) reductum est differentia longitudinum.

3. Hæc

(g) Almagest. Nov. lib. 7. c. 12 & 13. f. 434. & seqq.

3. Hæc longitudini datæ addatur, si annus datæ longitudinis annum quæsitæ præcedit; vel ab eadem subtrahatur, si is hunc sequitur.

Ita nimirum in utroque casu obtinetur longitudo quæsita.

E. gr. Juxta Tabulas *Philippi de la Hire* longitudo Sirii A. 1701. erat ♋ 9° 57′ 33″, quæritur quanta sit anno præsente 1714? Quia differentia annorum 13; duc 50 in 13, factum 650″ seu 10′ 50″ si addatur longitudini datæ, prodibit quæsita ♋ 10° 8′ 23″.

PROBLEMA 19.

Tab. III. Fig. 26. 260. ***Data longitudine stellæ*** TG ***& latitudine*** TS ***una cum obliquitate eclipticæ*** G: ***invenire declinationem*** DS ***& ascensionem rectam*** DG.

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo SPM datur SM latitudinis TS complementum (§. 240) & ob arcum TE longitudinis TG complementum, angulus EMT, seu PMS (§ *cit. Astron.* & §. 33. *Sphæric.*), atque distantia polorum PM (§. 179); reperietur PS complementum declinationis SD (§. 163. *Sphæric.*) & angulus APD (§. 165. *Sphær.*), cujus mensura est arcus AD (§. 31. *Sphær.*) ascensionis rectæ DG complementum.

Quodsi EG non fuerit quadrans eclipticæ primus, ex problemate præcedente jam constat, ex data longitudine dari arcum TG & dato arcu AD dari quoque ascensionem rectam.

Exemplum problematis 18 facile huc applicatur.

PROBLEMA 20.

261. ***Data longitudine stellæ*** TG ***una cum declinatione*** DS ***& obliquitate eclipticæ*** G, ***invenire latitudinem*** TS ***& ascensionem rectam*** DG. Tab. III. Fig. 26.

RESOLUTIO.

Ex resolutione problematis præcedentis (§. 260) constat, in triangulo SPM dari PM polorum mundi P & eclipticæ M distantiam, & PS declinationis DS complementum atque angulum PMS, quem metitur arcus ET ex longitudine TG notus: invenitur ergo SM latitudinis TS complementum (§. 162. *Sphæric.*) & angulus EPD (§. 160. *Sphæric*): unde innotescit ascensio recta DG, ceu ex problemate præcedente manifestum est.

Exemplum problematis 18 facile huc applicatur.

PROBLEMA 21. Tab. III. Fig. 26.

262. ***Data ascensione recta*** DG ***&*** ***lon-***

longitudine TG *una cum obliquitate eccliptica* G, *invenire latitudinem* TS *&* *declinationem* DS.

RESOLUTIO.

Ex resolutione problematis 19. (§. 260) constat, in triangulo SPM dari angulos SPM & SMP una cum latere PM. Invenientur ergo latera PS & SM (§. 161. *Sphæric.*), quæ sunt declinationis DS & latitudinis ST complementa.

Exemplum problematis 18. facile huc applicatur.

PROBLEMA 22.

Tab. III. Fig. 26. 263. *Data ascensione recta* DG *& latitudine* TS *una cum obliquitate ecclipticæ* G, *invenire longitudinem* TG *& declinationem* DS.

RESOLUTIO.

Ex resolutione problematis 19. (§. 260) constat, in triangulo SPM dari latera SM & PM una cum angulo SPM. Invenietur ergo SP complementum declinationis SD (§. 162. *Sphæric.*) & angulus SMP (160. *Sphær.*): unde longitudinem TG innotescere ex problemate citato constat (§. 260).

Exemplum problematis 18 facile huc applicatur.

PROBLEMA 23.

264. *Data declinatione stellæ* DS *& latitudine* TS *una cum obliquitate eclipticæ* G, *invenire longitudinem* TG *& ascensionem rectam* DG. Tab. III. Fig. 26.

RESOLUTIO.

Ex resolutione problematis 19 (§. 260) constat, in triangulo SPM dari latera singula SP, PM & SM: invenientur ergo anguli P & M (§. 168. *Sphæric.*): quibus datis longitudinem TG & declinationem SD innotescere patet ex problemate citato.

Exemplum problematis 18 facile huc applicatur.

CAPUT

CAPUT V.

DE

MOTU COMMUNI FIXARUM ET PHAENOMENIS INDE PENDENTIBUS.

PROBLEMA 24.

Tab. III. Fig. 18. 19. 265. ***Data aſcenſione recta ſtellæ* CO *& declinatione* DS *una cum altitudine poli* PR, *invenire differentiam aſcenſionalem* OD *& amplitudinem ortivam* OS.**

RESOLUTIO.

Coincidit cum reſolutione problematis 7 (§. 206).

E. gr. Juxta Tabulas *Philippi de la Hire* Anno 1714 aſcenſio recta Sirii 98° 8′ 36″, declinatio auſtralis 16° 20′ 36″, elevatio poli Halæ juxta *Keplerum* 51° 38′. Quare

Log. Cotang. O	101014704
Tang. DS	94672255
Sin. OD	19.5686959,

cui in tabulis quam proxime reſpondent 21° 44′ 30″.

COROLLARIUM 1.

Tab. III. Fig. 18. 266. Si ſtella fuerit in hemiſphærio boreali, differentia aſcenſionalis DO ex aſcenſione recta D ſubtracta relinquit obliquam O (§. 191).

COROLLARIUM 2.

267. Si ſtella fuerit in hemiſphærio auſtrali, & differentia aſcenſionalis DO aſcenſioni rectæ D addatur, prodibit obliqua O (§. 191). Tab. III. Fig. 19.

PROBLEMA 25.

268. ***Data differentia aſcenſionali ſtellæ, invenire moram ejus ſupra horizontem.***

RESOLUTIO.

1. Differentia aſcenſionalis DO convertatur in tempus ſolare (§. 212). Tab. III. Fig. 18.
2. Si ſtella fuerit borealis, addatur eidem tempus quadranti AO reſpondens; ſi auſtralis fuerit, illud ab hoc ſubtrahatur.
3. Reſiduum ſi per 2 multiplicetur; prodibit tempus moræ ſupra horizontem.

E. gr. Differentia aſcenſionalis Sirii

Halæ hoc anno 21° 44′ 30″ (§. 265).
Respondent vero

10° o hor.	39′	53″	24‴		
10 0	39	53	24		
1 0	3	59	20		
30′	1	59	40	12⁗	
10		39	53	24	
4		15	57	22	
30″		1	59	40	12ᵛ
1 hor.	26	43	38	38	12
90° 5	59	0	35	59	60
4 hor.	32	16	57	21	48
2) 9 hor.	4	33	54	43	36

Est ergo Sirii mora supra horizontem 9 hor. 4′ 35″. Quare mora infra eundem 14 hor. 55′ 25″.

PROBLEMA 26.

269. *Dato loco Solis in ecliptica una cum ascensione recta alicujus stellæ, invenire momentum culminationis.*

RESOLUTIO.

1. Ex loco Solis dato quæratur ejus ascensio recta (§. 204).
2. Ab ea subtrahatur ascensio recta stellæ.
3. Differentia convertatur in tempus solare (§. 212), quod est tempus a meridie usque ad culminationem stellæ elapsum.

E. gr. Si Sol fuerit in 0 ♋
Ascensio ejus recta 90°
Asc. recta Sirii A. 1714 98 8′ 36″

Differentia 8° 8′ 36″
Respondent vero

5° o h.	19′	56″	42‴		
3	11	58	1		
5′		19	56	42⁗	
3		11	58	1	
30″		1	59	40	12ᵛ
5			19	56	42
1			3	59	20
Ergo o h.	32	29	1	19	14

Est ergo tempus culminationis a meridie o h. 32′ 29″.

COROLLARIUM 1.

270. Si tempus dimidiæ moræ stellæ supra horizontem (§. 268) momento culminationis addatur, prodibit momentum occasus.

E. gr. Sole in 0 ♋ existente in ipso meridie,

Sirius culminat	oh.	32′	29″
Halæ 1714 mora dimidia supra horizontem	4	32	16

Occidit ergo tum Halæ 5 h. pom. 4′ 45″

COROLLARIUM 2.

271. Si a momento occasus 12 horis aucto subtrahatur mora stellæ supra horizontem, relinquitur momentum ortus. E. gr.

Sirius

Sirius occidit	5 hor.	4′ 45″	
addantur	12		
erit summa	17 hor.	4′. 45″	
Mora supra hor.	9 hor.	4. 35	(§. 268).
Oritur ergo	8 h. mat. 0′. 10″		

Etenim si 12 horæ addantur ad momentum occasus, relinquitur idem a media nocte computatum. Quamobrem si porro auferatur mora supra horizontem, residuum est momentum ortus a media nocte computatum.

DEFINITIO 63.

272. *Mediatio cœli* est punctum eclipticæ cum stella culminans.

PROBLEMA 27.

Tab. II. Fig. 28. 273. *Data obliquitate eclipticæ G una cum ascensione recta stellæ D invenire mediationem cœli.*

RESOLUTIO.

Sit in P polus mundi, EL ecliptica, AQ æquator, PD circulus declinationis, erit ad D angulus rectus (§. 78. *Astron.* & §. 28. *Sphær.*) & punctum æquatoris D ascensio recta puncti eclipticæ S (§. 190). In triangulo itaque SDG ad D rectangulo, *per dem.* datur latus DG ob ascensionem rectam stellæ & angulus G obliquitas eclipticæ. Invenitur ergo GS (§. 125. *Sphæric.*): unde punctum eclipticæ S innotescit prorsus ut supra (§. 203).

E. gr. Obliquitas eclipticæ G 23° 29′, ascensio recta Sirii A. 1714 = 98° 8′ 36″, adeoque DG 81° 51′ 24″. Quare

Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. G	99624527
Summa	199624527
Tang. DG	108443821
Cotang. SG	91180706,

cui in tabulis quam proxime respondent 7° 28′ 37″. Est ergo ES 7° 28′ 37″, consequenter cum EG sit quadrans & G o ♎, mediatio cœli S ♋ 7°. 28′ 37″.

COROLLARIUM.

274. Quodsi ergo ex theoricis constet, quo tempore Sol sit in ♋ 7° 28′ 37″; dies quoque notus est, quo Sirius cum Sole culminat. E. gr. hoc anno Sol in 7° ♋ d. 29. Junii. Ergo Sol eo die cum Sirio culminabit.

SCHOLION 1.

275. *Quoniam Sol raro in ipso meridie in 7° 28′ 37″ ♋ existit, sed aliquot minutis ejus locus plerumque a mediatione cœli differt; ideo quoque Sirius vel paulo ante, vel paulo post Solem culminat: quæ differentia temporis innotescit, differentia ascensionum rectarum Solis & stellæ in tempus solare conversa* (§. 212).

SCHOLION 2.

276. *Quodsi ascensio rectæ stellæ e. gr. Sirii in tabulis ascensionum rectarum Solis quæratur, citra calculum invenitur cœli mediatio.*

PRO-

PROBLEMA 28.

277. *Data declinatione stellæ, invenire utrum sub data elevatione poli oriatur & occidat, an vero semper appareat, an semper lateat.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 14. Non alia re opus est, quam ut declinatio stellæ conferatur cum altitudine æquatoris. Nam

I. Si declinatio stellæ borealis QM habeat complementum PM ad quadrantem elevatione poli PR minorem, seu si ejus a polo distantia elevatione poli minor fuerit; stella in minima altitudine MR supra horizontem HR existit, adeoque semper apparet.

E. gr. declinatio borealis caudæ cygni hoc anno est 44° 18′ 5″, adeoque ejus complementum 45° 41′ 55″ minor elevatione Poli Halensi 51° 38′. Cauda igitur cygni Halæ nunquam occidit.

II. Si declinatio australis AI major fuerit elevatione æquatoris AH, stella sub horizonte latet, quando altitudo maxima esse debebat. Nunquam adeo oritur.

E. gr. declinatio australis oculi Pavonis est 57° 52′, adeoque major elevatione æquatoris Halensi 38° 22′. Oculus adeo Pavonis Halæ nunquam oritur.

III. Si declinatio australis AT minor fuerit elevatione æquatoris AH vel borealis QG complementum ad quadrantem seu distantia stellæ a polo PG major elevatione poli PR; stella & oritur, & occidit.

E. gr. Declinatio australis cordis scorpii hoc anno 25° 46′ 13″, quæ elevatione æquatoris Halensi 38° 22′ minor. Cor itaque scorpii & oritur, & occidit.

DEFINITIO 64.

278. Stella *cosmice oritur*, si una cum Sole oritur: *cosmice occidit*, si Sole oriente occidit.

DEFINITIO 65.

279. Stella *acronyce oritur*, si Sole occidente oritur: *acronyce occidit*, si una cum Sole occidit.

DEFINITIO 66.

280. Stella *heliace oritur*, si prope horizontem e radiis solaribus rursus emergit & primum conspici incipit: *heliace occidit*, si radiis Solis immergitur & conspectui primum eripitur.

DEFI-

DEFINITIO 67.

Tab. III. Fig. 32. 281, *Arcus visionis* est profunditas Solis sub horizonte DS, ad quam ubi Sol pervenit stella T conspici incipit.

PROBLEMA 29.

282. *Data obliquitate eclipticæ, elevatione æquatoris & ascensione obliqua stellæ, invenire punctum eclipticæ, cum quo stella oritur.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 29. I. Si in G fuerit o♈, in triangulo GOM datur obliquitas eclipticæ G, angulus GOM, quia ejus contiguus AOH elevationi æquatoris æqualis (§. 100), & latus GO, quæ est ascensio obliqua (§. 191). Invenitur adeo GM, hoc est, distantia puncti eclipticæ M, cum quo stella oritur, a principio arietis (§. 161. *Sphæric.*).

Tab. III. Fig. 22. II. Si stella fuerit in secundo quadrante, tum erit in G o♎ atque in triangulo GOM dantur ut ante angulus G obliquitas eclipticæ & angulus GOM elevationi æquatoris AH æqualis (§. 100. *Astron.* & §. 43. *Sphær.*), atque GO complementum ascensionis obliquæ ad semicirculum (§. 191. 173). Invenitur adeo denuo arcus GM, qui est complementum puncti eclipticæ M, cum quo stella oritur, ad semicirculum seu distantia a principio libræ (§. 161. *Sphær.*).

Tab. III. Fig. 30. III. Si stella fuerit in tertio quadrante, tum erit in G o♎ & in triangulo GOM datur obliquitas eclipticæ G, angulus AOH, qui elevationi æquatoris æqualis (§. 100), & latus GO, qui est excessus ascensionis obliquæ supra semicirculum (§. 191. 173). Invenitur adeo arcus GM (§. 161. *Sphæric.*), qui est excessus puncti M, cum quo stella oritur, supra semicirculum, seu distantia ultra o♎.

Tab. III. Fig. 32. IV. Denique si stella fuerit in quadrante ultimo, tum erit in G o♈ & in triangulo GOM datur obliquitas eclipticæ G, angulus GOM, cujus contiguus AOH est elevationi æquatoris æqualis (§. 100), & latus GO ascensionis obliquæ complementum ad integrum circulum (§. 191. 173). Invenitur latus GM (§. 161. *Sphæric.*), quod est complementum puncti M, cum quo stella oritur, ad circulum integrum.

Tab. III. Fig. 30. E. gr. elevatio æquatoris AH Halæ 38° 22′, obliquitas eclipticæ G 23° 29′, ascensio obliqua Sirii hoc anno 119° 53′ 6″. Est ergo Sirius in qua-

drante secundo & hinc in G o ♎ atque in triangulo GOM angulus G, 23° 29′, & GOM 38° 22′, prætere GO 60° 6′ 54″. Quoniam angulus GMO obtusus, GOM acutus; perpendiculum GI extra triangulum cadit (§. 82. *Sphæric.*). Quia in triangulo rectangulo OGI datur OG cum angulo O; erit

Log. Sin. tot.	100000000
Cosin. GO	96974567
Summa	196974567
Cotang. O	101014703
Cotang. OGI	95959864, cui

in tabulis quam proxime respondent 21° 31′ 30″.

Est ergo OGI	68°	28′	30″
Sed OGM	23	29	
Ergo MGI	44	59	30″.

Unde porro

Cosin. MGI	98495481
Cotang. GO	97594239
Summa	196089720
Cosin. OGI	95645561
Cotang. GM	100444159, cui

in tabulis quam proxime respondent 47° 55′ 30″.

Est ergo GM 42° 4′ 30″, consequenter punctum M 17° 55′ 30″ ♌.

COROLLARIUM 1.

283. Quodsi ex theoricis constet, quo die Sol hæreat in 18 ♌; erit eadem dies, quo Sol cum Sirio oritur: & hac ratione ortus cosmicus determinatur (§. 278). Hoc nempe anno Sirius cosmice oritur die 11 Augusti.

COROLLARIUM 2.

284. E contrario si ex theoricis constet, quo die Sol in gradum oppositum, nempe 18° ♒, ingreditur; erit eadem dies, quo Sirius Sole occidente oritur (§. 171). Et hac ratione ortus acronyctus determinatur (§. 279). Hoc nempe anno Sirius acronyce ortus die 28 Januarii.

COROLLARIUM 3.

285. Quodsi eodem modo ex data stellæ descensione obliqua investigetur punctum eclipticæ, cum quo occidit, & ex theoricis dies constet, quo Sol in illo puncto itemque in opposito hæret; habebitur dies, quo Sirius cum Sole occidit & Sole oriente occidit, hoc est, quando acronyce & cosmice occidit (§. 278. 279).

PROBLEMA 30.

286. *Determinare arcum visionis SD, dato Solis loco.* Tab. III. Fig. 32.

RESOLUTIO.

1. Observetur post occasum Solis ope horologii oscillatorii momentum, quo stella datæ magni-

gnitudinis aut planeta primum conspici incipit.

2. Tempus hoc in gradus æquatoris convertatur (§. 212) & habebitur arcus AO, consequenter ejus complementum ad semicirculum OQ adeoque porro ob KQ quadrantem (§. 49) angulus OKQ.

3. Ex loco Solis dato quæratur declinatio SO (§. 198), cui si

4. addatur quadrans KO, prodibit latus DK, si Sol fuerit in signo boreali. Alias DK est declinationis complementum.

5. Quare cum porro detur KN elevationis poli PR sive HK complementum ad quadrantem; invenietur SN (§. 163. *Sphæric.*), consequenter profunditas Solis quæsita SD.

COROLLARIUM

287. Patet eodem modo inveniri profunditatem Solis sub horizonte ad quodcunque temporis momentum aliud per observationem datum.

SCHOLION.

288. *Arcus visionis variat pro diversa stellarum fixarum magnitudine & diverso planetarum lumine. Quoniam vero ob diversum atmosphæræ nostræ statum, in quo radii solares diverso tempore diversimode refringuntur, non constans est omnibus in locis, nec omni tempore in eodem loco; mirum sane non est, quod Autores in eo determinando non prorsus consentiant.* Keplerus (h) *eundem ita determinat secutus dubio procul* Ptolemæum:

Magnitudo & nomina stellarum	Arcus Visionis
Fixa primæ magnitudinis	12°
secundæ	13
tertiæ	14
quartæ	15
quintæ	16
sextæ	17
stella nebulosa	18
♄	11
♃	10
♂	11 30′
♀	5
☿	10

Patet adeo, arcum visionis pro Venere esse omnium minimum: immo interdum est prorsus = 0, quoniam interdiu juxta Solem videtur, si nempe Telluri fuerit valde propinqua. Hevelius (i) *in Jove ex radiis Solis emergente observavit arcum visionis 3°, in Mercurio nunc 3°, nunc 4°; in Venere 2°. Operæ adeo pretium foret, ut in hunc arcum accuratiori industria inquirerent observatores.*

(h) in Epitom. Astron. Copernic. lib. 3. p. 370.
(i) Tom. II. Mach. coelest. lib. 2. f. 611. 219. 214.

PROBLEMA 31.

Tab. III. Fig. 22. 289. *Data obliquitate eclipticæ G, elevatione æquatoris AH & ascensione obliqua stellæ alicujus O, determinare angulum GMO, quem punctum eclipticæ M cum ipsa oriens cum horizonte HR efficit.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur arcus GM ex his datis (§. 282).
2. Datis adeo in triangulo OGM angulo O & lateribus OG & GM, invenitur angulus M (§. 158. *Sphær.*).

E. gr. Hic AH 38° 22′, G 23° 29′, ascensio obliqua Sirii hoc anno 119° 53′ 6″ & hinc GO 60° 6′ 54″, reperiturque GM 42° 4′ 30″. Unde porro

Log. Sin. GM	98261414
Sin. O	97928759
Sin. GO	99380326
Summa	197309085

Log. Sin. M 99047671, cui in tabulis quam proxime respondent 38° 46′ 4″.

Est ergo obtusus OMG 141° 13′ 56″.

SCHOLION.

290. *Hoc angulo opus est, si ortus & occasus heliacus stellæ determinandus, quemadmodum ex problemate sequente apparet.*

PROBLEMA 32.

291. *Datis arcu visionis* DS, *puncto eclipticæ* M *cum quo stella oritur, angulo* DMS, *quem efficit ecliptica* EL *cum horizonte* HR, *invenire punctum eclipticæ* S, *in quo Sol hæret, dum stella heliace oritur.* Tab. II. Fig. 33.

RESOLUTIO.

1. Cum in triangulo DMS ad D rectangulo (§. 76) detur arcus visionis DS, & angulus SMD; inveniatur arcus MS (§. 118. *Sphær.*).
2. Arcus MS addatur puncto eclipticæ dato M: ita innotescet locus Solis S.

E. gr. Sirius hoc anno Halæ oritur cum ♌ 17° 55′ 30″ (§. 282), angulus M 38° 46′ 4″ (§. 289), quia Sirius stellæ primæ magnitudinis, DS 12° (§. 288); erit ergo

Log. Sin. DS	93178789
Sin tot.	100000000
Summa	193178789
Sin. DMS	97966890

Sin. MS 95211899, cui in tabulis quam proxime respondent 19° 23′ 33″.

Quodsi huic addas punctum eclipticæ oriens 17° 55′ 30″ ♌; prodibit locus Solis S ♍ 7° 19′ 3″.

CO-

COROLLARIUM 1.

292. Quodsi M fuerit punctum cum quo stella occidit; patet, eodem modo reperiri locum Solis S ad diem, quo stella heliace occidit.

COROLLARIUM 2.

293. Quodsi adeo ex theoricis constet, quo die Sol in dato eclipticæ gradu hæreat; idem erit dies, quo Sol heliace oritur vel occidit.

PROBLEMA 33.

294. ***Data ascensione recta Solis meridiani & stellæ cujuscunque, invenire tempus, quo stella culminat.***

RESOLUTIO.

1. Ascensio recta Solis ex ascensione recta stellæ (integro circulo, hoc est, 360° aucta, si minor fuerit) auferatur.
2. Residuum convertatur in tempus solare (§. 212): ita prodibit tempus a meridie præterlapsum (§. 190).

E. gr. Ascensio recta Sirii hoc anno 98° 8′ 36″. Ponamus nos observasse transitum ejus per meridianum, quando Sol meridie præcedente erat in 0 ♓ adeoque ascensio ejus recta 332° 5′ 50″. Calculus secundum problema præsens ita instituetur:

Ascensio recta Sirii	98°	5′	55″
Circulus integer	360		
Aggregat.	458	5	55
Ascensio recta ☉	332	5	50
Arcus horarius	126	0	5

90°	5h.	59′	0″	36‴		
30	1	59	40	12		
5		19	56	42		
1		3	59	20		
5″				19	56iv	42v
Temp. quæs.	8h.	22	37	9	56	42

sive 8 h. 22′ 37″.

COROLLARIUM 1.

295. Ex culminatione adeo stellæ observata inveniri potest tempus nocturnum.

COROLLARIUM 2.

296. Quodsi observetur tempus, quod inter datum aliquod momentum & culminationem alicujus stellæ intercedit, ope horologii oscillatorii; eodem modo cognoscetur ipsum illud momentum a meridie præcedente numeratum.

SCHOLION.

297. *Hoc adeo problema utile est ad momentum quodcunque nocturnum per observationem determinandum, si horologii motum rectificare vel etiam probare volueris.*

PROBLEMA 34.

298. ***Data elevatione poli* PR, *una cum altitudine alicujus stellæ*** Tab. III. Fig. 20.

 SE,

SE, *ejus declinatione* DS *&* *ascensione recta* D, *invenire punctum æquatoris* A, *quod tempore observatæ altitudinis per meridianum transit.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam in triangulo ZPS dantur singula latera, nempe ZS complementum altitudinis ZE (§. 61), PS complementum declinationis (§. 79) & ZP complementum altitudinis poli PR (§. 62); reperiatur angulus ZPS (§. 168. *Sphæric.*), cujus mensura arcus AD (§. 31. *Sphær.*).

2. Subtrahatur AD ex ascensione recta stellæ; residuum erit punctum æquatoris culminans A.

E. gr. Noctu insequente, quando Sol meridianus fuit in 9° ♒, ponamus Halæ, ubi altitudo poli 51° 38′, observatam fuisse altitudinem lucidæ arietis in parte cœli orientali 30°; erit DS 22° 6′ 1″ & ascensio recta D 27° 47′ 42″, consequenter PZ 38° 22′, PS 67° 53′ 59″, ZS 60°. Quoniam anguli P & S acuti, perpendiculum ZK ex Z in PS demissum, intra triangulum cadit (§. 82. *Sphæric.*). Porro Cosinus ZS ad Cosinum PZ ut Cosinus KS ad Cosinum KP (§. 138. *Sphæric.*). Quamobrem cum sit ZS > PZ *per hypoth*, erit Cosinus ZS < Cosinu PZ (§. 11. *Trigon.*) & hinc Cosinus SK < cosinu KP (§. 151. *Arithm.*). Quamobrem SK > KP (§. 11. *Trigon.*). Itaque

PZ	38°	22′
ZS	60	
PZ+ZS	98	22
½ PZ + ½ ZS	49	11
ZS	60	
PZ	38	22
ZS − ZP	21	38
½ ZS − ½ PZ	15	49

Log. Tang. ½ PS:	98281696
Tang. ½ ZP + ½ ZS	100636448
Tang. ½ ZS − ½ PZ	94522246
Summa	195158694
Tang. ½ SK − ½ PK	96876998, cui

in tabulis respondent 25° 28′ 30″
Sed ½ PS 33 56 59½

Ergo PK 8 28 29½

Unde porro

Cotang. ZP	101014704
Tang. KP	91732007
Cosin. P	92746711, cui

in tabulis quam proxime respondent 10° 50′ 56″.

Est ergo angulus P seu arcus AD 79° 9′ 4″, qui ex ascensione recta stellæ 27° 47′ 42″ subductus, relinquit punctum culminans A 308° 38′ 38″.

CO-

COROLLARIUM.

299. Cum per problema praecedens investigari possit tempus, quo punctum aequatoris A culminat; ex data altitudine stellae inveniri potest tempus nocturnum. E. gr. si in meridie, quae observationem praecedit, Sol fuerit in 9° ♏ adeoque ejus ascensio recta 207° 54′ 10″, erit arcus horarius 100° 44′ 28″, adeoque tempus, quo altitudo observata 6 h. 41′ 51″.

PROBLEMA 35.

Tab. III. Fig. 20. 300. *Datis ascensione recta* D *stellae cujuscunque, una cum declinatione ejus* DS *& elevatione poli* PR; *invenire altitudinem* SE *ad tempus datum.*

RESOLUTIO.

1. Tempus datum convertatur in gradus aequatoris (§. 212), ita prodibit arcus aequatoris, qui a meridie usque ad tempus datum per meridianum transit.
2. Subtrahatur is a stellae ascensione recta D, residuus fiet arcus AD, cujus mensura est angulus P (§. 79. *Astron.* & §. 33. *Sphaeric.*).
3. Cum in triangulo ZPS praeter hunc angulum P dentur latera PZ & PS, elevationis poli PR (§. 62) & declinationis DS complementa (§. 79); reperietur ZS complementum altitudinis SE (§. 163. *Sphaer.*).

Exemplum praecedens facile huc applicatur, calculo prorsus ut in problemate 10 (§. 215) instituto.

SCHOLION.

301. *Hoc problemate & ejus corollario opus est, si stellas interdiu per telescopia observare volueris.*

COROLLARIUM.

302. Cum ex iisdem datis reperiri quoque possit angulus HZE (§. 166. *Sphaer.*), cujus mensura ob quadrantem ZE (§. 62) est arcus HE (§. 33. *Sphaeric.*,) seu Azimuthum stellae (§. 194); evidens est, quomodo Azimuthum ad datum quodcunque tempus, consequenter planum verticalis, in quo stella haeret, determinetur.

CAPUT

CAPUT VI.

DE

GLOBO COELESTI ARTIFICIALI.

DEFINITIO 68.

303. *Globus cœlestis* est sphæra ex cupro, orichalco, charta aut materia alia confecta, in cujus superficie stellæ singulæ intervallis earundem distantiis proportionatis depictæ una cum circulis sphæræ mundanæ præcipuis.

SCHOLION.

304. *Globi cælestes eum in finem construuntur, ut phænomena motus primi Solis atque stellarum, quæ hactenus per observationes & calculum trigonometricum accurate determinare docuimus, rudiori Minerva, quantum ad usus vitæ sufficit, determinantur. Eorum adeo constructionem & usum hic edoceri fas est.*

PROBLEMA 36.

305. *In superficie sphæræ ex lamina cuprea vel orichalcea paratæ circulos cælestes & stellas fixas decenter designare & sphæram ad usum astronomicum aptare.*

RESOLUTIO.

1. Libere assumantur duo puncta P & Q sibi mutuo diametraliter opposita & in iis defigantur axiculi PA & QC, circa quos globus tanquam circa axem suum volvi possit, ita ut puncta P & Q vel A & C designent polos mundi (§. 46). Tab. IV. Fig. 34.

2. Circulus æneus ABCD dividatur in quatuor quadrantes AE, EC, CF & FD & quilibet quadrans in suos 90 gradus subdividatur, a punctis E & F versus polos A & C numerandos.

3. Intra hunc circulum in A & C firmetur globus tanquam in meridiano, ita ut libere intra illum rotari possit (§. 50. 72).

4. Stylo ad primum divisionis punctum E firmiter applicato, globus circumrotetur; erit circulus in superficie ejus delineatus æquator (§. 49). Consultum vero est, ut æquator designetur per duos circulos parallelos aliquali cum latitudine, quo com-

commode in suos 360 gradus dividi possit.

5. A polo mundi P versus M & ab altero C versus N numerentur gradus 23½: erunt puncta M & N poli eclipticæ (§. 179).

6. Applicatio ad meridianum stylo, qui apice suo punctum M attingat, globus circumvolvatur; ita designabitur circulus polaris arcticus (§. 184). Eodem modo circa polum O designabitur polaris antarcticus (§. *cit.*).

7. Quodsi similiter ab æquatore versus polos P & Q numerentur gradus 23½ notenturque puncta H & I, atque denuo ad meridianum applicato stylo per ea describantur circuli cum æquatore paralleli; erit eorum alter per H ductus tropicus cancri, alter vero per I transiens tropicus Capricorni (§. 181).

8. Globus in polis eclipticæ intra meridianum ut ante suspendatur & ad E applicato stylo circumvolvatur; ita nimirum ecliptica in eodem designabitur in 12 signa dividenda, quorum unumquodque rursus in suos 30 gradus subdividendum. Consultum denuo est, ut ecliptica aliquali cum latitudine per duos circulos parallelos designibetur.

9. Globo adhuc ita suspenso, gradus longitudinis stellæ ducatur sub meridianum & in eo versus polum latitudini cognominem numerentur tot gradus, quot latitudini conveniunt: erit punctum in superficie globi extremo illius arcus meridiani respondens stellæ centrum (§. 241. 236). Eodem modo ex ascensione recta & declinatione locus stellæ determinatur, si globus ex polis mundi seu æquatoris fuerit suspensus (§. 191. 75).

10. Stellis ad unum asterismum pertinentibus ita designatis, vel coloribus oleo dilutis asterismi imago juxta *Bayerum* in Uranometria in globi superficie pingatur, vel eidem a chalcographo incidatur.

11. Intra horizontem ligneum DBL fulcris quatuor incumbentem ita constituatur globus cum meridiano æneo, ut in duo hemisphæria ab eodem dividatur (§. 63) & polus A ad arbitrium attolli ac deprimi possit.

12. In limbo horizontis designetur circulus in 360 gradus divisus cum calendario & plagis mundi, de quibus in Geographia.

13. Denique ad polum A aptetur circulus æneus in bis 12 partes

æquales, hoc est, intervalla horaria divisus, ita ut linea horæ duodecimæ sit in plano meridiani & index horarius circa axem mobilis cum globo simul circa polos rotetur.

Hac ratione globus cœlestis erit constructus.

SCHOLION 1.

306. *Equidem circuli polares & tropici immobiles sunt* (§. 181. 184); *adeoque in superficie sphæræ mobili perperam designari videntur; sed nulla ratio suadet, ut credamus, primum globorum inventorem per errorem circulos illos in superficiem eorum transtulisse. Neque ignorant, cur in superficie globi cœlestis mobili compareant tropici & polares, qui ejus usum sufficienter cognitum atque perspectum habent. In Geographia nimirum per tropicos & polares distinguuntur Zonæ: ut adeo appareat, sub quibus cœli partibus sita sit Zona quælibet, tropici & polares non modo globo terrestri, verum etiam cœlesti inscribuntur. Neque opus est, ut eum in finem extra globi superficiem ad meridianum applicentur, quemadmodum in sphæris armillaribus fieri assolet: quia enim in usu globi cœlestis solitario non attenduntur, perinde tum est ac si prorsus abessent, neque in errorem inducere possunt nisi circulorum definitiones ignorantem.*

SCHOLION 2.

307. *Quia stellarum longitudo perpetuo mutatur, globorum usus perpetuus non est. Sed quia incrementum 72 annorum demum gradum adæquat* (§. 258); *in usu globorum intra seculum pro nullo habendum, cujus nimirum ope phænomena non ad scrupula singula, sed rudi saltem Minerva determinantur. E. gr. Si cœli stellati faciem contemplaturus globum ad mundi plagas & cardines componas; parum refert, an gradus unus eclipticæ infra horizontem existat, qui supra eum esse debeat & contra. Eundem sane in astrognosia usum præstabit globus, sive longitudo stellarum fuerit exacta, sive gradu uno aberret a vera. Sane longitudinum gradu uno differentium ascensiones rectæ nunquam magis differre possunt, quam* 1° 5′ 25″ *juxta tabulas* Cl. de la Hire: *quæ differentia etiamsi in omnibus stellis obtineret (obtinet tamen in paucissimis), cœli facies ea prodiret, quæ elapsis demum* 4′ 11″ *futura erat. Quare cum in circulo horario tantillum temporis discerni nequeat, patet intra seculum & ultra globos esse ab errore immunes censendos in facie cœli ad datum tempus determinanda, quorum constructio longitudinis stellarum immutabilitatem supponit. Neque difficulter inde perspiciunt intelligentes, in aliis quoque casibus similiter demonstrari posse, intra seculum & ultra citra errorem notabilem adhiberi posse globos, quorum superficiei adscripti sunt æquator atque ecliptica. Atque hæc est ratio, cur hæc globorum vitia ab intelligentibus pro nullis reputentur, atque adeo sciens & volens eadem admittere debuerit primus globorum inventor.*

SCHO-

SCHOLION 3.

308. *Vulgo globos construunt ex charta eum quidem in modum, quem problemate sequente exponimus: sed placuit talem præmittere, quam tyrones facilius intelligere possint.*

PROBLEMA 37.

309. ***Ex charta globum cœlestem componere.***

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 35. 1. Ex data diametro globi investigetur recta AB peripheriæ circuli maximi æqualis (§. 429. *Geom.*) & in 12 partes æquales dividatur (§. 274. *Geom.*).

2. Per singula divisionis puncta 1, 2, 3, 4 &c. intervallo 10 partium describantur arcus se mutuo in D & E intersecantes: ex iis enim decenter connexis globi superficies integra componitur.

3. Pars qualibet rectæ AB dividatur in 30 partes æquales, ut adeo tota recta AB, quæ peripheriam æquatoris repræsentat, in 360 gradus sit divisa.

Tab. IV. Fig. 36. 4. Ex polis D & E intervallo $23\frac{1}{2}$ describantur arcus *a b*, qui erunt partes circulorum polarium duodecimæ (§. 184. 168).

5. Eodem modo ex iisdem polis D & E, sed intervallo $66\frac{1}{2}$ graduum ex æquatore sumto describantur arcus *c d*, qui erunt partes duodecimæ tropicorum (§. 181. 168).

6. Per gradum æquatoris *e*, qui ascensioni rectæ stellæ alicujus datæ respondet & polos D atque E cerussa delineetur arcus circuli (§. 294. *Geom.*) & complemento declinationis ex polo cognomine D intersecetur in *i*, erit punctum *i* locus stellæ.

7. Omnibus stellarum ad eundem asterismum pertinentium locis ita determinatis, figura asterismi juxta *Bayerum*, vel *Hevelium* in Firmamento Sobiesciano, aut *Flamstædium* in Atlante cœlesti decenter delineetur.

8. Tandem eodem modo per declinationes & ascensiones rectas singuli gradus eclipticæ *lg* determinentur.

9. Globi superficies in planum ita projecta æri incidatur, ne labor adeo molestus pro singulis globis denuo sit repetendus.

10. Ex ligno tornetur globus paulo minoris diametri & charta conglutinata superinducatur, mox bifariam dissecanda, ut globus ligneus eximi possit, atque denuo conglutinanda, ut globus chartaceus cavus habeatur.

11. Superficies globi chartacei vestiatur gypso, donec superficies

fuerit perfecte rotunda & globus prodeat diametri requisitæ: id quod explorare licet, circulo maximo data diametro in tabula lignea descripto & exciso.

12. Ejusdem circuli ope determinentur duo puncta diametraliter opposita in superficie globi gypso vestiti, quæ sint poli mundi, itemque æquator & meridiani per trigesimum quemque æquatoris gradum ducti.

13. Globo in duodecim partes æquales sic divisio agglutinentur partes similes ex mappa impressa excisæ.

14. Globus ut ante (§. 305) intra meridianum æneum & horizontem ligneum decenter suspendatur.

Tab. IV. Fig. 37. 15. Denique construatur ex lamina orichalcea quadrans HI circa axiculum H mobilis & in æquales gradus cum ecliptica & æquatore divisus, quem *Quadrantem altitudinis* ac *latitudinis* posthac vocabimus.

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 36. 310. *Quodsi non declinationes & ascensiones rectæ stellarum dentur, sed earum potius latitudines & longitudines: superficies globi in planum projicietur eodem prorsus, quo ante modo, nisi quod tum* D & E *sint poli eclipticæ,* fh *vero eclipticâ, circuli vero polares & tropici cum æquatore* lg *paralleli ex declinationibus suis determinentur. Recentissimi, qui in publicum prostant, Catalogi sunt* Hevelianus & Flamstædianus, *in quibus ascensiones rectæ & declinationes fixarum extant: unde consultum duximus docere, quomodo superficies globi ex ascensionibus rectis & declinationibus in planum projiciatur.*

PROBLEMA 38.

311. *Stellæ in globo depictæ declinationem & ascensionem rectam reperire.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur stella sub meridianum æneum, qui cum per polos æquatoris transeat (§. 48. 72), circulum declinationis repræsentat (§. 78).
2. Numerentur gradus a puncto meridiani, ubi ab æquatore secatur, usque ad stellæ datæ centrum: numerus enim graduum declinationem quæsitam exprimit (§. 76).
3. Notetur gradus æquatoris, qui una cum stella sub meridiano æneo comparet; is enim est ejus ascensio recta (§. 190).

PROBLEMA 39.

312. *Stellæ in globi superficie depictæ longitudinem & latitudinem reperire.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Centrum quadrantis latitudinis applicetur ad polum eclipticæ in eodem cum ſtella hemiſphærio conſtitutum & circa axiculum ſuum vertatur, donec centrum ſtellæ attingat.
2. Notetur gradus eclipticæ, cui quadrans inſiſtit: is enim eſt ſtellæ longitudo (§. 241).
3. Numerentur gradus in quadrante latitudinis ab ecliptica usque ad centrum ſtellæ, numerus eorum latitudinem indicabit (§. 236).

PROBLEMA 40.

313. *Dato loco Solis in ecliptica, invenire ejus declinationem & aſcenſionem rectam.*

RESOLUTIO.

1. Gradus eclipticæ datus ducatur ſub meridianum.
2. Reliqua fiant ut in probl. 38. (§. 311).

PROBLEMA 41.

314. *Data longitudine & latitudine planetæ ad datum quodcunque tempus, locum ejus in globi ſuperficie exhibere & ejus declinationem atque aſcenſionem rectam determinare.*

RESOLUTIO.

1. Centrum Quadrantis latitudinis applicetur ad polum eclipticæ latitudini cognominem & circa axiculum ſuum vertatur, donec datum longitudinis punctum in ecliptica deſignet.
2. Ad gradum latitudinis datum paucula cera affigatur ſignum planetæ (§. 38): ita nimirum planeta, perinde ac fixæ, in globo depictus (§. 310).
3. Tandem planeta ſub meridianum ducatur & aſcenſio recta atque declinatio patebit ut in probl. 38. (§. 311).

PROBLEMA 42.

315. *Invenire mediationem cœli ſeu graduum eclipticæ, cum quo ſtella aut planeta per meridianum tranſit.*

RESOLUTIO.

Ducatur ſtella aut planeta in globi ſuperficiem translatus (§. 314) ſub meridianum; ita nimirum innoteſcet gradus cum ea ſub meridiano conſtitutus.

PROBLEMA 43.

316. *Globum dato tempore & loco ad cæli ſitum componere, data elevatione poli & loco Solis.*

RESOLUTIO.

1. Polus globi ſupra horizontem ligneum elevetur. donec ar-

cus inter ipſum & hunc intercептus ſit elevationi poli datæ æqualis.

2. Ope acus magneticæ vel lineæ meridianæ globus ita conſtituatur, ut meridianus æneus ſit quam proxime in plano meridiani.

3. Gradus eclipticæ, in quo Sol hæret, ducatur ſub meridianum & index horarius ad horam duodecimam, ad quam computatus ſupponitur locus Solis: ita nimirum habetur cœli facies ad momentum meridiei.

4. Vertatur globus, donec index horarius datam quamcunque horam aliam attingat: ita nimirum innoteſcet cœli facies ad illud quoque momentum.

PROBLEMA 44.

317. *Beneficio globi ſtellas cognoſcere, ſi vel una tantum nobis fuerit nota.*

RESOLUTIO.

1. Componatur globus eo tempore, quo ſtellas contemplari decreveris, ad cœli ſitum (§. 316).

2. Quæratur in ejus ſuperficie ſtella, quæ tibi jam nota ſupponitur, e. gr. media in cauda urſæ majoris, cui inſidet Alcor.

3. Notentur in globo ſtellæ reliquis lucidiores ad eundem aſteriſmum pertinentes, nec difficulter eædem deprehendentur in cœlo.

4. Eodem modo innoteſcent ſtellæ minores ejusdem aſteriſmi, & aſteriſmo uno cognito vicinos quoque eodem ſtudio cognoſcere licebit.

5. Quodſi planetarum loca in ſuperficie globi deſignes (§. 314), adſpectus nudus docebit, inter quas fixas compareat: his ergo cognitis, planetæ quoque agnoſcuntur.

PROBLEMA 45.

318. *Data elevatione poli una cum loco Solis ad diem anni datum reperire aſcenſionem Solis obliquam, amplitudinem ejus ortivam & azimuthum, atque tempus ortus.*

RESOLUTIO.

1. Globus ad cœli ſitum, quem hora duodecima ſeu in ipſo meridie habet, componatur (§. 316).

2. Locus Solis ducatur ad horizontem ortivum; ita ſtatim innoteſcet aſcenſio Solis obliqua (§. 191), amplitudo ortiva (§. 195) & azimuthum (§. 194) in horizonte ligneo: index vero ho-

horarius in circulo horario momentum ortus Solis ostendet,

COROLLARIUM.

319. Sole in horizonte constituto, una innotescit, quænam stellæ eo die cosmice oriantur & occidant (§. 278).

PROBLEMA 46.

320. *Data elevatione poli una cum loco Solis invenire descensionem obliquam, amplitudinem occiduam & Azimuthum, atque tempus, quo Sol occidit.*

RESOLUTIO.

Non differt a resolutione problematis præcedentis, nisi quod locus Solis ducendus sit ad horizontem occiduum.

PROBLEMA 47.

321. *Data elevatione poli & loco Solis invenire longitudinem diei atque noctis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur tempus, quo Sol oritur (§.318): quod cum a media nocte numeretur, ejus duplum est longitudo noctis.
2. Longitudo noctis subtrahatur ex 24 horis; residuum est longitudo diei.

PROBLEMA 48.

322. *Invenire tempus, quo stella qualibet data die dato sub data elevatione poli oritur & occidit, una cum mora ejus super & sub horizonte, ascensione & descensione ejus obliqua, amplitudine ortiva atque occidua & Azimutho.*

RESOLUTIO.

1. Globus ad horam duodecimam diei datæ ad cœli faciem componatur (§.316).
2. Stella ad horizontem ortivum ducatur, ita in eodem apparebit ascensio ejus obliqua, amplitudo ortiva & azimuthum: index vero horarius monstrabit momentum, quo oritur.
3. Ducatur eadem stella ad horizontem occiduum, in quo apparebit descensio ejus obliqua, amplitudo occidua & azimuthum: index vero horarius ostendet momentum, quo occidit.
4. Momentum ortus a momento occasus subtrahatur: residuum erit mora stellæ super horizonte.
5. Mora super horizonte ex 24 horis subducatur; residuum erit mora stellæ sub horizonte. Cum enim differentia inter diem primi mobilis & diem solarem in scrupulis paucis consistat (§.211); ea hic attendi non meretur.

PRO-

PROBLEMA 49.

323. *Invenire punctum ecliptica, cum quo stella oritur, culminat & occidit, atque tempus culminationis.*

RESOLUTIO.

1. Globus ad cœli situm rite componatur (§. 316).
2. Stella data ducatur ad horizontem ortivum, ita patebit, cum quo puncto eclipticæ oriatur.
3. Eadem sistatur sub meridiano, ubi punctum eclipticæ cognoscetur, quod cum ea culminat, & index horarius tempus culminationis ostendet.
4. Aptetur denique horizonti occiduo, ubi innotescit punctum eclipticæ, cum quo occidit.

COROLLARIUM.

324. Quodsi ergo in ephemeridibus quæratur, vel per calculum in theoricis tradendum investigetur dies, quo Sol in dato gradu eclipticæ hæret, cum quo stella oritur, vel culminat, vel occidit; erit eadem dies, quo cosmice oritur (§. 278), vel cum Sole culminat (§. 133), vel acronyce occidit (§. 279).

PROBLEMA 50.

325. *Invenire altitudinem Solis atque stellæ ad datam quamcunque diei vel noctis horam.*

RESOLUTIO.

1. Globus rite componatur ad situm cœli (§. 316) & vertatur, donec index horarius horam datam indicet.
2. In gradu nonagesimo ab horizonte numerato ad meridianum aptetur quadrans altitudinis & circa axiculum suum vertatur, donec gradum eclipticæ, in quo Sol hæret, aut stellam datam attingat. Arcus enim inter ipsam & horizontem interceptus est altitudo quæsita (§. 73).

PROBLEMA 51.

326. *Data Solis altitudine diurna vel stellæ nocturna invenire temporis momentum.*

RESOLUTIO.

1. Globus ad situm cœli rite componatur, & quadrans altitudinis ut in problemate præcedente ad meridianum aptetur.
2. Globus circa axem suum & quadrans altitudinis circa axiculum vertatur, donec stella vel gradus eclipticæ, in quo Sol hæret, quadrantem in dato gradu attingat.

Index horarius tum temporis momentum quæsitum monstrabit.

PRO-

PROBLEMA 52.

317. *Dato azimutho Solis vel stellæ, invenire temporis momentum.*

RESOLUTIO.

1. Globus ad situm cœli rite componatur & quadrans altitudinis ut in probl. 50 ad meridianum aptetur.
2. Quadrans altitudinis vertatur circa axiculum suum, donec in horizonte azimuthum quæsitum definiat.
3. Vertatur globus, donec stella eundem attingat.

Index horarius temporis momentum indicabit.

PROBLEMA 53.

328. *Data elevatione poli, ostendere quænam stellæ nunquam occidant, & quænam nunquam oriantur.*

RESOLUTIO.

1. Globi polus elevetur supra horizontem ligneum tot gradibus, quot elevatio poli data existit.
2. Globus circumvolvatur & notentur stellæ, quæ in meridiano superiore bis conspiciuntur, & quæ in eo non comparent.

Illæ nimirum nunquam occidunt, hæ nunquam oriuntur.

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

PROBLEMA 54.

329. *Invenire intervallum temporis inter ortus duarum stellarum vel earum culminationes interceptum.*

RESOLUTIO.

1. Elevetur globi polus ut in problemate præcedente (§. 328).
2. Ducatur stella prima ad horizontem noteturque temporis momentum, quod monstrat index horarius.
3. Ducatur stella altera similiter ad horizontem & notetur denuo temporis momentum, quod index horarius ostendit.
4. Tempus prius subducatur e posteriori, quod relinquitur, est intervallum inter ortus duarum stellarum interceptum.
5. Non absimili modo reperitur tempus inter duas culminationes interjectum, si stella utraque sub meridiano sistatur.

THEOREMA 16.

330. *Profunditas* GO *puncti eclipticæ* G *est æqualis altitudini* go *puncti oppositi* g. Tab. IV. Fig. 38.

DEMONSTRATIO.

Quia horizon HR & verticalis ZN se mutuo bifariam secant (§. 85); erit OZo semicirculus. Similiter quia tam ecliptica EL (§. 171),

 quam

quam circulus verticalis ZN circulus maximus (§. 70); erit etiam GZg semicirculus (§. 20. *Sphæric.*). Est itaque OZ + Zg + go = GO + OZ + Zg (§. 86. *Arithm.*), consequenter go = GO (§. 91. *Arithm.*), hoc est, profunditas puncti eclipticæ G æqualis est altitudini oppositi g (§. 94). *Q. e. d.*

PROBLEMA 55.

331. *Dato arcu visionis, invenire ortum & occasum heliacum stellæ in globo depictæ.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur stella in horizontem ortivum.
2. Ope circuli verticalis ad meridianum in Zenith applicati exploretur gradus eclipticæ, cujus in parte cœli occidentali altitudo arcui visionis æqualis: erit punctum oppositum illud, in quo Sol hærere debet, ut stella heliace oriatur (330. 280).
3. Quodsi ergo in ephemeridibus evolvatur, aut per calculum theoricis innixum investigetur dies, quo Sol gradum eclipticæ inventum occupat; erit eadem dies, quo stella heliace oritur.
4. Si stella ad horizontem occiduum ducatur, simili modo dies invenietur, quo heliace occidit.

CAPUT VII.

DE

REFRACTIONE ET PARALLAXI FIXARUM.

OBSERVATIO 14.

332. *Distantia caudæ Leonis a spica Virginis 35° 2′ constanter deprehenditur (§. 225), quando meridiano vel etiam occasui proximæ: cum vero in parte cœli orientali cauda Leonis ad altitudinem 34° 30′ ascendit, spica virginis in eodem fere circulo verticali jam oritur* (k).

SCHO-

(k) Keplerus Epit. Astron. Copernic. lib. 1. part. 3. p. 61.

SCHOLION 1.

333. *Huc etiam pertinet observatio Batavorum in Nova Zembla* 1597. *hibernantium, quibus Sol d.* 4 *Novembris disparuit, die vero* 24 *Januarii redordiri cœpit, reditum suum consueto tunc calculo astronomico expectatum sex circiter diebus antevertens, ut habent Acta Eruditorum* A. 1697 (l). Carolus XI. Rex Sueciæ A. 1694. Tornoviæ *sub elevatione poli* 65° 33′ *media nocte inter* 14 & 15 *Junii styli veteris Solem inocciduum observavit. Ipsius jussu anno sequente* Bilembergio *atque* Spolio *Mathematicis observationem accuratius repetentibus & media nocte inter* 10 & 11 *Junii Solem* Tornoviæ ¼ *diametri, die* 14 *Junii sub latitudine* 66° 15′ *ad ferri cuprique officinas* Kangis *duabus diametris & amplius supra horizontem elevatum deprehendentibus* (m). *Equidem* Cassinus (n) *circa has observationes non satis accurate institutas difficultates quasdam movet, sed quæ non obstant, quo minus hic allegentur, ubi cum quantitate refractionis nihil nobis adhuc negotii est.*

COROLLARIUM 1.

334. Quoniam radii Solis atque stellarum secundum lineas rectas propagantur (§. 46. *Optic.*), a sidere sub horizonte latente emissi in oculum spectatoris illabi nequeunt, nisi in ingressu in atmosphæram a via pristina detorqueantur. Patet adeo eos in transitu per atmosphæram refringi (§. 39. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

335. Cum adeo stellæ propter refractionem altiori loco appareant; altitudines observatæ veris per calculum productis sunt justo majores.

COROLLARIUM 3.

336. Ut ergo altitudines observatæ magis exacte prodeant refractionis quantitas inde auferenda.

SCHOLION 2.

337. *Quoniam veteres refractionem ignorarunt; ex altitudinibus justo majoribus sua deduxerunt: unde non mirum, quod errores non levis momenti interdum commiserint.*

SCHOLION 3.

338. *Cæterum ex hac ipsa refractionum doctrina consequitur, nos nunquam videre Solem orientem & occidentem, sed Solis sub horizonte latentis phantasma quodpiam. Patebit hoc clarius, ubi non minus diameter Solis apparens quam refractio horizontalis accurate fuerit definita.*

SCHOLION 4.

339. *Ipsæ vero observationes modo recensitæ loquuntur, refractiones versus* po-

(l) Menf. Febr. p. 92.
(m) Vid. Opusculum, quod sub titulo: Refractio Solis inoccidui in septentrionalibus oris aliquot observationibus Astronomicis detecta, Holmiæ 1696. in 4. prodiit.
(n) Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences A. 1700. p. 50 & seqq.

polum esse majores, quam sub minore ejus elevatione, ob diversam dubio procul atmosphæræ densitatem & incidentiæ obliquitatem (§. 36. Dioptr.).

OBSERVATIO 15.

340. *Cel.* de la Hire (o) *ab anno 1681. summa sedulitate ac diligentia ad meridianam stellarum fixarum altitudinem observandam se incubuisse profitetur, nullamque differentiam altitudinis animadvertisse præter eam, quæ ex proprio fixarum motu oritur: non tamen negat, refractiones circa horizontem esse quibusdam inconstantiis obnoxias pro varia aëris constitutione & natura soli circumpositi.*

COROLLARIUM.

341. In eodem adeo loco refractiones siderum ad sensum sunt constantes, horizontalibus exceptis.

THEOREMA 17.

Tab. IV. Fig. 39. 342. *Radii ex stella altiore* S *in atmosphæram incidentis inclinatio* SMN *minor est inclinatione* IHT *radii ex stella humiliore* T *in eandem illapsi.*

DEMONSTRATIO.

Sint radii incidentes OS & OT. Ducantur per puncta atmosphæræ M & H ex centro telluris C radii CM & CH, qui erunt ad arcum MH perpendiculares (§. 38. *Anal. infin.*). Sunt adeo NMS & IHT anguli inclinationum (§. 12 *Dioptr.*). Producatur SO in R & ex centro C demittatur perpendicularis CR. Supponatur etiam HO perpendicularis ad CO (§. 308. *Geom.*). Erit adeo ut sinus totus ad CH ita sinus OHC ad OC & ut sinus totus ad CM sive CH (§. 40. *Geom.*) ita sinus RMC ad RC (§. 33. *Trig.*), consequenter Sinus OHC ad OC ut sinus RMC ad RC (§ 167. *Arithm.*), hoc est, sinus OHC ad sinum RMC ut OC ad RC (§. 173. *Arithm.*). Quare cum sit OC > RC (§ 220. *Geom.*), erit etiam OHC > OMC, consequenter ob OHC = IHT & OMC = NMS (§. 156. *Geom.*) IHT > NMS (§. 89. *Arithm.*), seu angulus inclinationis in qualibet altitudine major horizontali. Ponamus jam porro radium incidentem esse LO. Cum sit ut CO ad CM ita sinus ZOM ad sinum OMC & ut CO ad CL ita sinus ZOL ad sinum OLC (§. 35. *Trigon.*); erit ob CM = CL (§ 40. *Geom.*) sinus ZOM ad sinum OMC ut sinus ZOL ad sinum OLC (§. 167. *Arithm.*), consequenter sinus incli-

(o) in Tab. Astronom. p. 5.

inclinationum OMC & OLC erunt inter se ut sinus distantiarum a vertice ZOM & ZOL (§. 173. *Arithm.*). Quando igitur distantia a vertice ZOL < ZOM; etiam angulus inclinationis OLC < OMC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

343. Cum linea OH supponatur in plano horizontis sensibilis, patet inclinationem radii horizontalis esse omnium maximam.

THEOREMA 18.

344. ***Stellæ in Zenith refractio nulla est, in horizonte maxima, ab horizonte usque ad Zenith continuo decrescit.***

DEMONSTRATIO.

Si stella in Zenith constituta, radius, qui ex eo in atmosphæram incidit, continuatus per centrum Telluris transit (§. 58). Est ergo ad atmosphæræ superficiem seu planum refringens perpendicularis (§. 38. *Analys. infinit.*), consequenter irrefractus transit (§. 25. *Dioptr.*). *Quod erat primum.*

Tab. IV. Fig. 39. Porro ut sinus anguli inclinationis THI ad sinum refracti ipsi respondentis, ita sinus anguli inclinationis NMS ad sinum refracti eidem convenientis (§. 26 *Dioptr.*), adeoque sinus angulorum refractorum sunt inter se ut sinus angulorum inclinationis (§. 173. *Arithm.*). Sed sinus anguli inclinationis in horizonte maximus (§. 343): ergo sinus anguli refracti ibidem quoque maximus, hoc est, refractio in horizonte maxima. *Quod erat secundum.*

Denique sideris altioris angulus inclinationis minor quam humilioris (§. 342): ergo etiam angulus refractus sideris altioris minor est quam humilioris *per demonstrata.* Patet adeo ab horizonte usque ad Zenith continuo decrescere refractionem. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 19.

345. *In eadem altitudine Sol & stellæ omnes eandem patiuntur refractionem.*

DEMONSTRATIO.

Si sidera eandem altitudinem habent, idem erit radius incidens, adeoque & idem angulus inclinationis (§. 12. *Dioptr.*). Sunt vero sinus angulorum refractorum ut sinus angulorum inclinationis (§. 26. *Dioptr.* & §. 173. *Arithm.*), adeoque ob angulum inclinationis eundem idem quoque refractus. Ergo in eadem altitudine Sol & stellæ per eundem radium refractum radiant, seu eandem patiuntur refractionem. *Q. e. d.*

SCHOLION.

346. *Equidem* Tycho de Brahe (p), *qui primus Solis, Lunæ ac fixarum refractiones per observationem eruit, refractiones fixarum minores facit solaribus, lunares subinde majores, subinde minores; sed ejus ævo theoria refractionum, quam* Snellio *debemus* (§. 34. Dioptric.), *nondum erat explorata. Recentiores vero ut* Cassinus & Philippus de la Hire *eandem refractionem in omnibus agnoscunt, experientia consentiente.*

PROBLEMA 56.

347. *Refractionem siderum ad singulos gradus altitudinis definire.*

RESOLUTIO.

1. Observetur stellæ prope Zenith constitutæ altitudo meridiana, quantum fieri potest, accuratissime (§. 109. 142).
2. Inde eruatur declinatio ejus (§. 150), quæ erit accurata, quia stella a refractione sensibili libera (§. 344).
3. Ejusdem stellæ observentur altitudines ad singulos gradus, & ope horologii oscillatorii annotetur tempus, quo eædem observantur.
4. Ad data observationum momenta ope declinationis extra refractionis aleam positæ & *per num.* 1. repertæ computentur altitudines veræ: (§. 300): quæ cum
5. minores deprehendantur observatis, ab his auferantur; erunt residua refractiones singulis gradibus convenientes.

SCHOLION.

348. *Equidem refractiones ea, quam exposuimus, methodo omnium optime ex observationibus eliciuntur; patet tamen aliunde, id fieri non posse nisi quamdiu refractiones sunt sensibiles, ne errorem in observando vix evitabilem adæquent, consequenter si altitudo infra 50 gradus constituatur, refractione in gradu quinquagesimo secundo non amplius scrupulum primum adæquante. Quodsi atmosphæra ejusdem esset densitatis, ut refractio non contingeret nisi in ingressu, ac præterea nota ratio sinus anguli inclinationis ad refractum in aëre, una cum ratione altitudinis aëris refractivi ad semidiametrum Terræ, ut angulus inclinationis definiri posset; facile per calculum conderetur tabula refractionum ad singulos gradus altitudinis* (§. Dioptr. 30). *Enimvero cum constet atmosphæram nostram esse diversæ densitatis* (§. 145. Aërom.), *atque adeo continua refractione radium luminis fieri curvilineum, nec ratio altitudinis aëris refractivi ad semidiametrum Telluris explorata sit: ad hypothesin confugiendum erat, quam non invitis observationibus hypothesi naturæ substituere*

(p) Progymnasm. lib. 1. p. m. 79. 124. 280.

tuere liceret. Hujusmodi hypothesin excogitavit Cassinus *usu Academiæ Regiæ scientiarum comprobatam* (q). *Describit eam* David Gregorius (r) *his verbis:* „ Atmosphæra 40 aut 50 » milliaria in altum protensa sup- » ponatur, divisa per 8 aut 10 su- » perficies parallelas in totidem me- » dia diversæ densitatis; ita tamen ut » quod binas proximas superficies » interjacet medium ejusdem sit » densitatis, quæ ad dictam superfi- » ciem mutetur instanter in rarius » sursum densiusque deorsum : » quod res revera nno ita se ha- » beat (procul dubio enim atmo- » sphæræ densitas descendendo per » minima augetur), sed ad calculum » ineundum. Octo decemve hæc » media ita attentando attemperen- » tur ad se invicem, ut in una, dua- » bus aut pluribus altitudinibus to- » tales refractiones ad omnia ista » media factæ eædem sint cum re- » fractionibus, quæ per observatio- » nes exactissimas altitudinibus istis » respectivis congruere deprehen- » duntur. In quo casu refractio in » assumta qualibet altitudine ad dicta » media facta & per Dioptrices le- » ges calculo cognita, quam pro- » xime est æqualis refractioni ex cœ- » lo depromtæ, quæ eidem altitudini » respondet.

OBSERVATIO 16.

349. *Ex observationibus accuratissimis* Philippus de la Hire (s) *sequentem siderum in singulis altitudinum gradibus refractiones deduxit.*

Alt.	Refract.		Alt.	Refract.		Alt.	Refract.	
0	32'	0''						
1	26	35	31	1'	51''	61	0'	40''
2	20	43	32	1	47	62		39
3	15	44	33	1	43	63		37
4	12	26	34	1	40	64		35
5	10	26	35	1	36	65		33
6	9	8	36	1	33	66		32
7	8	2	37	1	30	67		31
8	7	1	38	1	27	68		30
9	6	17	39	1	24	69		28
10	5	41	40	1	22	70		26
11	5	11	41	1	19	71		25
12	4	46	42	1	17	72		24
13	4	25	43	1	15	73		23
14	4	7	44	1	13	74		21
15	3	51	45	1	11	75		20
16	3	26	46	1	9	76		18
17	3	23	47	1	7	77		17
18	3	12	48	1	6	78		15
19	3	1	49	1	4	79		14
20	2	51	50	1	2	80		12
21	2	44	51	1	0	81		11
22	2	38	52	0	58	82		10
23	2	31	53		56	83		8
24	2	24	54		54	84		7
25	2	18	55		52	55		6
26	2	12	56		50	86		4
27	2	7	57		48	87		3
28	2	3	58		46	88		2
29	1	59	59		44	89		1
30	1	55	60		42	50		0

SCHO-

(q) Vid. ejus historiam de ortu & progressu atque incrementis Astronomiæ, quæ legitur in opere: Recueil d' observations faites en plusieurs voyages par ordre de sa Majeste &c.

(r) in Elem. Astron. Phys. & geometr. lib. 2. schol. prop. 66. fol. m. 201.

(s) in Tab. Astron. p. 6.

SCHOLION 1.

350. *Equidem* Tycho de Brahe (t) *refractiones Solis in gradu* 46, *lunares in gradu* 45, *fixarum in* 20, *evanescere arbitratur: sed celeberrimus* Cassinus *primus reperit, quod ad ipsum Zenith usque extendantur.* Tycho *nimirum refractiones exhibuit justo minores, utut horizontalis sit apud eundem justo major: facit enim horizontalem in Sole* 34′, *in Luna* 33′, *in fixis* 30′; *sed* de la Hire *cum* Cassino *in omni sidere* 32: Tychoni *in gradu* 35 *solaris est* 55″, Cassino *vero* 1′ 43″ *& in gradu* 52 *adhuc* 58″. *Hoc discrimen ex tabula præcedente satis manifestum est.*

SCHOLION 2.

351. R. P. Laval (u) *observavit* A. 1710 *d.* 22 *Jun. altitudinem Solis meridianam* 70° 25′ 50″ *& d.* 23 *Jun.* 36 *a Solstitio horis elapsis eandem deprehendit* 70° 26′ 0″, *adeoque* 10″ *majorem, quæ minor esse debebat. In similes observationes cum jam antea inciderit, suspicatur refractionem variari pro diversitate ventorum ex diversis plagis spirantium. Enimvero ad tales minutias, quæ nondum satis exploratæ habentur, in præsenti nobis attendere non licet: id nobis annotasse sufficiat, dudum ab* Hugenio *observatum esse* (x) *refractionem in singulas horas mutari, quamvis experimenta sumta sint in exigua admodum altitudine & in objectis terrestribus.*

THEOREMA 20.

352. ***Refractio ascensionem rectam & obliquam sideris minuit, descensiones auget; declinationem borealem auget, australem minuit.***

DEMONSTRATIO.

Ascensio obliqua est punctum æquatoris cum sidere oriens (§. 190). Sed cum stella vi refractionis elevata in horizonte compareat, sub eodem adhuc latet (§. 343), adeoque punctum æquatoris cum quo revera oritur, adhuc sub horizonte absconditur: ergo ascensionem obliquam minuit refractio. *Quod erat primum.*

Sit stella supra horizontem elevata in S vel T; vi refractionis videbitur in *s* vel in *t* (§. 341). Ducantur ex polo P circuli declinationum PD, P*d*, PH, P*h* & qui erunt ad æquatorem in D & *d*, H & *h* perpendiculares (§. 76), definientque stellæ S ascensionem rectam veram in D, refractam in *d*, stellæ autem T veram in H, refractam in *h* (§. 190). Quare cum punctum *d* sit meridiano vicinius quam D, & *h* vicinius quam H; evidens est per refractionem ascensionem rectam minui. *Quod erat secundum.* Tab. IV. Fig. 40.

Non

(t) Progymnasm. lib. 1. p. 79. 124 280.
(u) Histoire de l'Acad. Roy. des Sciences A. 1710. p. m. 144 & 145.
(x) Traité de la lumiere c. 4. p. 42.

Non absimili modo ostenditur, si HZR sumatur pro parte cœli occidentali, descensiones per refractionem augeri. *Quod erat tertium.*

Porro in triangulis SGD & *fGd* ad D & *d* rectangulis *per demonstrata* est ut sinus totus ad sinum SG ita sinus G ad sinum SD & ut sinus totus ad sinum *f*G ita sinus G ad sinum *fd* (§.136. *Sphæric.*): ergo etiam ut sinus SG ad sinum *f*G ita sinus SD ad sinum *fd* (§.196. *Arithm.*). Quare cum sit *f*G > SG; erit etiam *fd* > SD. *Quod erat quartum.*

Eodem prorsus modo demonstratur, esse *th* < TH. *Quod erat quintum.*

THEOREMA 21.

353. *Refractio in parte cœli orientali longitudinem sideris minuit, in occidentali auget; latitudinem australem minuit, borealem auget.*

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 40. Si AQ ponatur ecliptica & PD, P*d*, PH atque P*h* sint circuli latitudinum: demonstratio theorematis præsentis prorsus coincidit cum demonstratione præcedentis.

SCHOLION.

354. *Apparet adeo, in Astronomia non negligendam esse refractionem, siquidem motuum phænomena accurate determinare volueris: atque hinc ulterius liquet, Astronomiam veterem, quæ refractionem insuper habuit, fuisse vel ex hoc capite ubique imperfectam.*

(Wolfii Math. Tom. 3.)

DEFINITIO 69.

355. *Refractio altitudinis* est arcus circuli verticalis S*f*, quo altitudo sideris SE ob refractionem augetur. Tab. IV. Fig. 40.

DEFINITIO 70.

356. *Refractio declinationis* est arcus circuli declinationis *f*I, quo declinatio sideris DS vi refractionis vel augetur, vel minuitur.

DEFINITIO 71.

357. *Refractio ascensionis ac descensionis* est arcus æquatoris D*d*, que ascensio D & descensio sideris sive recta, sive obliqua vi refractionis augetur, vel minuitur.

DEFINITIO 72.

358. *Refractio longitudinis* est arcus eclipticæ T*t*, quo longitudo sideris vi refractionis vel augetur, vel minuitur. Tab. IV. Fig. 41.

DEFINITIO 73.

359. *Refractio latitudinis* est arcus circuli latitudinis *f*I, quo latitudo sideris TS vi refractionis vel augetur vel minuitur.

PROBLEMA 57.

Tab. IV. Fig. 40. 360. *Data altitudine sideris refracta* ſE *una cum tempore, quo observatur, & refractione altitudinis* ſS, *invenire refractionem declinationis* SI *& ascensionis rectæ* Dd.

RESOLUTIO.

1. Tempus usque ad meridiem vel mediam noctem residuum, aut a meridie vel media nocte elapsum convertatur in gradus æquatoris (§. 212), ut habeatur arcus Ad, consequenter angulus ad polum APd (§. 79. *Astron.* & §. 31. *Sphær.*).

2. Quoniam in triangulo ZPſ dantur præter hunc angulum latera PZ & ſZ elevationis poli PR & altitudinis refractæ ſE complementa (§. 62); invenietur angulus ZſP (§. 165. *Sphær.*), cui verticalis IſS æqualis (§. 43. *Sphær.*).

3. Ex S demittatur perpendicularis SI & in triangulo SIſ ad I rectangulo ex datis angulo IſS modo invento & hypothenusa Sſ, refractione altitudinis, inveniatur latus ſI (§. 127. *Sphær.*), refractio declinationis (§. 356), & latus IS (§. 116. *Sphæric.*), quod refractioni ascensionis rectæ Dd ad sensum æquale, si stellæ declinatio exigua.

4. Quodsi vero declinatio DS fuerit ingens, ex datis in triangulo PSI ad I rectangulo lateribus IS & PI aggregato ex complemento declinationis refractæ Pſ & refractione declinationis Iſ invenitur angulus ad polum IPS (§. 127. *Sphæric.*), cujus mensura Dd (§. 79. *Astron.* & §. 31. *Sphær.*) est refractio ascensionis rectæ (§. 357).

PROBLEMA 58.

361. *Datis elevatione æquatoris, longitudine Solis ad datum observationis tempus, angulo obliquitatis eclipticæ, altitudine refracta* ſE, *longitudine refracta sideris* t *& refractione altitudinis* ſS, *invenire refractionem latitudinis* ſI *& longitudinis* T t. Tab. IV. Fig. 41.

RESOLUTIO.

1. Ex datis elevatione æquatoris, longitudine Solis & angulo obliquitatis eclipticæ investigetur nonagesimus eclipticæ C (§. 218): verticalis ZC per eum transiens transibit quoque per polum eclipticæ M (§. 221).

2. Ducantur ex polo eclipticæ M per locum sideris verum S & refractum ſ circuli latitudinum MT & Mt: evidens est refra-

ctio-

ctionem latitudinis ∫I & longitudinis T*t* inveniri ope triangulorum SI∫& MSI ad I rectangulorum, prorsus ut in problemate præcedente (§. 360).

SCHOLION.

362. *Ex duobus problematibus præcedentibus facile intelligitur, quomodo ex ascensione recta, declinatione, longitudine & latitudine vera datis, earundem refractiones inveniantur.*

DEFINITIO 74.

Tab. IV. Fig. 42. 363. *Locus physicus sideris* est punctum S, in quo centrum ejus hæret.

DEFINITIO 75.

364. *Locus opticus* est punctum in superficie sphæræ mundanæ C vel B, quo spectator ex E vel T sideris centrum S refert.

DEFINITIO 76.

Tab. IV. Fig. 42. 365. *Locus opticus verus* est punctum superficiei sphæræ mundanæ B, quo spectator in centro terræ constitutus centrum sideris aut phænomeni S refert.

DEFINITIO 77.

366. *Locus opticus apparens* seu *visus* est punctum superficiei sphæræ mundanæ C, quo spectator in superficie terræ E constitutus sideris centrum S refert.

DEFINITIO 78.

367. *Parallaxis* est distantia duorum locorum opticorum. Et in specie *parallaxis altitudinis* est differentia inter locum verum & apparentem CB. Dicitur etiam *Parallaxis* simpliciter, & *Commutatio* a *Copernico*.

COROLLARIUM I.

368. Parallaxis adeo altitudinem sideris minuit, distantiam a vertice auget.

COROLLARIUM 2.

369. Parallaxis altitudinis CB est differentia inter distantiam a Zenith A veram AB & visam AC.

DEFINITIO 79.

370. *Angulus parallacticus* est differentia angulorum CEA & BTA, sub quibus distantiæ a Zenith vera & visa videntur. Vocatur & ipse subinde *Parallaxis*.

THEOREMA 22.

371. *Angulus parallacticus est æqualis angulo* TSE, *quem rectæ ex oculis observatorum* E *&* T *in centrum sideris* S *ductæ intercipiunt.* Tab. IV. Fig. 42.

DEMONSTRATIO.

Est enim SED angulus, sub quo videtur distantia visa CA, STD angulus, sub quo videtur vera BA.

 Sed

Sed SED = STD + TSE (§. 239. *Geom.*). Ergo TSE est differentia angulorm SED & STD (§. 64. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 23.

372. *Parallaxis ascensionem rectam & obliquam auget, descensionem minuit: declinationem & latitidinem borealem minuit, australem auget; longitudinem in orientali auget, in occidentali minuit.*

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 40. Si *ſ* & *t* sint loca sideris vera, S & T visa; demonstratio prorsus eadem, quæ theorematis 20. (§. 352).

COROLLARIUM.

373. Parallaxis adeo refractioni prorsus contraria (§. 352. 353).

DEFINITIO 80.

Tab. IV. Fig. 40. 374. *Parallaxis declinationis* est arcus circuli declinationis *ſ*I, quo parallaxis altitudinis auget vel minuit declinationem sideris.

DEFINITIO 81.

375. *Parallaxis ascensionis & descensionis* est arcus æquatoris D*d*, quo parallaxis altitudinis auget ascensionem, minuit descensionem.

DEFINITIO 82.

376. *Parallaxis longitudinis* est arcus eclipticæ T*t*, quo parallaxis altitudinis auget vel minuit longitudinem. Tab. IV. Fig. 41.

DEFINITIO 83.

377. *Parallaxis latitudinis* est arcus circuli latitudinis *ſ*I, quo parallaxis altitudinis auget vel minuit latitudinem.

THEOREMA 24.

378. *Parallaxis in Zenith nulla, in horizonte maxima.*

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ theorematis 18. (§. 344), pro angulis nempe inclinationum substitutis angulis parallacticis.

THEOREMA 25.

379. *Sinus angulorum parallacticorum* ALT & AST *in eadem vel æqualibus a Zenith distantiis* SZ *sunt in ratione reciproca distantiarum siderum a centro terræ* TL & TS. Tab. IV. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut sinus LST ad TL ita sinus TLA ad TS (§. 35. *Trigon.*). Ergo sinus angulorum TLA & TSA sunti ut TS ad TL (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

380. Cum LT < TS *per hypoth.* erit etiam angulus AST < ALT, adeoque parallaxis remotioris S minor

nor est parallaxi vicinioris L in eadem a Zenith distantia: quod etiam aliunde patet (§. 188. *Geom.*).

THEOREMA 26.

381. *Sinus angulorum parallacticorum* M & S *siderum a centro terræ* T *æqualiter distantium sunt ut sinus distantiarum visarum a vertice* ZM & ZS.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut sinus ZAM ad TM ita sinus M ad AT & ut TS ad sinum ZAS ita AT ad sinum S (§. 35. *Trigon.*). Ergo ob TM=TS *per hypoth.* Sinus M ad sinum S ut sinus ZAM ad sinum ZAS (§. 194. *Arithm.*) *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

382. Decrescentibus adeo distantiis a vertice; hoc est, crescentibus altitudinibus, parallaxis decrescit.

COROLLARIUM 2.

383. Parallaxis ab horizonte usque ad Zenith altitudinem sideris afficit.

THEOREMA 27.

384. *Stellæ fixæ carent parallaxi altitudinis sensibili.*

DEMONSTRATIO.

Est enim semidiameter telluris AT ad distantiam fixæ TS ut sinus anguli parallactici S ad sinum distantiæ a vertice ZAS (§. 33. *Trigon.*). Sed AT respectu TS evanescit (§.146): ergo etiam sinus S respectu sinus ZAS, consequenter parallaxis altitudinis respectu distantiæ a vertice in fixis evanescit (§.370). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

385. Refractiones adeo ex fixarum observationibus erutæ (§. 348) sunt differentiæ inter altitudines siderum veras & refractas, neque adeo verendum, quod ob parallaxin fixarum sint justo majores.

THEOREMA 28.

386. *Parallaxis horizontalis eadem, sive sidus in horizonte vero, sive in apparente fuerit constitutum, & ubivis locorum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sidus in horizonte vero TS constitutum non poterit videri in H, sed in loco altiori O, cujus horizon apparens OS convenit oculo non elevato in I. Cum igitur in triangulis TIS & THR anguli I & H sint recti (§.308.*Geom.*) & TH = TI atque TS=TR (§. 40. *Geom.*); erit HRT = TSI (§. 179. *Geom.*). *Q.e.d.* Tab. IV. Fig. 44.

PROBLEMA 59.

387. *Data distantia sideris in horizonte constituti a centro terræ TR seu ejus ad semidiametrum tel-*

luris TH *ratione, invenire ejus parallaxin.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam in triangulo THR ad H rectangulo dantur latera TH & TR; reperietur angulus parallacticus (40. *Trig.*).

PROBLEMA 60.

Tab. IV. Fig. 43. 388. *Data ratione distantiæ sideris a centro terræ* TM *ad semidiametrum terræ* TA, *una cum distantia vera a vertice* ZTM, *invenire parallaxin altitudinis.*

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo ATM dantur duo latera TA & TM cum angulo intercepto T; reperietur angulus parallacticus M (§. 40. *Trigon.*).

COROLLARIUM.

389. Quodsi detur distantia visa a vertice ZAM, reperietur M (§. 38. *Trigon.*).

PROBLEMA 61.

390. *Invenire parallaxin declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis, data elevatione poli & parallaxi altitudinis una cum altitudine visa a refractione liberata & tempore, quo hæc fuit observata.*

RESOLUTIO.

Non differt a resolutionibus problematum 57 & 58 (§. 360. 361).

PROBLEMA 62.

391. *Datis nonagesimo ecliptica* C, *altitudine nonagesimi* CO, *altitudine vera* ſE, *parallaxi altitudinis* ſS, *longitudine vera* t *&* *latitudine vera* tſ, *invenire parallaxin longitudinis* Tt *&* *latitudinis* Iſ. Tab. IV. Fig. 41.

RESOLUTIO.

1. Cum detur longitudo vera *t* & nonagesimus C; datur quoque arcus C*t*, consequenter angulus ad polum eclipticæ CM*t* (§. 240. *Astron.* & §. 33. *Sphær.*).
2. Quia altitudo nonagesimi CO continuata ultra Zenith Z per polum eclipticæ M transit (§. 221), & MC=ZO (§ 62. 240), erit ZM=CO (§. 91. *Arithm.*).
3. Cum adeo in triangulo MZſ præter MZ & M detur Zſ altitudinis veræ complementum (§. 62): reperietur ZſM (§. 158. *Sphær.*), cui IſS æqualis (§. 43. *Sphær.*). Unde
4. reliqua inveniuntur ut supra problem. 57. (§. 360).

SCHO-

SCHOLION.

392. *Parallaxium doctrina maximi momenti est in Astronomia tum ad distantias siderum aliorumque phænomenorum inveniendas, tum ad eclipses computandas: quemadmodum ex parte altera patebit, ubi suis locis plura ad parallaxin spectantia tradentur, quæ facilius & jucundius intelliguntur, ubi ad casus speciales, quorum gratia excogitati fuere, modi inveniendi parallaxin applicantur.*

CAPUT VIII.

DE

CREPUSCULIS.

DEFINITIO 84.

393. ***Crepusculum*** est lux crepera, qua aër ante ortum & post occasum Solis resplendet. ***Matutinum*** vocatur illud, quod ortum Solis præcedit; ***Vespertinum***, quod occasum ejus sequitur. Illud etiam ***Aurora***: hoc ***Crepusculum κατ' ἐξοχὴν dici solet.***

COROLLARIUM.

394. Crepusculi adeo matutini initium est, quando aër primum splendescere incipit; vespertini finis est, quando splendor ejus prorsus disparet.

THEOREMA 29.

395. ***Crepuscula generantur a radiis solaribus in atmosphæra nostra refractis & ab ejus particulis reflexis.***

DEMONSTRATIO.

Sit observator in O, horizon sensibilis AB, Sol sub horizonte vero HR constitutus. Incidat radius SE in atmosphæram infra horizontem: quoniam in aëre refrangitur, tanquam medio crassiori (§. 334), & quidem ad perpendiculum (. 25. *Dioptr.*), hoc est, ad semidiametrum CE (§. 38. *Anal. infinit.*), non progredietur in T, sed tellurem in D tangens incidet in A, horizontem ortivum sensibilem. Neque enim alius radius, quam AD, qui tellurem tangit, ex refractis in E ad A pervenire potest, cum ceterorum propagationi Terra obstet. Jam cum particulæ atmosphæricæ radios solares reflectant (§. 45. 51. *Optic.*), sitque ob CD = CO (§. 40. *Geom.*) & rectos ad D & O *per demonstrata* (§. 309. *Geom.*) angulus DAC ipsi CAO æqualis (235. *Geom.*); Tab. IV. Fig. 45.

radius

radius in A reflexus perveniet in O (§. 144. *Catoptr.*). Quare cum ibi sit observator, *per hypoth.* videbit particulam A in horizonte sensibili splendescentem, adeoque crepusculi matutini initium (§. 394). Eodem modo ostenditur per radiorum solarium in atmosphæra factam refractionem & reflexionem contingere vespertini finem. *Q. e. d.*

SCHOLION.

396. *Aliam adhuc crepusculorum causam assignat* Keplerus (y), *materiam nempe lucidam circa Solem, quæ auroram figura circulari versus horizontem incurvata enitentem exhibet, aëri illuminato non adscribenda, prout ibidem demonstrat. Materia illa lucida cum sit atmosphæra Solis, de ea agemus ex instituto suo loco.*

PROBLEMA 63.

397. *Invenire profunditatem Solis sub initium crepusculi matutini & finem vespertini.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo reperitur, quo supra arcum visionis invenire docuimus (§. 286), observato nimirum momento, quo aër primum splendescit in crepusculo matutino; itemque momento, quo splendor omnis evanescit in vespertino. Quoniam vero hæc observatio difficilis nec satis certa est; notetur momentum temporis, quo mane stellæ sextæ magnitudinis visui nostro sese subducunt, vel vespere primum in conspectum veniunt.

OBSERVATIO 16.

398. *Profunditatem Solis sub horizonte ad initium crepusculi matutini finemque vespertini observarunt* Alhazen 19°, Tycho 17°, Rothmannus 24°, Stevinus 18°, Cassinus 15°; Ricciolus *in æquinoctiis mane* 16°, *vespere* 20° 30′; *in solstitio æstivo mane* 21° 25′, *in hiberno mane* 17° 25′.

SCHOLION.

399. *Non mirum, quod Autores adeo inter se dissentiant. Est enim causa crepusculorum inconstans: halitus quippe si fuerint in atmosphæra vel copiosiores, vel altiores, crepusculum matutinum citius incipit, vespertinum longius durat. Halitus nimirum copiosiores cum plures radios reflectant, magis splendescunt; altiores vero citius a Sole illustrantur: quæ sane ratio est, cur crepusculi matutini duratio sit vespertini brevior, cum ob frigus nocturnum mane densior sit & humilior aër halitibus plenus; & cur æstate crepuscula longiora quam hieme, cum hieme frigore magis condensatus humi-*

(y) Epit. Astron. Copernic. lib. 1, part. 3, p. 73. 76.

humilior fiat. Accedit, quod in aëre densiore major sit refractio, & atmosphæræ solaris splendor cum in se variabilis, tum telluri alio tempore proximior quam alio.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 14. 400. Quando itaque differentia GR inter declinationem Solis GQ & altitudinem seu profunditatem æquatoris QR est minor 18°, sane 15° non excedit; crepusculum per integram noctem durat.

PROBLEMA 64.

401. ***Data elevatione æquatoris, determinare tempus, quo crepusculum per noctem integram duret.***

RESOLUTIO.

1. Ab elevatione æquatoris subtrahantur 18°, relinquetur declinatio Solis maxima, quæ esse potest, quando crepusculum per noctem integram durat (§. 400).
2. In tabulis declinationum Solis evolvantur puncta eclipticæ, quorum ista est declinatio.
3. Denique ex ephemeridibus quærantur dies, quando Sol puncta ista ingreditur.

Ita nimirum constabit omne temporis intervallum, quo crepusculum per noctem integram durat.

(*Wolfii Math. Tom. 3.*)

E. gr. Halæ altitudo æquatoris 38° 22′: unde si auferantur 18°, relinquetur declinatio Solis quæsita 20° 22′. Juxta Tabulas *Philippi de la Hire* declinatio Solis est 20° 22′ 49″ in 1° ♊ & 29° ♋. Hoc anno Sol ingressus 1° ♊ d. 21 Maji; erit in 29 ♋ d. 21 Julii. A die itaque 21 Maji usque ad 21 Julii crepusculum per integram noctem durat.

PROBLEMA 65.

402. ***Data elevatione poli PR & declinatione Solis OS, invenire initium crepusculi matutini & finem vespertini.*** Tab. III. Fig. 32.

RESOLUTIO.

1. Cum in triangulo PSZ dentur singula latera, nempe PZ elevationis poli PR & PS declinationis OS complementum atque ZS aggregatum ex quadrante ZD & profunditate Solis DS per observationem nota (§. 398); reperietur angulus ZPS (§. 168. *Sphær.*), cujus mensura est arcus AO (§. 33. *Sphær.*).
2. Convertatur AO in tempus solare (§. 212.), ita prodibit tempus ab initio crepusculi matutini usque ad meridiem vel tempus a meridie usque ad finem vespertini elapsum.

E. gr. Halæ elevatio poli PR 51° 38′: quæritur initium crepusculi matutini Sole in 4° ♍ existente. Est itaque

SO 10° 3′ 37″ & DS 18° (§. 398); hinc ZS 108° & ½ ZS 54°

PS	79°	56′	23″
PZ	38	22	0
PS + PZ	118	18	23
½PS+½PZ	59	9	11½
PS	79°	56′	23″
PZ	38	22	0
PS − PZ	41	34	23
½PS − PZ½	20	47	11½

Quoniam anguli Z & S sunt acuti, perpendiculum PI intra triangulum PZS cadit (§. 82: *Sphæric.*) & quia PS > PZ, etiam SI > IZ (§. 138. *Sphær.* & §. 299. *Arithm.*). Est itaque (§. 168. *Sphær.*)

Log. Tang. ½ ZS	101387389
Tang. ½ PS + ½ PZ	102238603
Tang. ½ PS − ½ PZ	95793208
Summa	198031911
Tang. ½ SI − ½ ZI	96644522,

cui in tabulis quam proxime respondent

	24°	47′	4″
Sed ½ ZS	54		
Ergo IS	78	47	4
IZ	29	12	56

Porro Log. Sin. ZI	96885057
Sin. tot.	100000000
Summa	196885057
Sin. ZP	97928759
Sin. ZPI	98956298, cui

in tabulis quam proxime respondent 51° 50′ 47″.

Log. Sin. IS	99916257
Sin. tot.	100000000
Summa	199916257
Sin. PS	99932706
Sin. IPS	99983551, cui

in tabulis respondent

	85°	1′	0″
Jam IPZ	51	50	47
Ergo SPZ s. AO	136	51	47
AQ	179	59	60
OQ	43	8	13

Arcus OQ in tempus conversus dat initium crepusculi a media nocte numeratum. Nempe

30° respond.	1 h.	59′	40″	12‴		
10		39	53	24		
3		11	58	1		
5′			19	56	42^{IV}	
3			11	58	1	
10″				39	53	24^{V}
3				11	58	1
	2 h.	52	4	23	34	25

Est

Est adeo initium crepusculi matutini, Sole in 4° ♍ existente, Halæ h. 2. 52′ 4″, seu h. 2. 52.

Quodsi triangulum SKN solvere libuerit, perpendiculo ex N in KS demisso, per duas illationes invenitur angulus K seu arcus OQ.

COROLLARIUM.

403. Si tempus ortus Solis quæratur (§.214)); initium crepusculi ab eo subductum durationem ejusdem relinquit.

PROBLEMA 66.

404. ***Dato loco Solis in ecliptica una cum elevatione poli, invenire initium crepusculi matutini & finem vespertini ope globi artificialis.***

RESOLUTIO.

1. Globus ad cœli situm componatur, qualem ipso meridie habet (§.310).
2. Vertatur circa axem, donec ope quadrantis altitudinis gradus eclipticæ loco Solis oppositi altitudo in parte cœli occidentali, si initium crepusculi matutini desideretur; in parte autem orientali, si finis vespertini quæratur, 18° deprehendatur (§.325).

Ita nimirum locus Solis intervallo 18° sub horizonte erit depressus (§. 331), adeoque index horarius in casu primo initium crepusculi matutini, in altero finem vespertini indicabit (§. 398).

PROBLEMA 67.

405. ***Data profunditate Solis sub horizonte in fine crepusculi vespertini & initio matutini atque semidiametro Telluris* DC *vel* LC, *invenire altitudinem aëris* AL.** Tab. IV. Fig. 45.

RESOL. & DEMONSTR.

1. Quoniam recta OA respectu distantiæ Solis a Terra evanescit, seu pro nihilo habenda, angulus IAE sumi potest pro profunditate Solis sub horizonte (§. 73. *Astron.* & §. 145. *Optic.*), quippe qui ab angulo a recta IO & recta altera ex puncto O in centrum Solis ducta intercepto non nisi angulo parvitatis contemnendæ differt (§.239. *Geom.*), adeoque eidem æqualis existimari potest (§.4.5. *Analys. infin.*). Quia vero radius Solis AE refractus est *per hypoth.* a profunditate Solis data subtrahatur refractio horizontalis (§.349), ut habeatur vera quantitas anguli IAE.
2. Jam cum angulus IAE cum duobus angulis DAC & CAO efficiat duos rectos (§. 147. *Geom.*), & DAC atque CAO cum angulis DCA & ACO duos itidem re-

ctos efficiant (§. 241. *Geom.*); erit ipse IAE duobus DCA & ACO æqualis (§. 91. *Arithm.*), consequenter ob DCA = ACO per superius demonstrata (§. 395) DCA = ½ IAE.

3. Datis itaque in △ADC ad D rectangulo (§. 309. *Geom.*) angulo DCA & latere DC invenitur latus AC (§. 36. *Trigon*).

4. Quodsi inde subtrahatur semidiameter Telluris LC, relinquitur altitudo aëris quæsita AL.

E. gr. Sit semidiameter Telluris LC, qualis vulgo statuitur, 860 milliarium Germanicorum, & profunditas Solis in fine crepusculi matutini & initio vespertini 18° (§. 398). Subtrahatur ab hac refractio horizontalis 32′ (§. 349); residuus fiet angulus IAE 17° 28′, cujus dimidius DCA erit 8° 44′. Quamobrem

Log. Cosin. DCA	99949352
DC	29344984
Sin. tot.	100000000
AC	29395632,

cui in Tabulis quam proxime respondent 870.

Est igitur AC	=	870 milliarium
Subtrahatur LC	=	860
relinquitur AL	=	10

Aëris adeo altitudo est 10 milliarium Germanicorum.

SCHOLION.

406. *Facile intelligitur, per problema præsens tantummodo reperiri altitudinem aëris crassioris, qui ad lumen Solis sufficienter reflectendum sufficit, ut crepusculum oriatur. Etenim cum aer continuo fiat rarior, quo altius ascenditur* (§. 154. Aërom.); *altitudo totius atmosphæræ multo major esse debet.*

Finis Astronomiæ Sphericæ.

ELE-

ELEMENTA ASTRONOMIÆ.

Pars II.

ELEMEMTA THEORICÆ.

CAPUT I.

DE

NATURA SOLIS AC LUNÆ.

OBSERVATIO 1.

407.

Sole oriente, tenebræ ex terra fugiunt & corpora eidem directe opposita lumine ejus collustrata resplendent, Solem intuentes oculi splendorem ejus ferre nesciunt. Nube inter ipsum & corpora terrestria interposita, splendor ab his amittitur & Sol interdum instar disci argentei, autumnali præsertim ac hiberno tempore, per nubes transparet. Sole denique occidente, lux omnis tandem evanescit.

COROLLARIUM 1.

408. Sol adeo fons luminis, quo interdiu in tellure fruimur.

COROLLARIUM 2.

409. Quoniam lumen magnum est, quod corpora circumjecta clare ac distincte videri efficit (§. 4. *Optic.*); Sol telluri est luminare magnum.

SCHOLION.

410. *Patet adeo, cur* Moses *Solem dicat* luminare magnum Gen. I. 16.

OBSERVATIO 2.

411. *Extra omnem dubitationem positum est,* Joannem Fabricium, Davidis, *Astronomi non incelebris filium, maculas Solis jam ab initio* A. 1611. *observasse & circa medium ejusdem in lucem publicam protulisse* (*a*), *antequam quicquam de hoc phænomeno tunc temporis prorsus singulari atque inexpectato fuisset inauditum.* Christophorus Scheinerus, *Jesuita Ingolstadiensis, telescopio in Solem converso* A. 1611. *mense Majo maculas in eo ob-*

(a) Vid. ejus Narratio de Maculis in Sole observatis & apparente earum cum Sole conversione Witebergæ 1611. in 4.

observare cepit. Cum Theodorus Busæus *tunc temporis Provincialis observationem placitis Aristotelicorum adversam supprimendam judicaret, eam ad* Marcum Welserum, *Senatorem Augustanum, perscripsit, qui novum phænomenon sine Autoris nomine sub titulo* Apellis post tabulam *evulgavit, Unde excitatus* Gallilæus *easdem observavit & hodienum observant omnes, quos siderum contemplatio juvat. Sunt autem maculæ istæ partes nigricantes, figuræ irregularis ac inconstantis, quæ disco Solis inhærere videntur.* Tab. V Fig. 46. *Pleræque partibus heterogeneis constant, quarum obscuriores ac densiores* Hevelio *nuclei dicuntur, & veluti atmosphæra quadam, minus obscura & rariori cinguntur. Figura & magnitudo tam nucleorum, quam macularum integrarum variabilis.* Hevelius (b) A. 1644. *die* 8. *Maji maculam vidit valde exilem tenuemque, quæ die* 10. *Maji decuplo major apparuit, longeque obscurior ac densior, permagno nucleo prædita: quales mutationes subitas alias* Hevelius & Scheinerus (c) *quoque observavit. Notavit &* Hevelius (d), *nucleum sensim deficere, antequam macula disspareat, &* 1644, *d.* 31. *Maji usque ad* 1. *Junii maculam quotidie attenuari observavit, donec tandem d.* 3. *Jun. in* 4. *discerperetur, die* 5. *rursus in unam coalescentes. Durarunt autem aliæ non nisi per diem unum, aliæ per* 2, 3, 10, 15, 20, 30, *raro per* 40 *dies.* Kirchius *Lipsiæ* (e) A. 1684, *a a.* 26. *April. usque ad d.* 17 *Julii eandem in Sole maculam conspexit, qua alia diuturnior hactenus nunquam visa, quam etiam Parisiis observavit* Cassinus: *carent enim omni sensibili parallaxi, ita ut a spectatoribus longissimo terrarum intervallo a se invicem remotis in idem disci solaris punctum referantur. Sane maculas, quas* R. P. Jartoux *Pekino in China* A. 1701. *a d.* 1 *Novembris usque ad diem* 12 *observavit* (f), *Montepessulano a d.* 31 *Octobris usque ad* 11 *Novembris quoque vidit* Cassinus *junior* (g). *Moventur autem maculæ per discum solarem, motu prope limbos tardiori, quam prope centrum.*

(b) Cometogr. lib. 7. f. 424. & Selenograph. Append. f. 519.
(c) in Rosa Ursina.
(d) Cometogr. loc. cit. f. 409.
(e) in Appendice Ephemerid. A. 1685.
(f) Vid. Acta Erudit. A. 1705. p. 483.
(g) Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1701. p. m. 345.

trum. Macula a Kirchio *observata per* 12 *dies in disco Solis fuit conspicua, per* 15 *vero post eum latuit. Ad limbum nimirum Solis, unde digrediuntur, rursus restituuntur interdum* 27, *interdum fere* 28 *diebus. Denique notatu inprimis digna sunt, quod maculæ circa limbum contrahantur, in medio disci ampliores appareant, immo sæpius ibi in unam coaluisse videantur, quæ hic disgregatæ spectabantur; quod plures in medio disci oriantur, plures etiam ibidem dispareant; quod denique nulla earum a semita deviatio prope horizontem observetur, cum tamen* Hevelius (h) *Mercurium in* Sole *observans, prope horizontem humiliorem deprehenderit, nempe* 27'' *infra semitam pristinam detrusum.*

COROLLARIUM 1.

412. Cum depressio Mercurii infra semitam sit a parallaxi (§.372), maculæ parallaxin a Sole nullam habentes (§.411) eidem propiores existunt, quam Mercurius (§.380), planeta Soli proximus (§.35. 36).

COROLLARIUM 2.

413. Quoniam per plures dies cum Sole oriuntur & occidunt, nec discum ejus deserunt, nisi quando in limbo disparent, tribus tamen circiter diebus diutius post Solem latent, quam hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt (§.411); Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei solari inhærent, sed aliquam ab ea distantiam habent.

SCHOLION 1.

414. *Hoc argumento jam intulit primus observator* Fabricius (i) *cum altera die maculam adhuc in disco Solis orientis spectaret, eam esse in* Sole: *etsi mora macularum post solem latentium nondum cognita, agnoscere non potuerit, ipsis aliquam a superficie* Solis *distantiam tribuendam esse.*

SCHOLION 2.

415. *Non licit excipere, quod, cum minorem hemisphærii solaris partem contueamur* (§.247.Optic.); *ex mora macularum diuturniore in parte Solis aversa earum a Sole distantia inferri nequeat. Etenim ubi Solis a Terra distantia fuerit cognita una cum ejus diametro; demonstrativa ratione contrarium ostendere licebit.*

COROLLARIUM 3.

416. Quia in medio disci Solis & oriuntur & evanescunt, subitasque mutationes tum ratione magnitudinis, tum ratione figuræ, tum ratione densitatis, subeunt (§.411); eas de novo circa Solem nasci & iterum dissolvi manifestum est.

CO-

(h) Vid. Mercurius in Sole visus f. 106.
(i) loc. c. fol. C. 3. b & seqq.

COROLLARIUM 4.

417. Coalescaunt itaque ex Solis exhalationibus (§. 413), nubes nimirum solares.

SCHOLION 3.

418. *Hinc communia cum nubibus habebunt phænomena, quas itidem congeriem exhalationum esse constat.*

COROLLARIUM 5.

419. Cum adeo exhalationes, quæ ex Sole prodeunt, supra eum eleventur & in data quadam altitudine subsistant; Solem ambiat fluidum aliquod necesse est, quod exhalationes ad ascensum urget (§. 99. *Hydrost.*), inferius quidem densius, superius autem rarius (§. 33. *Hydrost.*), qualis est aër noster (§. 154. *Aërom.*).

SCHOLION 4.

420. *Conveniunt hæc cum iis, quæ* Keplerus *ex auroræ figura deduxit* (§. 385): *sed de atmosphæra solari postea plura.*

COROLLARIUM 6.

421. Quia maculæ in medio disco Solis dissolutæ disparent (§. 411); materia macularum, hoc est, exhalationes solares in Solem rursus recidant necesse est: unde manifestum est, varias in atmosphæra solari, consequenter & in ipso Sole, contingere mutationes.

COROLLARIUM 7.

422. Cum revolutio macularum circa Solem sit admodum regularis (§. 411) & maculæ ipsæ Soli valde vicinæ (§. 413); non tam maculæ circa Solem, quam Sol ipse una cum atmosphæra, in qua maculæ hærent, intervallo 27 circiter dierum circa proprium axem motu vertiginis movetur.

SCHOLION 5.

423. *Inde motum vertiginis Solis jam agnovit primus observator* Fabricius, *tanto pronior ad eum inferendum, quod nosset, eundem a priori assecutos* Jordanum Brunum & Keplerum (k).

SCHOLION 6.

424. *Inde est, quod prope limbum obliquius spectatæ coarctentur & oblongæ fiant* (§. 251. Optic.).

COROLLARIUM 8.

425. Quoniam Sol in omni situ instar disci circularis apparet, eminus spectatus; figura ejus ad sensum sphærica esse debet (§. 13. *Sphæric.* & §. 277. *Optic.*).

SCHOLION 7.

426. *Quod autem revera sphæroidica sit, inferius ostendetur.*

PROBLEMA 1.

427. ***Observare maculas solares.***

RESOLUTIO.

Utendum est duobus vitris planis & coloratis charta candida acu perforata interjecta, vel helioscopio (§. 467. *Dioptr.*).

Quodsi autem ipsas maculas in pro-

(k) loc. cit. fol. D. 2. b.

propriis locis disci solaris accurate depingere sicque earum situm, motum, & magnitudinem exacte determinare libuerit,

Tab. V. Fig. 47. 1. Per tubum astronomicum AB (§. 358. *Dioptr.*) sphæræ ligneæ A intra foramen fenestrellæ ligneæ CD mobili inditum, ut tubus ope baculi annulo ligneo AE sphæræ agglutinato affixi FG libere huc illucque moveri possit, species Solis in cubiculum obscuratum intromittatur.

2. Baculo FG ad angulos rectos aptetur tabula lignea GH, charta candida superinducenda & ultro citroque mobilis, ut tubo propius admoveri iterumque ab eodem removeri possit, donec Solis species exacte impleat circulum in charta descriptum.

3. Ope perpendiculi KL determinetur punctum verticale M & plumbagine delineetur macula, quæ in disco Solis in tabella excepto comparet, noteturque tempus, quo delineatur, ope horologii oscillatorii ad motum Solis (§. 125) directi.

(Wolfii Math. Tom. 3.)

SCHOLION.

428. *In hunc modum observandi maculas solares primum incidit* Fabricius, *cum splendor solis ne acici visui officeret sibi metueret, helioscopiis, tunc temporis nondum cognitis* (l). *Eundem quoque adhibuit* Scheinerus (m) *& prolixius ex eodem describitur ab* Hevelio (n).

OBSERVATIO 3.

429. *Commemorant quoque multi faculas seu partes reliquo disco Solis lucidiores a se observatas, maculis plerumque majores & tam lumine, quam mole, figura & duratione differentes. Sane* Hevelius (o) d. 20. Jul. 1634. *faculam se observasse ait, quæ tertiam diametri partem occupaverit. Per ejusdem* Hevelii *observationes* (p) *maculæ sæpissime in faculas, raro autem faculæ in maculas abeunt.* Hugenius *tamen* (q) *fatetur, se nunquam faculas videre potuisse, etsi maculas sæpius spectaverit, & nonnisi in nubeculis subfuscis, quæ maculas plerumque circumdant, aliquando solæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari. Idem etiam exiguam illam in disci cir-*

(l) loc. cit. f. C. 4. b.
(m) in Rosa Ursina lib. 3. f. 151.
(n) in Prolegom. Selenogr. f. 98 & seqq.
(o) loc. cit. f. 87.
(p) in Apendice Selenogr. f. 505. usque ad 509.
(q) in Cosmotheoro lib. 2. p. m. 107.

cumferentia inæqualitatem, quæ interdum per telescopia cernitur, vaporum prope terram nostram tremulæ agitationi, non (quod vulgo fieri assolet) undarum fluctibus flammarumque eructationibus adscribit. Et sane ipse ego talem fluctuationem in limbo Solis d. 14. Sept. A. 1708. *per telescopium* 8. *pedum deprehendi, cum ex nubibus circa horizontem ortivum constitutis emergeret, quæ in elevatiore situ mox cessabat.*

SCHOLION.

430. *Quemadmodum adeo fictam judico imaginem Solis, quam ex* Kircheri & Scheineri *observationibus passim depingunt Autores, cum ego similem nunquam viderim, nec* Hugenius *exquisitissimis suis telescopiis talem deprehenderit, &* Fabricius, *qui primus Solem per telescopia contemplatus, observationibus suis diffisus imperfectioni telescopii tribuit, nihil definiturus de inæqualitate & asperitate circa margines Solis, donec alii eundem accuratioribus telescopiis observaverint* (r); *ita facularum phænomena non materiæ cuidam accensæ (obstat enim diuturna earum duratio & in maculas mutatio), sed refractioni radiorum solarium in exhalationibus rarioribus tribuo, qui densati in vicinia umbrosa lucem solari majorem exhibere videntur. Sunt adeo faculæ macularum quoddam accidens.*

THEOREMA 1.

431. *Solis substantia ignea est.*

Sol enim lucet (§. 406) & radii ejus per specula concava & lentes causticas collecti incendunt, urunt, comburunt, liquefaciunt, corpora solidissima exiguo temporis spatio vel in calcem, vel in vitrum convertunt (§. 221. *Catoptr.* & §. 199. *Dioptr.*). Quare cum vis radiorum solarium propter divergentiam decrescat in ratione duplicata distantiarum reciproce sumtarum (§. 87. *Optic.*); evidens est, eundem ipsorum fore effectum, qui densiorum per specula & lentes causticas deprehenditur, si adeo prope ad Solem accederemus, ubi eadem eorum densitas deprehenditur. Radii adeo solares in vicinia Solis eosdem effectus producunt, qui ab igne vehementissimo expectari possunt, consequenter Sol substantiæ igneæ existit.

COROLLARIUM 1.

432. Ejus adeo superficies undiquaque fluida.

SCHOLION.

433. *An Sol integer fluidus sit, quemadmodum visum est nonnullis, an vero potius solidus, quemadmodum aliis placet, non*

(r) loc. cit. f. C 2, b.

non definio. Sed cum non aliæ ſint notæ, per quas ignem ab aliis corporibus diſtinguimus, niſi lux, calor & vis incendendi, urendi, comburendi, liquefaciendi, calcinandi, vitrificandi, ſane ego non video, quid obſtare poſſit, quo minus concludam, Solem eſſe corpus igni noſtro ſimile adeoque flamma circumcirca veſtiri. Ne tamen quis voce demonſtrationis offendatur, qui minus recte ſupponi ſibi perſuadet, eorundem effectuum easdem eſſe in univerſo cauſas; ideo eandem omiſimus: quod etiam in poſterum faciemus, partim cum probabilia propoſituri ſumus, partim cum inſtituti ratio non permittet, ut ad veram demonſtrationis formam probatio redigatur, utut, ſi verum fateri velimus, forma perfectæ demonſtrationis alibi a nobis delineatæ (s) *in ipſis Mathematicorum demonſtrationibus non adeo rigoroſe ſemper obſervetur, ne ſcilicet prolixitate lectori ratiocinandi vi jam pollenti, nauſea moveatur*

COROLLARIUM 2.

434. Cum maculæ ex Solis exhalationibus concreſcant (§.417); Solem non eſſe ignem purum apparet, ſed flammæ ejus particulas heterogeneas admixtas eſſe conſtat.

THEOREMA 2.

435. ***Figura Solis eſt ſphæroides, circa polos depreſſior, quam ſub æquatore.***

DEMONSTRATIO.

Sol motu vertiginis movetur (§. 422), adeoque materia ſolaris a centris circulorum, in quibus movetur, recedere conatur (§. 617. *Mech.*), tanto quidem majori vi, quo circulorum peripheriæ majores exiſtunt (§. 623. *Mechan.*). Sed æquator eſt circulus maximus (§. 48), reliqui verſus polos continuo decreſcunt (§. 41 *Sphær.*). Materia ergo ſolaris, etſi primitus in ſphæram coacta, magis a centro æquatoris, quam a centris parallelorum recedere conatur, conſequenter cum gravitas, qua retinetur in ſpatio ſuo, per totum ſolem uniformis ſupponatur, ſub æquatore utique a centro ejus magis recedit, quam ſub circulis parallelis, & hinc Solis diameter per æquatorem ducta major eſt, quam quæ per polos tranſit, hoc eſt, Solis figura perfecte ſphærica non eſt, ſed ſphæroidica.

OBSERVATIO 4.

436. Caſſinus *verno tempore* A. 1683. *primus obſervavit lumen quoddam in Zodiaco* (t) *& obſervationes usque ad* A. 1688. *deinde con-*

Aaaa 2 *tinu-*

(s) Logicæ §. 551 & ſeqq.

(t) Vid. Acta Eruditorum A. 1683. p. 274. & ſeqq.

tinuavit (u). *Idem deinceps* A. 1684. *usque ad* A. 1686. *Genevæ* Fatio de Duillier & A. 1688. *usque ad* A. 1694. *observarunt in Germania* Kirchius *&* Eimartus (x), *novissime vero Cel.* de Mairan (y). *Diffunditur utrinque a Sole ad diversam diverso tempore distantiam, quæ tamen nunquam minor quam* 50. aut 60 *graduum, nunquam major quam* 100. *aut* 103. *graduum deprehensa. Figura utrinque in cuspidem desinit & latitudo prope horizontem nunquam minor deprehensa quam* 8 *vel* 9 *graduum, nunquam major quam* 20 *graduum observata, maxima tamen latitudine non semper maximæ longitudini conveniente. In Sole ejus basis est, crura sunt ad sensum rectæ & angulum in mediocri quantitate* 21° *circiter comprehendunt: ubi tamen phænomenon latissimum est, propter intensitatem luminis solaris in conspectum nostrum minime prodit. Lumen hoc in medio maximum est, versus latera vero utrinque sensim sensimque decrescit. Claritas ejus ad claritatem viæ lacteæ accedit, color lumini, qui in caudis cometarum conspicitur, similis. Stellæ perinde ac per Cometarum caudas transparent. Mane debilius constanter apparuit hoc lumen, quam vespere. Ab ecliptica ordinarie magis versus septentrionem, quam versus Austrum declinavit in parte cæli boreali visum. Movetur autem una cum Sole circa Terram ab ortu in occasum & latitudine differt ab omnibus cometarum caudis, qui huc usque observati sunt. Movetur quoque cum eodem ab occidente in orientem secundum signorum successionem.*

COROLLARIUM I.

437. Quoniam hoc lumen instar siderum motu communi gaudet, ejus sedes in aura ætherea est, extra atmosphæram nostram.

COROLLARIUM 2.

438. Et cum non modo motu communi, sed etiam motu proprio cum Sole movetur; in eadem cœli regione locum tenere debet, ubi Sol hæret, & ab ipso utrinque diffundatur necesse est.

COROLLARIUM 3.

439. Quoniam lumen a Sole per ætherem diffusum non videtur, quemadmodum ex postea demonstrandis independenter ab his patebit;

(u) Vid. Tractatus, cui titulus: Decouverte de la lumiere céleste, qui paroit dans le Zodiaque.

(x) vid. Miscellanea Naturæ Curiosorum Dec. III. A. 1. p. 285 & seqq.

(y) vid. Traité physique & historique de l'Aurore boreale Sect. I. p. 11.

bit; necesse est ut ibidem, ubi videtur hoc lumen, sit materia ad lumen Solis in Terram reflectendum apta.

OBSERVATIO 5.

440. R. P. Franciscus Noël (z) *secundum Solis crepusculum describit, quod incipit, quando Sol est depressus infra horizontem plus quam* 30, *immo quandoque pene* 40 *gradibus & amplius: & ab ipso primum* A. 1684. *circa lineam æquinoctialem, postea eodem & sequente anno in Collegio Societatis* Rachol *latitudinis borealis* 15° 10′ *prope* Goam *& sequentibus annis* Macai *& in* China *observatum fuit. Per modum viæ lacteæ seu grandis caudæ cometæ assurgit, circa horizontem quidem latioris, sed ab horizonte usque sursum semper in latitudine, immo & in lumine decrescentis & quasi denique in cuspidem grandem desinentis. Incipit mane ante ortum Solis & vesperi desinit post occasum quatuor horis juxta paulo diversam locorum latitudinem, nocte illuni, innubi & nitida, uti multis admodum in locis sæpius expertus est. Semper se diffundit per viam eclipticæ & ideo juxta varium sphæræ mundi situm modo ad* 40, *modo ad* 60, 70 *&c. gradus supra horizontem assurgit, mane sensim crescente altitudine, vespere sensim decrescente. Mane & vespere per totum annum semper conspicitur: æstate tamen in regionibus borealibus extra zonam torridam sitis, uti in China animadvertit, vesperi non tam clare ac distincte apparet, quam mane, & æstate quasi debilius, immo non tam longe se extendit, quam sub æquinoctiale & hibernum tempus.*

COROLLARIUM 1.

441. Cum ex descriptione crepusculi hujus secundi appareat, ipsum idem esse cum lumine zodiacali *Cassiniano* (§. 436), crepusculum, vero hoc in zona torrida & locis vicinis per totum annum observetur (§. 440); lumen zodiacale phænomenon ordinarium est, eandem dubio procul cum Sole ferens ætatem.

SCHOLION 1.

442. Cassinus *referente* Gregorio (a), *existimavit, lumen zodiacale brevi ante primam ejus observationem a se factam fuisse ortum, atque illud duobus ante annis non extitisse, cum in loco, quem tum obtinere debuit, cælo intentus Cometam oculis frequenter intueretur. Illud vero antea extitisse & postea evanuisse ex historiis antiquis verisimile ducit. Sed* Fatio *idem mundo coæ-*

(z) in Observat. mathem. & phys. in India & China factis c. 9. §. 2 p. 129 & seqq.

(a) Astron. phys. & geometr. lib. 2. schol. prop. 8. f. 129.

vum ſuſpicatus eſt. Apparet itaque conjecturam hujus a veritate non recedere.

COROLLARIUM 2.

443. Quoniam crepuſculi ſecundi ſeu luminis zodiacalis cuſpis quotidie per totum annum inſtar alicujus ſideris oritur & occidit, ſolem præcedens & ſequens, ita ut ſole ad horizontem ortivum appropinquante ipſa ad verticem magis appropinquet & illo ab horizonte occiduo recedente ipſa a vertice magis recedat (§.440); multo jam clarius intelligitur lumen hoc, quotidie cum Sole oriens atque occidens, ad ipſum ſolem pertinere.

COROLLARIUM 3.

444. Quamobrem quia hoc lumen apparere nequit, niſi ſupponatur circa ſolem materia quædam fluida ad lumen ejus reflectendum, vel etiam inflammari apta (§.439); Solem ambiat neceſſe eſt fluidum aliquod ab ætherea aura diverſum.

SCHOLION 2.

445. Caſſinus, *referente* Gregorio (b), *particulas Solis lumen reflectentes pro innumeris planetis habet, qui motus ſuos circa Solem exercent, quemadmodum via lactea ab innumeris fixis ortum ducit. Sed conjectura hæc nimis levi nititur argumento, nec autopſia teleſcopica probatur, quemadmodum cauſa luminis in via lactea.*

THEOREMA 3.

446. ***Solem ambit atmoſphæra admodum alterabilis.***

Etenim Solem ambit aliquod fluidum aura ætherea craſſius, quod radios ejus, quibus illuminatur, ad Terram reflectit (§.444), quemadmodum ab aëre noſtro fieri ſolet in crepuſculis (§. 395.). Quamobrem cum fluidum aura ætherea craſſius, quod lumen Solis reflectere aptum corpori mundi totali circumfuſum dicatur atmoſpæra; Solem quin atmoſphæra quædam ambiat, dubitari nequit.

Conſtat vero atmoſphæræ Solis altitudinem inſigniter variari (§. 443), cumque lumen omni tempore non eadem quantitate reflectat (§.440), denſitatem ejus valde immutari. Atmoſphæra igitur ſolaris admodum alterabilis eſt.

SCHOLION.

447. *Figuram atmoſphæræ ſolaris lenticularem eſſe jam collegit* Fatio & *Cel.* de Mairan *probat* (c) *ex apparente ejus figura.*

OBSERVATIO 6.

448. ***Interdum lumen in aliqua***

diſci

(b) loc. cit.

(c) in Tract. de aurora boreali Sect. 1. c. 4. p. 21.

disci solaris parte, raro in integro succesive deficit, cælo quam maxime sereno, tempore quidem novilunii, quando Sol atque Luna in eadem sphæræ mundanæ parte nobis hærere videntur. Tale autem phænomenon spectatur, quale appariturum erat, si discus quidam niger ab occasu versus ortum juxta discum Solis promoveretur. Imprimis autem notatu dignum, quod pars disci deficiens non ejusdem magnitudinis appareat ubique locorum. E. gr. d. 22. Maji A 1706. *Lipsiæ vix* $\frac{1}{3}$, *Jenæ* $\frac{1}{8}$, *Berolini* $\frac{1}{8}$, *Argentorati* $\frac{1}{3}$, *Bononiæ* $\frac{2}{3}$, *Romæ* $\frac{2}{3}$, *Madriti* $\frac{1}{2}$ *digiti seu duodecimæ diametri partis lucida extabat. Vratislaviæ, Dresdæ, Norimbergæ, Tiguri, Genevæ, Montepessulano, Massiliæ Sol totus deficiebat* (d). *Nec minus notatu dignum, quod populi occidentaliores citius vident Solem deficientem deliquiique rursus finem, quam orientaliores. E. gr. Parisiis* A. 1706 *Sol ultra 44 minuta horaria citius lumen amittebat, quam Berolini; Madriti vero ultra 23 minuta citius quam Parisiis, citiusque Parisiis quam Berolini & Madriti citius quam Parisiis lumen recuperabant* (e).

COROLLARIUM 1.

449. Quoniam adeo Sol non in omnibus terræ locis eodem momento & eadem disci quantitate deficit (§. 448); fieri sane nequit, ut Sol revera lumine suo privetur. Oritur adeo phænomenon ex diametrali interpositione corporis cujusdam opaci ab occasu versus ortum progredientis inter Solem & oculum nostrum, quod radiorum transitum prohibet (§. 333. *Optic.*), & disco Solis inhærere videtur, etsi longo intervallo ab eo remotum (§. 308. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

450. Quoniam corpus inter Solem & tellurem interpositum instar disci circularis apparet, rotundum sit necesse est, sive disciforme fuerit, sive sphæricum (§. 277. *Optic.*) aut sphæroidicum.

COROLLARIUM 3.

451. Cum Luna ab occasu versus ortum motu proprio feratur (§. 24), illoque tempore a terricolis ad eandem sphæræ mundanæ partem referatur (§. 448), præterea instar disci circularis appareat, quando plena facie splendet; quin Luna sit corpus illud opacum radios solares intercipiens dubitandum non est.

COROLLARIUM 4.

452. Luna igitur Telluri propior, quam Sol.

CO-

(d) vid. Acta Erudit. A. 1706. p. 335. 371. Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1706 p. 599.

(e) Memoires de l'Acad. Roy. loc. cit.

COROLLARIUM 5.

453. Quoniam Luna radios Solis non transmittit & in parte a Sole aversa splendore omni destituitur (§. 448); corpus opacum est & minime pellucidum (§. 11. 12. *Optic.*).

OBSERVATIO 7.

454. *Cum* A. 1706. *multis in locis Solis integer discus, in aliis maxima ejus pars deficeret, stellæ in conspectum prodibant.* E gr. *Lipsiæ vidimus* ♀ & ♃, *Jenæ* Cl. Hambergerus *Capellam, & Vratislaviæ* R. P Heinrich *multas stellas vidit. Non uno in loco tenebræ adeo invaluerunt, ut nisi candela accensa in conclavi scripturam legere non licuerit.* Cl. Scheuchzerus *autor est, ad 4 passuum distantiam homines agnosci non potuisse. Ea autem in terris conspiciebatur rerum facies, qualem Sole occidente contuemur. Aves loca repetebant, in quibus pernoctari solent: lusciniæ suaviter canebant; vespertiliones provolabant: flores in hortis contrahebant folia: circa horizontem apparebat cœli rubedo: in campis ros decidebat & versus occidentem nebula conspiciebatur, cujus nullum versus orientem vestigium deprehensum. Observatu omnium maxime dignum erat annulus circa lunam lucidus, limbo Lunæ parallelus, quem cum maximo studio contemplarer, a parte Solis lucida optime distinguebam: neque enim solum splendor Solis splendorem annuli colorem argenteum referentis multum superabat, verum etiam particula Solis lucida non eadem cum annulo peripheria terminabatur. Erat annulus obversa Lunæ parte densior, aversa rarior, exacta tamen peripheria terminatus. Margo Lunæ instar nebeculæ pallebat, nigredine medium disci occupante. Eundem annulum plures aliis in locis observarunt* (f): *inprimis vero Astronomi Academiæ Regiæ Scientiarum Montepessulano (quorum solertiam in eodem observando laudat* Fontenellius) *eodem prorsus modo eundem describunt, quo ego ex mea observatione eum repræsentaveram in Actis Eruditorum* (g), *antequam istorum observatio prodiret. Denique generosus* Dn. de Tschirnhausen *Dresdæ per tubum 16 pedum paulo ante initium eclipseos in limbo Solis, ad quem Luna appellebat, tremorem observavit, qualem etiam in ultimo digito advertit, cum jamjam obscuraretur.* Keplerus (h) *re-*

(f) Vid. Histoire de l'Acad. Royale des Scienc. A. 1715. p. m. 148.
(g) A. 1706. p. 385.
(h) in libello de nova stella serpentarii c. 23. p. 115.

refert, similem annulum A. 1605. *mense Octobri Antverpiæ & Neapoli fuisse observatum, cum Sol prorsus deficeret:* Scheinerus *vero perhibet* (i), A. 1628. *d.* 25. *Decembris Barcinoni in eclipsi solari circa Lunæ limbum tremorem fuisse observatum, qualis ab* Hevelio *quoque in nonnullis eclipsibus deprehensus* (k). *Cum* A. 1715. *d.* 3. *Maji eclipsis Solis in Anglia esset totalis, annulus quoque circa lunam Londini observatus: immo in totali obscuratione fulgurationes momentaneæ in medio disci lunæ visæ ab* Hallejo *&* Dn. de Louville, *qui eclipseos observandæ gratia ex Gallia in Angliam se contulerat* (l).

OBSERVATIO 8.

455. *Quando Luna Solem occidentem mox sequitur, exigua ejus pars splendet: quo longius vero a Sole recedit, eo majorem partem lumen occupat, ita ut 180 graduum intervallo a Sole distans, plena facie fulgeat. Quamprimum vero ulterius progressa ad Solem rursus accedit, lumen sensim sensimque deficit, donec Soli vicina omni destituatur. Quamdiu luna crescit, pars lucida occidenti obvertitur; quamdiu decrescit, orientem respicit. Paulo ante & paulo post congressum cum Sole pars quoque obscura debili quadam lucula perfusa instar nubeculæ pallet.*

COROLLARIUM 1.

456. Ea Lunæ pars constanter splendet, in quam radii solares incidunt.

COROLLARIUM 2.

457. Luna telluri nostræ luminare magnum est, quia corpora terrestria distincte videri facit (§. 4. *Optic.*).

OBSERVATIO 9.

458. *Luna interdum cœlo sereno lumen omne amittit, quando plena facie splendere debebat, tumque discus obscurus ab oriente versus occidentem promotus, eam obtegere videtur. Omnibus vero in terræ locis eadem lunæ pars obscurata videtur, & Luna vel in ipsa ecliptica vel prope eandem deprehenditur.*

COROLLARIUM 1.

459. Quando Luna plena facie splendet, intervallo 180 graduum a Sole distat (§. 455). Sed quia Sol in ecliptica hæret (§. 157); terra in oppositum gradum eclipticæ, hoc est, in 180 a loco Solis numeratum, um-

(i) in Rosa Ursina lib. 4. part. 2. c. 27. f. 740.
(k) Cometograph. lib. 7. f. 365.
(l) Phil. Transact. Num. 343. p. 249. & Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences A. 1715. p. 126, 127. edit. Batav.

bram projicit (§. 125. *Optic.*). Cum adeo Luna prope eundem gradum defici t (§. 458); eam lumine privari patet, quando umbram terræ ingreditur.

COROLLARIUM 2.

460. Quoniam itaque in umbra terræ lumen lunæ deficit id aliunde, nempe a Sole (§. 456), recipere debet.

COROLLARIUM 3.

461. Unde non mirum, quod ubique terrarum eadem lunæ pars obscurata videatur: est enim vera luminis privatio (§. 459).

COROLLARIUM 4.

462. Lumen adeo lunare in omnibus locis eodem modo deficere observatur.

***OBSERVATIO* 10.**

463. ***Interdum Luna cælo maxime sereno prorsus disparuit, stellulis sextæ ac septimæ magnitudinis licet conspicuis, ita ut nec per optima telescopia detegi potuerit. Hoc phænomenon observavit*** Keplerus A. 1580 & 1583 (m) & 1620 (n), *itemque* Hevelius (o). *Cum* A. 1642, *d.* 14. *April.* Ricciolus *cum multis Jesuitis Bononiæ, ac plurimi passim per Bataviam lunam evanescentem admirarentur; Venetiis ac Viennæ in Austria conspectui observatorum sese minime subducebat* (p). *Luna* A. 1703. *d.* 23. *Decembris deficiens in totali obscuratione Arelati fulva & fusca, Avenione contra rubicunda & transparens, non secus ac si splendor Solis quodammodo transpareret, Massiliæ vero pars ejus Caurum respiciens subrubens, opposita valde obscura cernebatur, tandemque ultimo in loco cælo quamvis maxime sereno, prorsus disparebat* (q). *Similiter* Christfridus Kirchius *in eclipsi totali* A. 1729. *d.* 9. *Aug. rubedinem Lunæ deficientis adeo transparentem observavit, ut non modo maculæ majores obscuræ per eam conspici possent, sed etiam maculæ minores lucidæ in ipsa umbra aliquem splendorem retinerent. Color Lunæ rubicundus versus centrum umbræ cum atro colore mixtus erat, ut circa idem nigrior quædam macula appareret, quæ versus limbos umbræ sensim diluebatur* (r).

CO-

(m) Astron. Optic. p. 227. 297.
(n) Epitom. Astron. Copernican. lib. 5. p. 825.
(o) Selenogr. c. 6. f. 117.
(p) Ricciolus Almag. Nov. lib. 4. c. 6. schol. 4. f. 203.
(q) Histoire de l' Acad. Royal. des Scienc. A. 1704. p. m. 72.
(r) in Observat. Astronom. selectior. A. 1730. editis p. 23.

COROLLARIUM 1.

464. Quia eodem tempore diversi notantur in Luna colores, immo alicubi nulli (§.463); colores illi Lunæ proprii non sunt.

COROLLARIUM 2.

465. Quoniam in nullo corpore cernuntur colores, nisi quod radios vel emittit, vel reflectit (§.42.*Optic.*); Luna in umbra telluris constituta lucula quadam adhuc resplendeat necesse est. Quare cum radii in oculos observatorum per atmosphæram transmissi in ea refringantur (§.334), lumen autem per refractionem in colores mutari possit (§.184.*Opt.*); radios lunares in diversis atmosphæræ partibus diversimode refringi necesse est. Colorum ergo diversitas a diversa constitutione atmosphæræ diversis in locis pendet.

COROLLARIUM. 3.

466. Radii solares cum in atmosphæra refringantur (§. 334), umbram telluris trajiciunt: luna igitur in eadem constituta eosdem reflectit, adeoque pro diverso atmosphæræ a Sole collustratæ statu multo vel exiguo lumine in umbra telluris gaudet, & quia radii solares per refractionem in colores transmutari possunt pro diversitate refractionis varios, lunam diverso tempore eodem in loco diversis coloribus tinctam cernere licet.

SCHOLION.

467. *Colores adeo Lunæ deficientis prædici nequeunt, nisi atmosphæræ constitutione tum in loco observationis, tum in locis, in quibus Sol oritur & occidit, cognita atque perspecta.*

OBSERVATIO II.

468. *Oculo non minus nudo, quam armato partes quasdam obscuriores reliquis in Luna observamus, quas* Maculas *appellant: per telescopia autem lunam crescentem vel decrescentem contuentibus patet, in maculis lumen æqualiter terminari, in partibus autem lucidioribus terminum lucis esse lineam flexuosam ex arcubus convexis & concavis dissimilibus compositam. Notantur quoque partes quædam lucidiores per obscuriores hinc inde dispersæ & particulæ a parte illuminata avulsæ seu ultra limitem illuminationis constitutæ passim illuminatæ comparent, aliis intermediis adhuc in tenebris constitutis: immo prope maculas & in ipsis maculis istiusmodi particulæ frequenter observantur. Præter maculas autem antiquas observantur adhuc aliæ variabiles, nudo oculo inconspicuæ, quas* Maculas novas *appellant, Soli semper oppositas & hinc circa partes, quæ in luna crescente citius illuminantur, in decre-* Tab. V. Fig. 48.

ſcente tardius intermediis lumen amittunt, in orbem redeuntes, nunc majores, nunc minores.

COROLLARIUM 1.

469. Omnes partes a Sole æqualiter illuminatur, utpote æquali intervallo ab eodem remotæ (§.87. *Optic.*): ſed aliæ tamen aliis clariores, aliæ vero obſcuriores apparent (§. 468): ergo aliæ radios ſolares copioſius aliis reflectunt, adeoque hæterogeneæ ſint neceſſe eſt.

COROLLARIUM 2.

470. Quia terminus luminis in maculis admodum æquabilis (§.468); ſuperficies earum æquabilis eſt.

COROLLARIUM 3.

471. Partes, quæ a Sole citius illuminantur aliis vicinioribus, quasque lumen Solis tardius iterum relinquit, altiores quoque ſunt reliquis, ſeu ultra reliquam Lunæ ſuperficiem eminent.

COROLLARIUM 4.

472. Maculæ novæ umbris corporum terreſtrium prorſus ſimiles (§. 125 & ſeqq. & §. 157. *Optic.*).

OBSERVATIO 12.

473. Hevelius (s) *diſtinctis vicibus ſe expertum ſcribit, licet cœlo exiſtente undique ſereno, ut ſtellulas ſextæ & ſeptimæ magnitudinis animadvertere potuerit, in eadem Lunæ altitudine atque elongatione a terra, dato inſuper uno eodemque egregio teleſcopio, Lunam ejusque maculas non omni tempore æque lucidas, ſerenas & perſpicuas ſibi apparuiſſe; ſed alio atque alio tempore longe lucidiores, clariores, pурioresque viſas eſſe.*

COROLLARIUM.

474. Ex circumſtantiis obſervationis liquet, rationem phænomeni neque in aëre noſtro, neque in tubo, neque ipſa Luna, neque in oculo ſpectatoris, ſed in aliquo circa Lunam exiſtente quærendam eſſe.

OBSERVATIO 13.

475. Caſſinus (t) *ſæpius obſervavit, figuram Saturni, Jovis & fixarum a Luna occultandorum prope limbum ejus ſive illuminatum, ſive obſcurum ex circulari in ovalem fuiſſe transmutatum: ſæpius etiam in aliis occultationibus nullam figuræ mutationem deprehendit.* Kirchius *filius* (u) *fatetur, cum* A. 1729. *d.* 19. *Sept. occultationem Veneris a Luna obſervaret, ſe per tubum* 18 *pedum diſtincte animadvertiſſe mutationem figuræ*

(s) Cometograph. lib. 7. f 363.
(t) Memoires de l' Acad Royal des Sciences A. 1706. p. m. 127.
(u) in Obſervat. laudatis p. 37.

guræ Veneris, cum proxime ad Lunam accederet. Cum enim antea dimidiata fere appareret, ejus cuspides circa marginem Lunæ evanuisse & discum Veneris fere ellipticum, sed male terminatum apparuisse, non prope marginem vitri ocularis, sed in ipso ejus centro. Simili prorsus modo Sol & Luna in horizonte vaporoso orientes & occidentes non circulares sed elliptici apparent.

COROLLARIUM.

476. Cum ipsa experientia satis constet, Solis & Lunæ figuram circularem in ellipticam mutari propter refractionem in aëre vaporoso factam; haud obscure colligitur, tunc temporis, quando stellarum a Luna occultandarum figura circularis in ellipticam abit, densam circa Lunam extitisse materiam, per quam radii stellarum trajecti refracti fuerunt: in aliis autem casibus, ubi nulla figuræ mutatio facta, eandem rursus abfuisse.

SCHOLION 1.

477. *Hoc phænomenon commode illustratur sequenti experimento. Parieti interno vasis cujuscunque sive plano, sive convexo, sive concavo, paucula cera affigatur circulus chartaceus: aqua affusa, ut radii ex ea in aërem transeuntes refringantur, antequam ad oculum obliquius circulum respicientem deferantur, figura circuli in ellipticam mutata deprehendetur.*

SCHOLION 2.

478. *Cum* A. 1715. *d.* 28. *Jun. occultatio Veneris a Luna facta Parisiis observaretur;* de Malezieu, Cassinus & Maraldus, *neque in figura, neque in motu, neque in colore ullam animadverterunt mutationem: ast* de Louville, Delisle Junior & Chardelonius *colorem prope Lunam admodum sensibiliter immutari viderunt, quod his contradicentibus refractioni in lente factæ illi attribuerunt* (x). *Meretur adeo phænomenon attentionem observatorum in posterum, ut tandem extra omnem controversiam ponatur.*

THEOREMA 4.

479. ***Luna est corpus densum & opacum, multis montibus, vallibus & maribus obsitum.***

Lunam esse densam seu luci imperviam & per se opacam, ex superioribus jam manifestum est (§. 453). Partes autem aliæ aliis depressiores sunt, aliæ ultra reliquam Lunæ superficiem assurgunt (§. 471) notabili admodum intervallo, eæque satis longæ ac amplæ, quia ex tanta distantia, quo Luna a Terra abest, videntur (§. 212. *Optic.*). Sunt adeo in Luna mon-

(x) Histoire de l' Acad. Roy. des Scienc. A. 1715. p. 12 & seqq.

tes ingentes & valles admodum profundæ. Porro in luna dantur tractus ingentes, superficiem prorsus æquabilem habentes & minus luminis reflectentes (§. 468). Quare cum corporum fluidorum superficies ex naturæ ipsorum necessitate sit æquabilis, eademque corpora si fuerint perspicua magnam radiorum partem transmittant, pauciores reflectant; maculæ lunares antiquæ corpora fluida & pellucida sint necesse est, hoc est, cum constanter eædem deprehendantur, maria. Dantur adeo in luna montes, valles & maria.

COROLLARIUM 1.

480. Partes adeo macularum lucidæ, quæ observantur (§. 468), insulæ sunt ac peninsulæ.

COROLLARIUM 2.

481. Et quia in iisdem maculis ac prope earundem limbos partes clariores occurrunt (§. 468); in maribus Lunæ passim scopuli & promontoria dantur.

SCHOLION.

482. *Quo his ratiociniis tanto tutius fidamus*, Hevelius (y) *suadet, ut ex loco quodam alto horizontem visibilem aspiciamus: tunc enim eum æquabili tractu appariturum, ubi planitiem terminat, asperum vero, sinuosum & inæqualem visum iri, si terram montibus & vallibus conspersam stringit.*

COROLLARIUM 1.

483. Quoniam maculæ novæ montibus contiguæ umbris corporum terrestrium prorsus similes (§. 472); dubium quoque non est, quin eædem umbræ sint montium lunarium.

COROLLARIUM 2.

484. Quare cum montes in Luna umbram projiciant; materia lunaris opaca est.

COROLLARIUM 3.

485. Necessario itaque Luna umbram in locum Soli oppositum projicit (§. 125. *Optic.*).

THEOREMA 5.

486. ***Lunam ambit atmosphæra gravis & elastica, in qua vapores aliæque exhalationes ascendunt & unde sub forma roris ac pluviæ denuo in eam recidunt, & fulgura emittuntur.***

Lumine solari prorsus deficiente, circa lunam annulus lucidus comparet, peripheriæ lunæ parallelus (§. 454): datur ergo circa lunam

(y) Selenogr. c. 6. f. 148.

nam fluidum aliquod, quod figuram ejus assumit, radiosque solares incidentes refringit atque reflectit. Fluidum illud inferius prope Lunam densius, superius vero rarius, quia splendor prope lunam maximus, versus peripheriam suam continuo sensim sensimque decrescit (§. *cit.*). Tale fluidum cum sit aër tellurem nostrum ambiens (§. 154. *Aërom.*); circa lunam quoque aërem dari manifestum est. Et quoniam diversa aëris densitas ab ejus gravitate & elasticitate pendet (§. 30. 154. *Aërom.*); non dubitandum, quin etiam diversa densitas in aëre lunari easdem causas agnoscat. Est adeo aër lunaris gravis & elasticus. *Quod erat primum.*

Enimvero aër lunaris non eadem constanter pelluciditate gaudet (§. 473), limbum Solis tremere facit (§. 454), stellarum figuras circulares interdum in ovalem mutat (§. 475). Quamobrem cum eadem phænomena in aëre nostro observentur, quando vaporibus oppletur (§. 412. 419. 475); haud obscure intelligitur, eo tempore, quo in atmosphæra lunari phænomena ista conspiciuntur, eam vaporibus & exhalationibus oppletam esse. *Quod erat secundum.*

Quoniam tamen alio tempore aer lunaris denuo perspicuus evadit (§. 475); vapores ex eo in lunam rursus præcipitentur opus est, adeoque vel ros decidit, vel pluit, vel ningit. *Quod erat tertium.*

Quod vero etiam subinde fulgura emittantur, ex observatione liquet (§. 454). *Quod erat quintum.*

THEOREMA 6.

487. *Luna est corpus telluri simillimum,*

Est enim corpus opacum & minime perspicuum (§. 453): dantur in ea montes, valles & maria (§. 479) cum insulis, peninsulis (§. 480), scopulis & promontoriis (§. 481): datur denique circa eam atmosphæra alterabilis, in qua vapores & exhalationes ascendunt & unde in lunam denuo recidunt, ac unde fulgura emittuntur (§. 486). Patet adeo, lunam esse corpus telluri simillimum.

SCHOLION.

488. *Cum in tellure nostra rorem ac pluviam in terram decidere constet, ut plantæ vegetentur; plantæ cum arboribus crescant & semina atque fructus edant, ut animalia & homines nutriri queant; nihil profecto obstat, quo minus etiam in luna plantas & arbores, animalia & homines admittamus. Nihil frustra facit natura, sibi ubique similis: cur*

cur ergo frustra in luna produxerit elementa ad vegetationem plantarum & arborum atque ad propagationem animalium & hominum necessaria? aut quem, quæso, alium in finem? Ast non modo rationi consentaneum est, lunam habitari, verum etiam fidei, quæ hominum credulitati obnoxia non est. Fide nimirum tenemus, Deum omnia condidisse ad manifestandum perfectiones suas, scientiam, sapientiam, potentiam, bonitatem. Cumque adeo terricolæ corpora Lunæ partialia distincte cognoscere nequeant, ne Deus sapientissimus fine excidat, creaturæ rationis capaces & corporibus instructæ, ut Lunam incolant opus omnino censeri debet. Cæterum novum pondus his argumentis adjicietur, ubi inferius demonstratum fuerit, tellurem nostram esse e planetis unum & medio inter ipsos loco circa Solem ferri, immo ex diversis planetis conspectam nunc Lunæ, nunc Veneris, nunc Jovis, nunc Saturni aut alterius cujusdam stellæ faciem præ se ferre. Similitudo enim planetarum atque telluris tam optica, quam physica sufficiens argumentum ipsi Hugenio *videtur, quo ornatus eorundem terrestri similis inferatur. Ita nimirum* (z): „ Si „ cui *inquit*, in dissecti canis cor„ pore viscera ostenderentur, cor, „ stomachus, pulmones, intestina; „ tum venæ, arteriæ, nervi; etiamsi „ nunquam animalis corpus aper„ tum conspexisset, vix dubitaret, „ quin similis quædam fabrica ac par„ tium varietas in bove, porco cæte„ risque bestiis inesset. Nec si unius „ ex Saturni aut Jovis Comitibus „ naturam cognitam haberemus, „ nonne eadem fere, quæ in illo, „ in cæteris quoque reperiri puta„ remus? Similiterque ex uno quo„ piam cometa, si, quidnam es„ set, perspici posset, eandem omni„ um rationem esse statueremus. „ Itaque plurimum ponderis habet „ illa ex similitudine petita & a re„ bus visis ad non visas producta „ ratio: quam proinde sequentes ex „ planeta uno, quem coram adspici„ mus, de reliquis ejusdem gene„ ris recte conjecturam facie„ mus.

CAPUT

(z) in Cosmotheoro lib. 1. p. m. 16. 17.

CAPUT II.

DE

NATURA PLANETARUM TAM SUPERIORUM, QUAM INFERIORUM EORUMQUE SATELLITUM.

DEFINITIO 1.

489. *Planetæ superiores* dicuntur Saturnus, Jupiter & Mars; *inferiores* Venus & Mercurius. *Satellites* vero sunt planetæ, qui circa alios, tanquam luna circa tellurem nostram, moventur & una cum ipsis ab occasu versus ortum progrediuntur.

SCHOLION.

490. *Ratio denominationis patebit inferius, ubi ostenderimus, Venerem & Mercurium esse Terra viciniorem Soli, Saturnum vero, Jovem & Martem ab eo remotiorem.*

OBSERVATIO 14.

491. *Si Veneris faciem per telescopium contemplemur, raro plena facie splendere deprehenditur, sed phases habet lunaribus simillimas, parte illuminata Soli constanter obversa, directa nimirum in orientem, quando phosphorus est, in occidentem vero, quando hesperus. Similes luminis phases in Mercurio & Marte observantur.*

OBSERVATIO 15.

492. A. 1631. *d.* 7. *Nov.* Petrus Gassendus *prædicente* Keplero *primus, & sequentibus temporibus alii complures* Mercurium in Sole *viderunt, qui ejus discum in camera obscura charta candida exceptum* (§. 427) *instar maculæ nigræ & rotundæ trajicere visus est* (a). *Simili modo* Jeremias Horoccius A. 1639. *d.* 24. *Novembr. Venerem in Sole vidit* (b): *quod phænomenon rarissimum antea a nemine observatum, nec ante d.* 25. *Maji*

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

(a) Vid. *Gassendi* epistola ad *Schickardum* de Mercurio in Sole viso & Venere invisa, Operum Tom. 6. fol. 45. & seqq. & Tom. 4. f. 499. nec non *Hevelii* Mercurius in Sole visus.

(b) vid. Observationes cœlestes in Operibus posthumis p. 393. & ejusdem Venus in Sole visa, quam *Hevelius* suo Mercurio in Sole viso notis illustratam subjunxit.

A. 1761. alteri cuidam observare licebit.

OBSERVATIO 16.

493. *Celeberrimus* de la Hire A. 1700. *per telescopium 16. pedum in Venere detexit montes lunaribus majores* (c) *disco ejus triplo apparente lunaris nudo oculo visi.*

OBSERVATIO 17.

494. Cassinus *aliquoties duas in Venere maculas observavit* (d). *Idem* A. 1666. *d 3. Martii Bononiæ in Marte per telescopium 16. ac dimidii pedum quatuor maculas, & d. 24. Februarii duas alias majores deprehendit, quas posteriores eodem tempore Romæ per telescopium 35. pedum vidit* Campanus. *Idem* Cassinus A. 1665. *in Jove maculas duas;* A. 1690. *alias duas minores;* A. 1691. *itidem duas conspexit* (e). *In Mercurio vero, qui Soli proximus, ob nimium luminis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus a terra distantiam maculæ nullæ hactenus detegi potuerunt. Nemo maculas Veneris hactenus accuratius delineavit, quam* Blanchinus (f), *quas* A. 1726. *lunaribus amplioribus nudo oculo observabilibus similes per telescopium* 100 *palmorum a* Campano *elaboratum observavit & Celidographiam confecit.*

SCHOLION.

495. *Monet* Blanchinus *observationes instituendas esse diebus a nebula immunibus hora dimidia post crepusculum & eam visus aciem requiri, quæ Lunæ maculis nudo oculo satis distinguendis sufficit.*

COROLLARIUM 1.

496. Ex macularum observationibus collegit *Cassinus* motum vertiginis ♃ 9 hor. 56', ♂ 24 hor. 40' & ♀ 24 horarum.

SCHOLION.

497. Blanchinus *motum vertiginis veneris 24 dierum spatio, additis horis circiter octo absolvi ex suis macularum observationibus demonstrat. Merentur observationes Blanchinianæ repeti ab* Observatoribus *aliis, qui præsidiis tantis instructi sunt, antequam quicquam certi definiatur.*

COROLLARIUM 2.

498. Cum itaque ☉ (§. 422), ♃ ♂ & ♀ (§. 496) motu vertiginis moveantur, observationes autem in ☿ & ♄ ob allatas (§. 494) rationes deficiant, unde eorum vertigo certo concludi pos-

(c) Memoires de l'Acad. Royal. des Sciences A. 1700. p. m. 288. & seqq.
(d) Ozanam Cours de Math. Tom 5. Trait. de Geogr. part. 1. c. 3. p. 84. 85.
(e) Hesperi & Phosphori Novis phænomenis c. 4. f. 38. & seqq.
(f) Ozanam l. c. p. 83. 84.

possit; nihil quidem obstat, quo minus statuamus, Mercurium quoque & Saturnum circa axem suum gyrari.

OBSERVATIO 18.

499. *In Jove observantur duæ fasciæ reliquo ejus disco lucidiores & lineis parallelis terminatæ, nunc latiores, nunc arctiores, nec eadem constanter disci loca occupantes. Fasciam multo latiorem, sed obscuram mediamque disci partem occupantem* A. 1656. *in Marte vidit* Hugenius (g). Cassinus *filius d.* 25. *Martii* A. 1715 *& sequentibus tres istiusmodi fascias in Saturno observavit, ita ut is per telescopium* 118 *pedum ea facie videretur, qua Jupiter per telescopium* 34 *pedum apparet* (h).

OBSERVATIO 19.

500. A. 1609. *circa finem Novembris* Simon Marius, *Marchionum Brandenburgensium Mathematicus, primus omnium tres stellulas circa Jovem gyrantes & cum eo progredientes, mox autem mense Januario & Februario* An. 1610. *quatuor conspexit* (i). *Et in Italia* A. 1610. *d.* 7. *Januar.* Gallilæus *easdem stellulas vidit & eodem adhuc anno observationes suas publicavit* (k): *a quo tempore notissima facta est circumjovialium observatio.*

SCHOLION.

501. *Hi Jovis Satellites a nonnullis dicuntur* Lunæ Joviales; *a* Gallilæo *autem* Sidera Medicæa. *Jovi proximum* Marius *vocat* Mercurium Jovialem, *ab eo secundum* Venerem Jovialem, *tertium* Jovem Jovialem & *quartum denique* Saturnum Jovialem.

OBSERVATIO 20.

502. *Lunæ Joviales cælo sereno evanescunt, Jove inter ipsos atque Solem diametraliter interposito: id quod jam observavit* Simon Marius (l).

COROLLARIUM 1.

503. Privantur adeo lumine, quando radii solares per lineam rectam propagati (§. 46. *Optic.*) a Jove intercipiuntur.

COROLLARIUM 2.

504. Unde patet, eos instar Lunæ nostræ esse corpora opaca & a Sole illuminari.

COROLLARIUM 3.

505. Cum Jupiter Satellites suos pone

(g) in Systemate Saturnino p. 7.
(h) Memoires de l' Acad. Roy. des Scienc. A. 1715. p. m. 56.
(i) Vid. præfatio ad Mundum Jovialem.
(k) in Nuncio sidereo.
(l) in Mundo Joviali.

pone ipsum constitutos non illustret (§. 502): ipse similiter in parte a Sole aversa omni lumine caret, consequenter cum motu vertiginis gaudeat (§. 496), in omni.

OBSERVATIO 21.

506. *Si lunulæ Jovis inter Jovem atque Solem diametraliter interponuntur, macula rotunda in disco Jovis observatur, quæ interdum Satellite major deprehensa* (m).

COROLLARIUM 1.

507. Quoniam Satellites Jovis sunt corpora opaca & a Sole illuminantur (§. 504); umbram in oppositum Solis projiciunt (§. 125. *Optic.*). Sunt adeo maculæ rotundæ in Jove visæ Satellitum umbræ.

COROLLARUM 2.

508. Quia intersectio umbræ est circulus, satellites autem Jovis sunt Sole minores, ceu infra independenter ab his ostendetur; umbra eorum conica est (§. 468. *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

509. Figura igitur satellitum saltem ad sensum sphærica est (§. 137. *Optic.*).

OBSERVATIO 22.

510. *Si tellure inter Solem & Jovem constituta satellitum aliquis inter Jovem atque Solem similiter consistat, lumini Jovis immersus evanescit. Enimvero* A. 1707. *d.* 26. *Martii* Cl. Maraldus *per telescopium* 34. *pedum quartam Lunularum Jovialium instar maculæ obscuræ per discum Jovis trajicientem miratus est. Quamprimum vero eundem reliquit, Satelles consueto fulgore iterum comparuit. Similem maculam in Jove deprehendit, cum d.* 4. *Aprilis ejusdem anni per telescopium* 17. *pedum Satellitis tertii immersionem in lumen Jovis observaret: cum tamen d.* 11. *Aprilis ejusdem satellitis immersioni denuo attenderet, nullam prorsus maculam deprehendit. Idem phænomenon alio tempore aliquoties vidit etiam* Cassinus. *Præterea &* Cassinus *&* Maraldus *admirandas magnitudinis apparentis mutationes in iisdem Satellitibus non simplici vice annotarunt, etiamsi nulla ratio ex eorum a Jove, Sole ac Tellure distantia dari posset. E. gr. quartus Satellitum, qui sæpissime omnium minimus apparet, interdum maximus videtur. Similiter tertius, qui ordinarie omnium maximus, interdum tamen reliquis æqualis, immo iisdem minor videtur* (n).

CO-

(m) Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences A. 1707. P. m. 382

(n) Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences A. 1707. p. 352. 383.

COROLLARIUM.

511. Quoniam satellites Jovis a Sole collustrantur, etiam cum in lumen Joviale immerguntur, hoc tamen non obstante obscuræ apparent (§. 510); mutationes in atmosphæris eorundem contingant necesse est, quæ impediant, quo minus radii solares a tota superficie æqualiter reflectantur.

SCHOLION.

512. *Facile apparet, eandem esse rationem, cur umbra eorundem interdum major ipsis deprehendatur* (§. 506).

OBSERVATIO 13.

513. *Saturnus tot formas prorsus mirabiles induere videtur, ut causam tantæ varietatis diu detegere non potuerint Astronomi peritissimi.* Hugenius *exquisitioribus telescopiis Saturnum aggressus tres potissimum phases detexit* (o). *Primo enim A.1656. a d.16. Jan. usque ad 17. Junii Saturnum vidit* rotundum, *transversa linea, cæteris disci partibus paulo obscuriore, ex æquo medium ejus discum secante. Eodem anno die 13. Octobris vidit* brachiatum, *instructum nempe duobus brachiis, recta utrinque extensis, prope limbum Saturni latioribus, & minus intensa luce quam versus extremas cuspides lucentibus, fascia obscuriore paulo infra brachiorum lineam comparente. Tandem* A 1657. *d.* 17. *Decembris* ansatum *vidit*, brachia *prope discum adaperta ac bifida inveniens, linea obscura versus inferiora ulterius promota: quas ansas latius adhuc patentes a die* 10. *Novembr.* A.1658. *usque ad* 26. *Martii* A. 1659. *omnium distinctissime conspexit. Ceterum notatu dignum, quod intra ansas Saturni fixas conspicere liceat.*

Tab. V. Fig. 51. n. 1.

n. 2.

n. 3.

SCHOLION 1.

514. *Equidem antea Astronomi phases Saturni alias mirabiliores annotarunt. Certe* Hevelius (p) *numerat Saturnum* 1. monosphæricum, 2. trisphæricum, 3. sphæricoansatum, 4. ellipticoansatum, 5. sphæricocuspidatum, *quas ipsas phases denuo in alias subdistinguit. Enimvero* Hugenius (q) *clarissime ostendit, imperfectioni tuborum deberi ejusmodi apparitionum monstra. Cum enim* A. 1655. *mense Aprili ac Majo Saturnum brachiatum observasset*, Ricciolus & Hevelius tricorporeum *viderant; ipsique* Hugenio *brachiorum loco apparuere duo globuli, telescopio 5 aut 6 pedum Saturni faciem contemplanti.*

(o) in Systemate Saturnino p. 16 & seqq.
(p) in Opusculo de Saturni nativa facie.
(q) in Systemate Saturnino p. 35.

COROLLARIUM 1.

Tab. V. Fig. 52. 516. Ex observationibus suis *Hugenius* recte infert: Saturnum cingi annulo tenui plano, nusquam cohærente, ad eclipticam inclinato: hoc nimirum admisso ratio phænomenorum manifesta.

SCHOLION 2.

517. *Sane non modo* Hugenii, *sed &* Cassini *observationes summa cum industria instituta abunde confirmarunt phases Saturni tales apparere, quales ex sua theoria eas prædixerat* Hugenius (r). *Accuratissimæ annuli hujus observationes* A. 1715 *&* 1716. *dedere* Cassinus *filius atque* Maraldus (s).

COROLLARIUM 2.

518. Cum fascia obscura in disco Saturni appareat, annulo ita constituto, ut nec brachia, nec ansæ appareant (§. 513); manifestum est, eam esse marginem annuli.

OBSERVATIO 24.

519. Hugenius A. 1655. *d.* 25. *Martii primus omnium per telescopia* 12 *&* 23 *pedum Satellitem aliquem Saturni observavit* (t): *postea accessere quatuor alii a* Cassino *diverso tempore detecti. Nempe duos, qui Saturno proximi, per telescopia* Campani 100 & 136. *pedum* A. 1684. *mense Martio primum reperit; tertio jam ante* A. 1672. *d.* 23. *Decembris per telescopium* Campani 35 *pedum & quinto* (*quartus enim* Hugenianus *est*) A. 1671. *circa finem Octobris per telescopium* 17 *pedum viso. Duos intimos postea quoque deprehendit per telescopia* Campani 47 *&* 34. *pedum atque per telescopia* Borelli 40 *&* 70 *pedum, & denique per telescopia* Artouquellii 80, 155 *&* 220 *pedum* (u). *Recentissime in Anglia* Jacobus Pound *una cum aliis per telescopium* Hugenianum *Satellites hosce Saturni observavit, de quibus paulo ante dubitare cœperat* Derhamus (x).

SCHOLION.

519. *Præter* 4 *Jovis &* 5 *Saturni comites alii observati non sunt: neque facile spes superest, fore ut plures in posterum detegantur, quia* Cassinus *usus est telescopiis & maximis, & exquisitissimis. Equidem* Antonius Maria Schyrlæus de Rheita, *Capucinus Coloniensis, præter sidera Medicæa alios quinque circa Jovem Satellites die* 29 *Decembr.* A. 1642. *sibi deprehendisse visus est, quos in honorem* Urbani VIII. *Pon-*

(r) Transact. Anglic. n. 65. p. 2093. & n. 78. p. 3024. & seqq. n. 128. p. 690.
(s) Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1715. p. m. 13. 54. & A. 1716. p. m. 223.
(t) Vid. Systema Saturninum p. 9. & seqq.
(u) Transact. Anglic. n. 92. p. 5178. & seqq. n. 92. p. 5181. n. 181. p. 79.
(x) Transact. Anglic. N. 355. p. 768. & N. 356. p. 776.

Pontificis maximi, Sidera Urbanoctaviana *appellavit. Sed cum observatio per* Gabrielem Naudæum *cum* Gassendo *communicaretur, qui eodem die Jovem observaverat: statim is deprehendit, virum religiosum quinque stellas fixas in fusione aquæ Aquarii, quæ in catalogo* Tychonis *sunt* 24. 25. 26. 27 & 28, *cum satellitibus Jovis confudisse: unde etiam non mirum, quod motu reliquis contrario (qualis nimirum in fixis apparet) ab occasu in ortum progredi visæ reliquisque majores apparuerint* (y). *Equidem* de Rheita *errorem suum agnoscere noluit* (z); *nemo tamen postea Satellites istos reperire in cælo potuit.*

OBSERVATIO 25.

520. *Satellitem quartum* Maraldus *atque* Cassinus *filius die* 25. *Martii h.* 11. A. 1715. *cælo sereno evanescere observarunt, Saturno inter ipsum atque Solem diametraliter interposito* (a).

COROLLARIUM 1.

521. Privatur adeo lumine, quando radii solares per lineam rectam propagati (§. 46. *Optic.*) a Saturno intercipiuntur.

COROLLARIUM 2.

522. Est igitur instar Lunæ corpus opacum & a Sole illuminatur.

COROLLARIUM 3.

523. Cum Saturnus Satellitem pone ipsum constitutum non illustret (§. 520), ipse similiter in parte a Sole aversa omni lumine caret.

THEOREMA 7.

524. *Saturnus, Jupiter, Mars, Venus & Mercurius, nec non Saturni ac Jovis satellites sunt corpora Lunæ similia.*

Quoniam in Venere, Mercurio & Marte nonnisi ea pars disci splendet, quæ a Sole illuminatur (§. 491), præterea ♀ atque ☿ inter Solem & Tellurem constituti instar maculæ obscuræ in disco Solis comparent (§. 492); ☿, ♀ atque ♂ esse corpora opaca lumine Solis mutuatitio splendentia patet. Idem de ♃ manifestum est, quia lumine privatur ea parte, quam umbra Satellitum attingit (§. 506) & altero hemisphaerio, quod a Sole aversum, constanter lumine caret (§. 505). Ejus vero Satellites itidem opacos esse lumenque Solis reflectere, supra jam ostensum (§. 504). Non absimili argumento concluditur, Saturnum esse corpus instar Lunæ opa-

(y) Vid. epistola Gassendi ad Gabr. Naudæum de Novem stellis circa Jovem visis. Oper. Tom. 4. f. 511. & seqq.

(z) Vid. Oculus Enochi atque Eliæ lib. 4. c. 1. membr. 2. f. 171.

(a) Memoires de l'Acad. Royal. des Scienc. A. 1715. p. m. 57.

opacum lumenque Solis reflectere: id quod de uno Satellite cum in ſuperioribus etiam evictum fuerint (§. 522), per analogiam haud fallaci argumento de cæteris quoque concluditur.

Porro cum lumen ſolare per Mercurium & Venerem non transpareat, quando ſub eo conſtituuntur (§. 492); corpora denſa minusque pellucida ſint necesſe eſt (§. 12. Optic.), quod idem de Jove & Saturno umbra ſatellites obſcurantibus patet (§. 504. 522).

Ex maculis ♀. ♂ & ♃ variabilibus apparet, dari circa hos planetas atmoſphæram alterabilem, ceu ex iis manifeſtum eſt, quæ ſupra ad theor. 5. (§. 486) oſtendimus. Eadem atmoſphæræ alterabilitas ſimili argumento de Jovis ſatellitibus infertur (§. 511), adeoque ob ſimilitudinem reliquam etiam de planetis reliquis concluditur.

Simili modo ob montes in ♀ deprehenſos (§. 493) tales quoque in reliquis ſupponere licet.

Cum adeo ♄, ♃, utriusque ſatellites, ♂, ♀ & ☿ ſint corpora opaca, lumine Solis mutuatitio reſplendeſcentia, montibus prædita & atmoſphæra alterabili cincta, conſequenter etiam aquæ in iisdem exiſtant, quæ per obſervationem macularum conſtantium in Venere patent (§. 494) corpora lunæ ſimillima ſunt (§. 479. 486).

COROLLARIUM I.

525. Luna eſt corpus telluri noſtro ſimile (§. 487): ſunt ergo & planetæ reliqui omnes eidem telluri ſimiles.

COROLLARIUM 2.

526. Nil adeo obſtat, quo minus ſtatuamus, planetas omnes ab animalibus atque hominibus habitari (§. 488).

SCHOLION.

527. *De planetarum incolis multa probabiliter oſtendit* Hugenius *in Coſmotheoro, ex ſimilitudine planetarum cum terra, quod nempe inſtar hujus ſint corpora opaca, denſa, rotunda, gravia, & a Sole illuminentur ac calefiant, eumque in finem circa ipſum moveantur, argumentatus. Sed multa etiam aliis argumentis inferri poterant. E. gr. Dubio fere penes me caret, Jovicolas eſſe Terricolis multo majores, ex genere nempe gigantum. Nimirum pupilla dilatatur in lumine fortiori, coarctatur in debiliori* (§. 56. Optic.). *Quare cum in Jove lux meridiana in eadem altitudine Solis ſit debilior, quam in tellure, ob majorem nempe ♃ a Sole diſtantiam inferius independenter ab his oſtendendam* (§. 87. Opt.)*: pupilla in maxima conſtrictione, adeoque etiam per ſe, major eſſe debet in Jovicolis, quam in terricolis. Enimvero experientia loquitur, pupillam reliquo bulbo oculi, oculum*

lum vero reliquo corpori esse proportionatum, ut nempe animantia oculos majores habeant, quorum pupilla major est, & corpore majori gaudeant, quorum oculi sunt majores: quare corpora Jovicolarum majora esse debent corporibus terricolarum. Et sane non desunt mihi rationes, quæ suadent, Jovicolas statura æquales esse Ogi *Regi Basan, cujus lectus ferreus,* Mose *autore* (b), *habuit longitudinem novem, latitudinem quatuor cubitorum. Patebit enim inferius, distantiam* ♃ *a Sole esse ad distantiam Telluris ab eodem ut* 26 *ad* 5. *Est igitur intensitas luminis Solaris in Jove ad intensitatem in Tellure in ratione duplicata* 5 *ad* 26 (§. 87. Optic.). *Sed per experientiam constat, pupillam dilatari in ratione majore, quam intensitas luminis decrescit, alias enim objecti remoti claritas eadem apparere posset, quæ vicinioris, quod tamen videtur obscurius: diameter adeo pupillæ in statu maximæ contractionis aut dilationis terricolarum est ad diametrum pupillæ in statu simili Jovicolarum in ratione majore quam* 5 *ad* 26 (§ 409. Geom.). *Quodsi eandem ponamus ut* 10 *ad* 26 *seu* 5 *ad* 13; *cum statura terricolarum ordinaria sit pedum Parisinorum* $5\frac{7}{31}$ *seu particularum* 7515, *cujusmodi pes regius Parisinus continet* 1440 (*tantam nimirum meam reperio*), *reperietur statura ordinaria Jovicolarum* 19539 *istiusmodi particularum, hoc est, pedum* $13\frac{819}{1440}$. *Quoniam cubitus Hebræus juxta* Cl. Eisenschmidium (c) *est particularum* 2384 *pedis Parisini, longitudo lecti gigantis a Mose commemorati est* 21456: *unde si subducatur: pes unus partium* 1440, *relinquitur longitudo gigantis* 20016 *seu pedum* $13\frac{1296}{1440}$, *cui quam proxime convenit longitudo Jovicolarum pedum* $13\frac{819}{1440}$. *Ceterum planetarum incolas jam agnovere veteres &* Metrodorus (d) *affirmat haud minus absurdum esse in infinito spatio mundum unicum tantum collocare ac in amplissimo campo unicam solummodo spicam nasci, asserere & credere. Eandem sententiam multis rationibus adstruit* Cusanus, *Cardinalis vir gravis & doctus* (e): *cujus autoritate permotus*, de Reita *e Capucinorum familia* (f), *in eandem inclinare videtur, ut alios taceamus; apertius vero eam amplectitur* R. P. Castellus *e Societate Jesu* (g).

(b) Deuter. III. 11.
(c) de ponderibus & mensuris veterum R. G. & H. Sect. 3. c. 4. p. 119.
(d) de placit. philos. c. 5.
(e) de docta ignorantia lib. 2. c. 11.
(f) in Oculo Enochi atque Eliæ lib. 4. c. 1. membr. 3. f. 178 & seqq.
(g) Traité de Phys. sur la pesanteur universelle des corps Tom. 1. lib. 5. c. 6. p. 575. 567.

CAPUT III.

DE

SYSTEMATE PLANETARIO.

DEFINITIO 2.

528. *Per Systema Planetarium* intelligo ordinem, quo planetæ cum Sole in universo collocati sunt.

DEFINITIO 3.

529. *Planetæ primarii* dicuntur, qui circa Solem moventur: *secundarii* sunt, qui circa alium planetam feruntur.

COROLLARIUM.

530. Sunt adeo Satellites Jovis atque Saturni planetæ secundarii (§. 500 518).

DEFINITIO 4.

531. *Directio planetæ* est motus in signa consequentia eclipticæ, nempe ex ♈ in ♉, ex ♉ in ♊ & ita porro.

DEFINITIO 5.

532. *Statio* est apparentia in eodem cœli puncto per aliquot dies.

DEFINITIO 6.

533. *Retrogradatio* est motus in signa antecedentia eclipticæ, e. gr. ex ♊ in ♉.

DEFINITIO 7.

534. *Planeta* vocatur *directus*, quando in signa consequentia movetur; *stationarius*, quando in eodem cœli puncto immobilis hærere videtur; *retrogradus* denique, quando in antecedentia movetur.

DEFINITIO 8.

535. *Synodus*, *conjunctio* seu *coitus* stellarum est concursus earundem in eodem cœli loco optico.

DEFINITIO 9.

536. *Oppositio* est distantia duarum stellarum per semissem circuli, seu intervallo 180 graduum.

OBSERVATIO 26.

537. *Planetæ omnes Soli opponuntur, exceptis Venere & Mercurio, quorum illa nunquam ultra gradus 47, hic nunquam ultra 28 a Sole digreditur. Uterque planeta a maxima elongatione rursus ad Solem regreditur & ad conjunctionem denuo properat.*

OB-

OBSERVATIO 27.

538. *Venus plena facie splendet, si post conjunctionem fuerit hesperus, cum elongatione a Sole lumen decrescit, in digressione maxima dimidiata cernitur. Dum inde ad Solem regreditur lumen ulterius decrescit ita ut instar falcis appareat, cum mox heliace occidit. Quando coitu cum Sole celebrato phosphorus evadit, falcata rursus conspicitur, in maxima digressione denuo dimidiata. Dum inde ad Solem regreditur, lumen continuo crescit, donec paulo ante conjunctionem plena facie splendeat. Observationes speciales recenset* Hevelius (h).

COROLLARIUM.

539. In altera itaque conjunctione Venus lumine plena; in altera vero omni lumine cassa.

OBSERVATIO 28.

540. *Phases Mercurii eædem prorsus observantur, quæ Veneris, quemadmodum denuo annotatum est ab* Hevelio (i) *& cuilibet ad oculum constabit, si per telescopium melioris notæ cœlo non invito faciem ejus contempletur.*

OBSERVATIO 29.

541. *Planetæ interdum se mutuo occultant. Certe* Mœstlinus A. 1591. *die* 9. *Jan. Jovem a Marte coloris ignei rutilantis;* A. 1599. *d.* 3. *Octobr. hor.* 5. *matutina Martem a Venere coloris candidi contectum vidit* (k). A. 1671. *d.* 1. *Jun.* Hevelius *&* A. 1678. *die* 7. *Februar.* Bullialdus *Saturnum;* A. 1679. *d.* 5. *Jun.* Hevelius *Jovem &* A. 1676. *d.* 21. *Aug.* Flamsteedius, Hallejus, Hevelius *Martem a Luna obtectum conspexerunt* (l). Copernicus A. 1529. *die* 12. *Martii vespere Venerem a Luna tectam observavit* (m).

OBSERVATIO. 30.

542. *Fixarum a Luna occultationes sæpius contingunt, ut adeo observationibus specialibus recensendis supersedere possimus. Sed fixarum aliquæ etiam a planetis reliquis quanquam rarius, occultatæ leguntur. Sane* A. 241. *ante Christum*

(h) in Proleg. Selenogr. f. 69 & seqq.
(i) loc. cit. f. 74 & seqq.
(k) Keplerus in Astron. Optic. p. 305.
(l) Transaction. Anglic. num. 78. pag. 3027. 3031. num. 129. p. 721. & seqq. num. 139. p. 969. num. 1. p. 29.
(m) Revolut. cœlest. lib. 5. c. 23.

ftum d. 4. *Septembr. mane Jupiter Afellum Auftrinum &* A. C. 1633. d. 19. *Decembris mane, obfervante* Gaffendo, *Propoda feu ftellam ante pedes Geminorum; Mars* A. 271. *ante Chriftum die* 18. *Jan. referente* Ptolemæo, *borealem in fronte Scorpii & recentius, obfervante* Gaffendo, *extremam in ala Virginis; Venus* A. 1574. d. 16. *Sept. hor.* 4. *mat. &* A. 1598. d. 25. *Sept. hor.* 1. *mat. obfervante* Mœftlino, *Regulum texit* (n). Kirchius A. 1679. d. 7. *Januar. mane ftellam fextæ magnitudinis in auftrali cornu Tauri, quæ apud* Bayerum *littera* o *notatur, a Saturno occultatam obfervavit* (o).

OBSERVATIO 31.

543. Caffinus, *referente* Gregorio (p) *primam arietis aliquando in binas æquales intervallo diametri utriusvis diftantes divifam confpexit. Idem phænomenon de præcedente capite geminorum obfervavit: immo plejadum aliquas & mediam in Orionis gladio quandoque triplas, aut etiam quadruplas apparentes vidit.*

PROBLEMA 2.

544. *Micrometrum conftruere, hoc eft inftrumentum, quo res minutas in cœlo exacte dimetiri licet.*

RESOLUTIO.

1. In foco tubi aftronomici aptetur annulus orichalceus feu ferreus AB cum cochleis fœminis fibi mutuo diametraliter oppofitis. Tab. V. Fig. 53.
2. Inferantur duæ cochleæ mares CE & FD ejus longitudinis, ut verfatæ intra tubum fefe contingere poffint.

Dico, tali inftrumento res minutas in cœlo dimetiri licere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim objecta per tubum vifa cochleis contigua appareant (§. 374. *Dioptr.*), fi ea tamdiu verfentur, donec duo puncta oppofita contingant, quorum diftantiam metiri debes, illico conftabit, quot cochlearum ftriæ ifti intervallo refpondeant. Ut autem conftet, quot fcrupula fecunda fingulis ftriis conveniant, tubo in cœlum converfo verfentur cochleæ, donec duas fixas, quarum diftantia in fcrupulis fecundis exacte cognita (§. 225), contingant, & notetur numerus ftriarum ifti intervallo refpondens. Ita nimirum per regulam trium

(n) Ricciolus in Almag. Nov. lib. 7. fect. 6. c. 14. f. 721.
(o) Vid. Mifcellan. Berolin. p. 205 & feqq.
(p) in Element. Aftron. Phyfic. & Geometr. lib. 3. prop. 54. f. 274.

trium construetur tabella scrupulorum singulis striis convenientium, consequenter distantia duorum quorumcunque punctorum exigua ope hujus instrumenti, tabella constructa, inveniri potest. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

545. *Tabella, de qua in demonstratione diximus, construi etiam poterit, si ope horologii oscillatorii observetur tempus, quod elabitur, dum stella in æquatore constituta ab uno cochleæ extremo usque ad alterum, tubo immoto, progreditur, atque in scrupula æquatoris convertatur. Utimur etiam commode fixarum loco Lunæ vel Solis diametro apparente.*

SCHOLION 2.

546. *Simplicissimum hoc micrometri genus, quod a quovis fabro ferrario facile parari potest, excogitavit* Kirchius A 1677. *occultationem fixæ a ♄ factam observaturus* (q). *Alia Astronomis Gallis usitata describit* Cl. de la Hire (r), *& alibi alia occurrunt* (s). *Ceterum* Kirchianum *agnatum est instrumento, quo* Hugenius (t) *diametros apparentes planetarum metitus, & quod micrometri inveniendi ansam dedisse videtur.*

PROBLEMA 3.

547. *Observare diametrum Solis apparentem.*

RESOLUTIO.

1. Quadrante exactissime diviso & dioptris telescopicis instructo observetur altitudo meridiana limbi solaris tam superioris, quam inferioris.
2. Altitudo inferior subducatur a superiore, differentia erit angulus, sub quo diameter Solis e terra videtur.

Aliter.

1. Super linea meridiana erigantur duo fila perpendicularia & capite immoto observetur transitus Solis per meridianum.
2. Quamprimum limbus ☉ ad fila appellit, notetur momentum temporis, quod ab horologio oscillatorio indicatur.
3. Quando limbus oppositus eadem relinquit, notetur similiter tempus, quod index horologii monstrat.
4. Tempus prius a posteriore subducatur, residuum erit tempus,

(q) Vid præfation. ad Calendarium A 1696. & Miscell. Berolin, p. 202, & seqq.
(r) in Tabula Astron part. 2. p. 6? & seqq.
(s) Vid. Lexicon meum Mathem. sub voce *Micrometrum*.
(t) in Systemate Saturn. p 52.

quo diameter ⊙ per meridianum transit.

5. Si Sol fuerit in æquatore, tempus modo inventum convertatur in Scrupula æquatoris (§. 212), ita prodibit arcus, qui metitur angulum, sub quo diameter Solis videtur.

Tab. VI. Fig. 54. 6. Si Sol fuerit extra æquatorem, arcus inventus est circuli paralleli, in quo Sol commoratur, similis arcui æquatoris, qui interea per meridianum transit (§. 45. *Sphæric.*). Quare cum ob parallelismum rectarum CQ & TA angulus CAT sit angulo ACQ (§. 233. *Geom.*), hoc est, declinationi AQ (§. 57. *Geom.* & §. 76. *Astron.*) æqualis; radius æquatoris AC est ad radium paralleli AT ut sinus totus ad cosinum declinationis seu anguli ACT (§. 33 *Trigon.*). Sed arcus similes paralleli & æquatoris in eadem ratione existunt (§. 412. *Geom.* & §. 171. *Arithm.*): ope igitur ejusdem in scrupula æquatoris convertuntur scrupula paralleli (§. 302. *Arithm.*), quæ diametrum Solis apparentem produnt ut ante.

PROBLEMA 4.

548. *Diametrum apparentem Solis, Lunæ ac stellæ cujuscunque observare.*

RESOLUTIO.

1. Convertatur in Solem helioscopium (§. 467. *Dioptr.*), in Lunam & stellas tubus astronomicus (§. 358. *Dioptr.*), micrometro instructus (§. 544).
2. Cochleæ micrometri versentur, donec utrinque limbum sideris contingant.
3. Notetur numerus spirarum intervallo intra cochleas in tubo relicto conveniens.
4. Hic denique ope tabellæ modo supra præscripto (§. *cit.*) constructæ convertatur in scrupula æquatoris, qui semidiametrum apparentem prodent.

OBSERVATIO 32.

549. *Diameter Solis, Lunæ & Planetarum tam inferiorum, quam superiorum non omni tempore eadem deprehenditur; sed in singulis ad certum usque terminum crescit iterumque decrescit. Inprimis vero notabile est, Planetas superiores multo majores apparere, si fuerint acronychii seu in oppositione cum Sole, quam prope conjunctionem cum eodem; planetas vero inferiores majores videri, si lumine fuerint dimi-*

diminuti, quam ubi aucti extiterint. Martis inprimis acronychii diameter octuplo, immo juxta Ricciolum (u) *noncuplo major apparet, quam si prope conjunctionem in eodem cœli loco conspiceretur, ita ut* A. 1529 *mense Julio & Augusto ob prodigiosam magnitudinem novum sidus crederetur* (x).

COROLLARIUM 1.

550. Planetarum distantia a Terra non semper eadem (§. 371. *Optic.*).

COROLLARIUM 2.

551. Planetæ superiores sunt terræ propiores in oppositione cum Sole, quam circa conjunctionem (§. *cit.*); Mars inprimis octuplo, immo noncuplo propior est telluri in oppositione, quam circa conjunctionem cum Sole (§. 212. *Optic.*).

COROLLARIUM 3.

552. Planetæ inferiores terræ propiores sunt, si lumine diminuti, quam si aucti fuerint (§. 371. *Optic.*).

OBSERVATIO 33.

553. *Diametrum Solis apparentem observarunt*

		Maximam		*Mediam*		*Minimam*	
Ptolemæus	(y)	33′	20″	32′	18″	31′	20′
Tycho	(z)	32	0	31	0	30	0
Keplerus	(a)	31	4	30	30	30	0
Ricciolus	(b)	32	8	31	40	31	0
Cassinus	(c)	32	10	31	40	31	8
de la Hire	(d)	32	43	32	10	31	38

Observatur autem hodie diameter minima, quando Sol existit in ♋; maxima, quando in ♑ hæret.

COROLLARIUM.

554. Maxima adeo Solis a terra distantia hodie in ♋ est, minima in ♑ (§. 211. *Optic.*).

OBSERVATIO 34.

555. *De Luna notatu dignum est quod duplex observetur incrementum & decrementum diametri appa-*

(u) in Almagest. Nov. lib. 7. sect. 6. c. 10. f. 713.
(x) Keplerus in Astronom. Optic. c. 10. p. 333.
(y) Almag. lib. 5. c. 14. f. m. 117.
(z) Progymnasm. lib. 1. c. 1. p. m. 135.
(a) in Tab. Rudolph. f. 92.
(b) Astron. Reform. lib. 1. c. 12. f. 38
(c) apud Ricciolum loc. cit.
(d) in Tab. Astron. p. 10.

apparentis, alterum in conjunctionibus & oppositionibus cum Sole, alterum in quadraturis. Est nempe maxima Lunæ diameter apparens in illis minor maxima in hisce, & minima in illis minor itidem minima in hisce. Sane in priori casu statuunt

	Minimam	*Maximam*
Ptolemæus (e)	31′. 20″	35′. 20″
Tycho *in conj.*	25. 36	28. 48
(f) *in Oppos.*	32. 0	36. 0
Keplerus (g)	30. 0	32. 44
de la Hire (h)	29. 30	33. 30

In casu autem posteriore ponunt

	Minimam	*Maximam*
Ptolemæus	42′. 8″	55. 0
Tycho	32. 32	36. 0

COROLLARIUM.

556. Luna in eodem orbitæ suæ puncto a terra magis distat in quadraturis, quam in oppositionibus & conjunctionibus (§. 211. *Optic.*).

OBSERVATIO 35.

557. *Planetarum superiorum diametros apparentes juxta Autores diversos exhibet* Hevelius (i). *Statuunt nempe diametrum*

Maxi-

(e) loco citato.

(f) loco supra citato.

(g) in Rudolphinis f. 89.

(h) in Tab. Astron. p. 27.

(i) in Tractatu de Mercurio in Sole viso f. 161.

		Minim.			Mediam.			Maxim.		
Albategnius	♄	1'.	29''.	13'''	1'.	44''.	13'''	2'.	5''.	59'''
Tycho		1.	34.	0	1.	50.	0	2.	12.	0
Keplerus		0.	21.	0	0.	25.	0	0.	38.	0
Ricciolus		0.	46.	0	0.	57.	0	1.	12	0
Hevelius		0.	14.	10	0.	16.	2	0.	19.	40
Albategnius	♃	2.	9.	25	2.	36.	40	3.	18.	24
Tycho		2.	14.	0	2.	45.	0	3.	59.	0
Keplerus		0.	30.	0	0.	38.	0	0	50.	0
Ricciolus		0.	38.	18	0.	49.	46	1.	8.	46
Hevelius		0.	14.	36	1.	18.	2	0.	24.	22
Albategnius	♂	0.	54.	0	1.	34.	0	6.	10.	0
Tycho		0.	57.	0	1.	40.	0	6.	46.	0
Keplerus		0.	54.	0	1.	34.	0	6.	30.	0
Ricciolus		0.	10.	0	0.	22.	0	1.	32.	0
Hevelius		0.	2.	46	0.	5.	2	0.	20.	50
Albategnius	♀	1.	49.	0	3.	8.	0	16.	42.	0
Tycho		1.	52.	0	3.	15.	0	4.	40.	0
Keplerus		1.	2.	0	1.	48.	0	7.	6.	0
Ricciolus		0.	33.	30	1.	4.	12	4.	8.	0
Hevelius		0.	9.	30	0,	16.	46	1.	5.	58
Albategnius	☿	1.	27.	21	2.	5.	20	3.	41.	45
Tycho		1.	29.	0	2.	10.	0	3.	57.	0
Ricciolus		0.	9.	20	0.	13.	48	0.	25.	12
Hevelius		0.	4.	4	0.	6.	3	0.	11.	48

Christianus Hugenius *methodo exquisitiore diametros planetarum apparentes investigans deprehendit diametrum minimam* ♄ 30'', *annuli ejus* 1' 8'', ♃ 1' 4'', ♂ 30'', ♀ 1' 25'' (k). *Ex his observationibus in* ♄, ♃ & ♀ *accuratissimas judicat*, Hevelius *vero Mercurii diametrum ex eo in Sole observato elicuit.*

(k) in Systemate Saturnino p. 77 & seqq.

SCHOLION.

558. *Ingens discrimen inter veteres & recentiores inde oritur, quod illi, veluti* Albategnius *& ipse adhuc* Tycho, *nudis oculis æstimaverint diametros planetarum; recentiores autem tubis utantur: unde splendor spurius, quem telescopia tollunt, eos exhibuit justo majores.* Ricciolus *equidem telescopiis usus est, sed micrometro caruit, sine quo aut* Hugenii *apparatu isti simillimo diameter planetarum non adeo tuto exploratur* (l). *Observationes itaque* Hugenianæ & Heveliana *circa ☿ reliquis merito præferuntur: quibus adeo & nos in posterum utemur.*

PROBLEMA 4.

559. *Longitudinem & Latitudinem planetæ observare.*

RESOLUTIO.

1. Observetur culminatio planetæ (§. 134) &
2. inveniatur ejus altitudo meridiana (§. 129. 142),
3. noteturque temporis momentum ope horologii oscillatorii, quod inter culminationes planetæ atque fixæ alicujus notæ ascensionis rectæ intercedit.
4. Ex data altitudine meridiana planetæ investigetur ejus declinatio (§. 150), &
5. Ex tempore inter culminationes interjecto & ascensione recta fixæ ascensio recta planetæ (§. 228).
6. Tandem cognitis declinatione & ascensione recta ejus, inveniatur latitudo & longitudo (§. 243).

SCHOLION 1.

560. *Quodsi distantia planetæ a fixa nota ascensionis rectæ observetur* (§. 215); *ejus ascensio recta itidem inveniri potest* (§. 226. 232), *quamvis calculo operosiore.*

SCHOLION 2.

561. *Hoc modo sequentia de motu planetarum proprio patebunt.*

OBSERVATIO 36.

562. *Luna & Sol semper apparent directi.* Sed ♄, ♃, ♂, ♀ & ☿ *plerumque directi, interdum retrogradi, nonnunquam stationarii. Planetæ superiores fiunt retrogradi circa oppositionem cum Sole, duo inferiores circa conjunctionem,* ♄ *stationarius fit in distantia quadrante paulo majore,* ♃ *in distantia* 120 *circiter graduum,* ♂ *in distantia longe majori a Sole:* ♀ *&* ☿ *vero semel vesperi post directionem, altera vice mane post retrogradationem utraque statione Soli propiore digressione maxima.*

OB.

(l) Vid. Astron. Reformatæ lib. 10. c. 1. §. 353. 354.

OBSERVATIO 37.

56 . *Intervalla temporis inter duas retrogradationes intercedentia inæqualia sunt: in ♄ est unius anni circiter ac 13 dierum, in ♃ anni unius & 43 dierum, in ♂ annorum 2, dierum 50, in ♀ anni unius, dierum 220, in ☿ dierum 115. Nempe ♄ est stationarius diebus* 8, ♃ 4, ♂ 2, ♀ $1\frac{1}{2}$, ☿ $\frac{1}{2}$ *circiter: retrogradus ♄ diebus* 140 ♃ 120, ♂ 73, ♀ 42, ☿ 22; *directus denique ♄ diebus* 243, ♃ 284, ♂ 705, ♀ 542, ☿ 93 (m). *Non tamen singulæ singulorum stationes, retrogradationes & directiones constanter inter se prorsus æquales.*

OBSERVATIO 38.

564. *Saturnus motu retrogrado conficit arcum minorem quam Jupiter, Jupiter minorem quam Mars.*

OBSERVATIO 39.

565 *Planetæ omnes cum directi, tum retrogradi non eadem celeritate singulis diebus progrediuntur, estque directio superiorum celerrima in conjunctione cum Sole, retrogradatio in oppositione.*

OBSERVATIO 40.

566. Richerius A.1672 *in insula* Cayennæ *quatuor tantum gradibus ab æquatore distante primus observavit, horologium suum pendulo instructum tardius moveri quam Parisiis, ita ut pendulum simplex esset contrahendum linea una cum quadrante. Circa annum* 1677 *Cel.* Hallejus *reperit horologium suum oscillatorium in insula* S. Helenæ *tardius moveri, quam Londini, & pendulum ideo brevius reddere coactus linea una cum semisse.* A. 1682. D. Varin & D. des Hayes *longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio Regio esse* ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$, *in insula vero Gorea* ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$ *& in insulis Guadaloupa & Martinica* ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$. A. 1697 D. Couplet *Ulysippone pendulum brevius reperit quam Parisiis lineis* $2\frac{1}{2}$ *& Paraibæ lineis* $3\frac{1}{3}$. Annis 1699 & 1700 des Hayes *in insulis Cayennæ & Granadæ longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis deprehendit paulo minorem quam* ped. 3 lin. $6\frac{1}{2}$, *in insula* S. Christophori ped. 3 lin. $6\frac{3}{4}$, *in insula* S. Dominici ped. 3, lin. 7. A. 1704 P. Feuilleus *invenit in Porto-belo in America eandem* ped. 3. lin. $5\frac{7}{12}$, *in insula Martinica* ped. 3 lin. $5\frac{10}{12}$. *Est autem latitudo Paraibæ* 6°38' *ad au-*

 strum,

(m) Ricciolus in Almag. Nov. lib. 7, sect. 5. c. 2. f. 647.

ſtrum, ***Portobeli*** 9° 33′ ***ad boream***, ***inſularum Cayennæ*** 4° 55′. ***Goreæ*** 14° 40′, ***Guadaloupæ*** 14°, ***Martinicæ*** 14° 44′, ***Granadæ*** 12° 6′, ***S. Chriſtophori*** 17° 19′ ***& S. Dominici*** 19° 48′ ***ad boream*** (n).

COROLLARIUM 1.

567. Cum vi harum obſervationum fuerit ſub

Latitudine		Longitudo penduli	
19°	48′	3′	7″
17	19	3	$6\frac{3}{4}$
14	0	3	$6\frac{1}{2}$
14	44	3	$5\frac{10}{12}$
9	33	3	$5\frac{7}{12}$
6	38	3	$4\frac{8}{9}$
4	55	3	$6\frac{1}{2}$

longitudinem penduli ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis cum latitudine locorum ſeu diſtantia ab æquatore decreſcere manifeſtum eſt.

SCHOLION 1.

568. *Patet equidem, quaſdam obſervationes exhibere longitudinem penduli in minori ab æquatore diſtantia majorem, quam in majore; cum tamen omnes in eo conveniant, quod in locis æquatori vicinioribus minor, quam Pariſiis exiſtat, & pleræque, præſertim eæ, quæ recentius data opera & majori cum cura inſtitutæ, in decrementum regulare conſpirent, veritati corollarii noſtri rudiores illæ minime obſtant.*

COROLLARIUM 2.

569. Gravitas ergo corporum minor eſt verſus æquatorem, quám verſus polos & cum acceſſu ad eundem conſtanter decreſcit (§. 389. *Mechan.*).

SCHOLION 2.

570. *Equidem* Cl. de la Hire *cum obſervaſſet, virgam ferream, quæ hieme fuerat ſex pedum, Soli æſtivo expoſitam contracto calore majore, quam qui externarum partium corporis humani ſolet,* ⅓ *unius lineæ factam fuiſſe longiorem, mutationem penduli majori prope æquatorem calori tribuit* (o); *ſed bene jam monuit Vir ſummus* Newtonus; *quia virga penduli in horologio oſcillatorio, quæ Soli expoſita non eſt, calorem æqualem calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem nunquam concipit, differentiam totam calori attribui non poſſe* (p): *id quod etiam ita viſum eſt Celeberrimo* Bernoullio (q).

THEOREMA 8.

571. ***Motus Solis eodem modo e Tellure ſpectabitur, ſive ipſe circa terram intra orbitam quieſcentem revera moveatur, ſive Terra circa Solem quieſcentem feratur.***

DEMONSTRATIO.

Sit enim terra in T & ☉ in 1: Tab.
apparebit is in o ♈. Progrediatur VI.
☉ in orbita, quæ terram ambit, ex 1 Fig.
in 55.

(n) Memoires de l' Acad. Royal. des Scienc. A. 1700. p. m. 222 & ſeqq. Conf. Newtoni Princip. Philoſ. Natur. Mathem. lib. 3 prop. 20 p. 418 & ſeqq. edit. tert.

(o) Memoires de l' Acad. Roy des Scienc. A. 1703 p. 347.

(p) in Princ. Phil. loc. cit. p. 386.

(q) in Actis A. 1710 p. 81 & 82.

in 2; videbitur in o ♉. Quodsi ulterius pervenerit in 3; in o ♊ spectabitur. Atque ita secundum signorum successionem in eliptica incedere videbitur e terra.

Tab. VI. Fig. 56. Sit jam terra in 1; Sol S ex eadem spectabitur in ♈; progrediatur illa ex 1 in 12, videbitur Sol terricolis progredi ex ♈ in ♉. Quodsi illa ulterius promoveatur in 11; videbitur Sol ulterius progredi ex ♉ in ♊ & ita porro. Atque ita secundum signorum succesionem apparenter in ecliptica incedet.

Motus ergo Solis idem e Tellure spectatur, sive ipse circa terram, sive terra circa Solem moveatur. *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

572. ***Sol e terra in gradum oppositum ei refertur, in quo ipsa ex Sole spectaretur.***

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstrationis præcedentis parte posteriore.

THEOREMA 10.

Tab. VI. Fig. 55. 573. ***Si planeta P e Tellure T Soli S oppositus spectatur, Terra inter Solem atque Planetam constituitur: si vero Planeta Q Soli S conjunctus apparet, vel Planeta inter Solem & Terram, vel Sol inter Planetam atque Terram constituitur,***

DEMONSTRATIO.

Si planeta Soli oppositus e Tellure spectatur; loca earundem in ecliptica intervallo 180 graduum distant (§. 536), nempe si Planeta P videatur in o ♈, Sol in o ♎ apparet, adeoque Planeta P versus dexteram posito, Sol versus sinistram deprehenditur, consequenter T inter Solem S & Planetam P constituitur. *Quod erat unum.*

Si Planeta Q Soli S conjungitur, e Tellure T in eundem locum opticum, e. gr. in o ♎, uterque refertur (§. 535). Cum adeo versus eandem plagam uterque constituatur; terra T inter Solem & Planetam media non est, sed vel Sol S, vel Planeta Q locum medium occupat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 11.

574. *In una conjunctione Venus atque Mercurius inter Solem & Terram, in altera subsequente Sol inter Terram & Venerem vel Mercurium constituitur.*

DEMONSTRATIO.

In omni conjunctione aut Venus & Mercurius inter Solem & Terram, aut Sol inter Venerem & Mercurium atque Terram constituitur (§. 574). Sed in una conjunctione Venus & Mercurius o- Tab. VI. Fig. 57.

 sten-

ſtendunt Telluri T partem ſui opacam (§. 539. 540) hoc eſt, a Sole averſam N (§. 491): ergo in ea inter Solem & Tellurem conſtituuntur. In altera conjunctione, quæ illam proxime ſequitur, partem lucidam (§. 539. 540), hoc eſt, Soli obverſam M (§. 491) ſpectandam exhibent: ergo tunc temporis Sol S inter ipſos atque Tellurem conſtituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

575. In una adeo conjunctione Venus atque Mercurius Telluri Sole propiores exiſtunt, in altera vero longiori intervallo ab eadem removentur.

THEOREMA 12.

576. *Orbita Veneris atque Mercurii Solem ambit, Tellure extus conſtituta, orbitaque Mercurii intra orbitam Veneris continetur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 58. Sit enim Sol in S, Terra in T & in conjunctione Planeta inferior inter Tellurem & Solem inter B conſtitutus (§. 574): inde adeo certo intervallo SC a Sole S digreditur usque in C, quod ſub angulo STC in Tellure ſpectatur, ex C vero ad Solem regreditur (§. 538) & in altera conjunctione, quæ in D celebratur, Sol S inter Planetam D & Tellurem T conſtituitur (§. 574). Poſt eam planeta ex D rurſus a Sole digreditur intervallo SA, quod ſub angulo ATS e terra ſpectatur & ex A ad conjunctionem tertiam in B regreditur (§. 583), ubi denuo inter Solem S & Tellurem T locum occupat (§. 574). Evidens adeo eſt, Planetas inferiores moveri in orbitis Solem S ambientibus, Terra vero T extra eas conſtituta. *Quod erat unum.*

Jam cum digresſiones Veneris maximæ a Sole SC & SA ſub majoribus angulis STC & ATS ſpectentur, quam digresſiones maximæ Mercurii SF & SG ſub angulis STF & STG viſæ (§. 537); orbita Veneris orbitam Mercurii comprehendit (§. 209. *Optic.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 13.

577. *Orbita Saturni, Jovis atque Martis & Solem & Tellurem ambit, centrum tamen a centro Telluris longius diſtat.*

DEMONSTRATIO.

Planetæ ſuperiores Soli S & conjuncti in Q, & oppoſiti in P e Tellure T ſpectantur (§. 535. 536), ergo Tellus T nunc inter Solem & Planetam conſtituitur, nunc uterque Tab. VI. Fig. 55.

ver-

versus eandem plagam ab ea distat (§. 573). Quare orbita planetarum superiorum Tellurem T ambit. *Quod erat unum.*

Tab. VI. Fig. 57. Porro Planetæ superiores per tubos circa conjunctionem nunquam corniculati apparent, adeoque illo tempore partem sui lucidam M, hoc est, Soli S obversam Telluri T opponunt; Sol adeo inter Terram T & planetam M constituitur. Necesse igitur est, ut orbita planetarum superiorum Solem quoque S ambiat. *Quod erat secundum.*

Tab. VI. Fig. 59. Denique in conjunctione planetæ superioris M cum Sole S distantia TM a Terra T multo major est, quam distantia in oppositione TN, e. gr. in ☍ TM = 8 TN (§. 557). Quare si in C sit centrum adeoque CM = CN = $\frac{9}{2}$ TN in ☍, erit CT $\frac{7}{2}$ TN, consequenter centrum orbitæ C a tellure T valde remotum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 14.

578. *Lunæ orbita Tellurem ambit, sed non Solem.*

DEMONSTRATIO.

In omni conjunctione Luna lumine cassa (§. 455), adeoque partem a Sole aversam Telluri obvertit (§. 456), consequenter in quocunque orbitæ loco inter Solem atque Tellurem constituitur (§. 574). Orbita ergo Lunæ Solem non ambit. *Quod erat unum.*

Cum tamen Luna Soli opponatur (§. 455); tellus T interdum inter Lunam P & Solem S consistit (§. 574), adeoque orbita Lunæ Tellurem ambit. *Quod erat alterum.* Tab. VI. Fig. 55.

THEOREMA 15.

579. *Si Planeta motu vertiginis ab occasu versus ortum intervallo aliquot horarium movetur; Sol cum Terra, Planetis reliquis & omnibus fixis motu contrario intervallo eodem circa ipsum revolvi videtur.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim stella M in Zenith planeticolæ in T constituti & rotetur Planeta T ab occasu versus ortum circa axem suum: aliquo igitur temporis spatio elapso, ad Zenith ipsius T perveniet Sol S, hinc stella I, inde N, ulterius Luna L tandemque denuo stella M puncto Planetæ T imminebit. Planeticolis adeo Sol S cum Luna L & stellis I, N, M &c. motu contrario circa Planetam, quem inhabitant, moveri videtur (§. 366. *Optic.*). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 60.

CO-

COROLLARIUM 1.

580. Cum Planetæ tam ſuperiores, quam inferiores circa axem rotentur (§. 496. 498); planeticolis quibusvis ſphæra mundana cum omnibus ſtellis atque Sole circa planetam, quem inhabitant, ab ortu verſus occaſum moveri videtur, danturque adeo ob hunc motum Solis apparentem in planetis ſingulis dierum atque noctium viciſſitudines.

COROLLARIUM 2.

581. Si Tellus, cui Planetæ omnes ſimiles (§. 525), ipſorum inſtar viginti 4 horarum ſpatio circa axem rotetur; cœlum cum Sole, Luna ac ſtellis univerſis eodem temporis ſpatio ab ortu in occaſum circa eandem moveri videtur.

THEOREMA 16.

Tab. VI. Fig. 54. 582. ***In corporibus mundi totalibus, quæ motu vertiginis gaudent, corporum partialium gravitas verſus æquatorem cum diſtantia ab eodem continuo decreſcit.***

DEMONSTRATIO.

Dum enim motu vertiginis abripiuntur; a centro corporis totalis C recedere conantur (§. 617. *Mechan.*), conſequenter cum æquator QR circulus maximus (§. 48), paralleli autem verſus polos continuo decreſcant (§. 41. *Sphric.*), vis centrifuga in æquatore QR maxima, in parallelo AP minor verſusque polum continuo decreſcit in ratione diametrorum parallelorum ad diametrum æquatoris (§ 623. *Mech.*). Sed vi gravitatis corpora partialia ad centrum totalis nituntur (§. 213. *Mechan.*), adeoque vis centrifuga gravitati contraria. Quare cum illa huic reſiſtat (§. 20. *Mechan.*), [neque enim adverſus gravitatem prævalet, quia alias corpora partialia a centro totalis diſpergerentur] deſcenſum gravium retardare debet (§. 72. *Mechan.*), maxime quidem ſub æquatore, minus vero in parallelis. Patet adeo gravitatem verſus æquatorem cum diſtantia ab eodem continuo decreſcere. *Q. e. d.*

SCHOLION.

583. *Supponitur nempe, vim gravitatis per ſe eſſe uniformem, utpote quæ materiæ cohærenti proportionalis deprehenditur* (§. 112. Mechan.).

COROLLARIUM.

584. Quodſi adeo tellus motu vertiginis movetur, gravitas verſus æquatorem cum diſtantia locorum ab eodem continuo decreſcere & ſub æquatore minima, ſub polis maxima eſſe debet.

THEOREMA 17.

585. ***Si Terra motu annuo circa Solem feratur, Planetæ inferiores intra***

intra anni ſpatium una cum Sole circa ipſam moveri videntur, dum interea ſuas circa Solem revolutiones inæqualibus temporibus abſolvunt, & circa conjunctionem retrogradi apparent.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 61. Si Terra circa Solem motu annuo movetur, orbitam ſuam peragrat intervallo 365 dierum (§.27). Sed Mercurium circa Solem revolvi intervallo 87 circiter dierum, inferius independenter ab his conſtabit. Eſt itaque motus Terræ ad motum Mercurii fere ut 4 ad 1, conſequenter dum ☿ integram revolutionem abſolvit, Terra nonniſi quartam orbitæ ſuæ partem confecit. Dividatur ergo orbita Mercurii in 8 partes æquales & orbitæ Telluris quadrantes dividantur ſinguli in totidem alias. Sit jam Mercurius in 1 & Terra in T 1, videbitur ex terra ☿ in *a*. Progrediatur Terra in 2, ☿ ſimiliter in 2, qui ex illa apparebit in *b*. Promoveatur Terra in 3, ☿ quoque in 3: videbitur is in *c*, hactenus adeo directus apparet. Procedat Terra in 4 & ☿ itidem in 4 properans ad conjunctionem cum Sole: conſpicietur is in *d*, conſequenter lente progreditur. Conjungatur ☿ Soli in 5, Terra etiam in 5 exiſtente: videbitur is in *e* adeoque retrogradus. Accedat ☿ in 6, Tellus itidem in 6: videbitur is in *f*, retrogradationem continuans. Perveniat ☿ usque in 7, Terra itidem in 7: apparebit is in *g*, adeoque denuo directus. Sit ☿ in 8, Terra in 8: conſpicietur is in *h*, directus adhuc. Quodſi hac ratione ☿ in ſua orbita & Tellurem itidem in ſua ulterius promoveas, donec hæc reſtituatur in T, Mercurius ſucceſſive ſpectabitur in *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, *z*, A, B, C, D, E, F, G, H, I, adeoque intra ſpatium annuum cum Sole (§.27), totum Zodiacum emetiri videtur, ita ut circa ſingulas conjunctiones cum Sole retrogradus fiat: quæ ſingula manifeſta ſunt, ſi per cognomina puncta orbitarum Telluris atque ☿ rectas ducas, confuſionis evitandæ & ſpatium lucrandi gratia hic omiſſas. Nec abſimili modo idem de Venere oſtenditur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

586. Intra annum adeo ☿ ter fit retrogradus: nec abſimili modo patet, ♀ nonniſi ſemel intra 19 menſes retrogradam fieri.

THEOREMA 18.

587. *Si Terra circa Solem motu annuo feratur, planetæ ſuperiores fient*

fient retrogradi circa oppositionem & Telluri multo propiores erunt quam in conjunctione cum Sole.

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 62. Quoniam orbitæ planetarum superiorum Tellurem ambiunt (§. 577), orbita Telluris intra illorum orbitas continetur. Sit adeo circulus intimus orbita Telluris in 12 partes æquales divisus: medius vero designet orbitam ♃, extimus terminetur in superficie sphæræ mundanæ. Quia motus ♃ est ad motum Telluris ut, ad 12 (§. 138), duodecima orbitæ ♃ pars perinde ac orbita Telluris in 12 partes æquales dividatur. Sit jam Terra in 1, ♃ itidem in 1: videbitur is in *a*. Progrediantur Terra & ♃ in suis orbitis ex 1 in 2; apparebit hic in *b*: utroque autem in 3 constituto, in *c* videbitur. Promoveantur Terra & ♃ in 4 ac inde porro in 5: spectabitur hic in priore casu in *d*, in posteriore in *e*. Hactenus adeo directus videtur. Tendat jam Tellus in 6 & planeta perveniat in 6 Soli S mox opponendus: videbitur hic in *f*, adeoque retrogradus. Perveniat uterque in 7, ubi oppositio cum Sole contingit (§. 536): ♃ in *g* cernetur, retrogradationem continuans. Similiter utroque ad 8 promoto, ♃ retrogradus spectabitur in *h*. Utroque ad 9 translato, ♃ iterum directus videbitur in *i*, & ita porro. Eodem modo ostenditur, ♄ & ♂ retrogrados fieri in oppositione cum Sole. *Quod erat unum.*

Sit planeta in A, Tellus in V: videbitur is Soli S conjunctus (§. 535), tumque distantia ejus a Terra est AV. Sit ut ante planeta in A, Tellus vero in T: apparebit is Soli oppositus (§ 536), tumque distantia ejus a terra est AT. Quare cum differentia inter distantiam priorem AV & posteriorem AT sit integra diameter orbitæ Telluris TV; Planeta superior quilibet Telluri multo propior est in oppositione, quam in conjunctione cum Sole. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

588. Quia Saturnus tardius Jove, Jupiter tardius Marte movetur (32. 33. 34); Tellus a Saturno digressa citius ad eum redit quam ad Jovem & ad Jovem citius quam ad Martem. Quare cum planeta A Soli S opponatur, si terra ad eum accedit (§. 573); Saturni retrogradationes frequentiores sunt quam Jovis & Jovis frequentiores quam Martis.

COROLLARIUM 2.

589. Quoniam motus ♄ ad motum terræ est ut 1 ad 30 (§. 32), dum terra integram orbitam percurrit, ♄ trigesi-

gesi-

gesimam circiter suæ partem seu 12 gradus confecit. Quare cum terra singulis fere diebus gradum unum emetiatur, antequam Saturnum, a quo digressa, iterum assequatur, ultra annuum spatium 12 fere elabantur dies necesse est, consequenter spatium temporis inter duas retrogradationes ♄ intercedens erit circiter unius anni ac dierum 12. Nec absimili modo ostenditur, inter duas retrogradationes ♃ interjici spatium temporis aliquanto majus anno uno ac mense uno, inter duas Martis vero biennium circiter.

THEOREMA 19.

590. ***Orbita Martis Telluri propior, quam orbita Jovis & hæc eidem propior quam Saturni orbita: orbita Lunæ denique est omnium proxima.***

DEMONSTRATIO.

Mars enim Jovem, Jupiter Saturnum, Luna planetas omnes superiores oculo in terra constituto tegere potest (§ 541). Mars igitur inter Jovem & Tellurem, Jupiter inter Martem & Saturnum intercedit, Luna vero Telluri proxima, adeoque orbita Martis propior est quam orbita Jovis, hæc vero propior orbita Saturni, Lunæ autem orbita omnium proxima. *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

591. ***In hypothesi Terræ motæ ♄ diutius est retrogradus quam ♃ & ♃ diutius quam ♂.***

DEMONSTRATIO.

Illud attendentibus ad demonstrationes superiores satis patet, si Planeta superior in F tempore retrogradationis apparentis immotus foret, puncta stationum fore eadem cum punctis C & D, in quibus radii ex planeta in centrum Telluris ducti orbitam ejus tangunt. Ducatur etiam tangens GA a planeta remotiore, qui necessario ultra D cadet (§. 23. *Analys. infinit.*). Foret ergo arcus AEB, quem terra emetiretur in retrogradatione planetæ remotioris G, major arcu CD, quem durante retrogadatione propioris F conficit. Quare cum Saturnus longius distet a terra quam Jupiter & Jupiter longius quam Mars (§. 590); major arcus orbitæ telluris retrogradationi Saturni quam Jovis & major retrogradationi Jovis quam Martis responderet. Etsi vero planetæ interea, dum retrogradi ex Tellure spectantur, in orbita sua progrediantur, adeoque arcus orbitæ telluris retrogradationibus eorum respondentes fiant minores, prout ex attenta consideratione demonstrationum superiorum perspicere datur: cum tamen motus ♄ sit tar-

Tab. VI. Fig. 63.

Ff ff 2 dior

dior motu ♃ motusque ♃ tardior motu ♂ (§ 52. & seqq.), puncta stationum, quæ arcum supra dictum determinant, a punctis contactuum minus distabunt in Saturno quam in Jove, & in Jove minus quam in Marte, adeoque arcus ille major adhuc erit pro Saturno, quam pro Jove & major pro Jove, quam pro Marte, consequenter cum Terra in arcu majore diutius commoretur quam in breviore, retrogradationes Saturni erunt diuturniores quam Jovis & Jovis diuturniores quam Martis. *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

592. *In hypothesi terræ motæ* ♄ *per minorem arcum quam* ♃ *&* ♃ *per minorem quam* ♂ *retrogreditur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 63. Si planeta superior G, cum retrogradus videtur, immotus staret, arcus orbitæ AB, per quem Tellus durante retrogradatione incederet, inter tangentes GB & GA interciperetur foretque pro planeta remotiori G major, quam pro viciniori, nempe AB > CD, quemadmodum modo ostendimus (§ 591). Quare cum HD & HA sint ad FD & GA perpendiculares (§. 304. *Geom.*) & angulus EHD < EHA (§. 84. *Arithm.*); erit HFD > HGA (§. 241. *Geom.*), consequenter CFD > BGA. Quoniam itaque rectæ FL & FM magis divergunt rectis GN & GO, majorem quoque arcum inter fixas comprehendunt, hoc est, planeta vicinior F per majorem arcum LM retrograditur, quam remotior G per NO. Jam cum planeta tardius Tellure progrediatur, perinde est ac si ille quiesceret, hæc vero excessu celeritatis suæ supra celeritatem planetæ moveretur (æstimatur autem hic celeritas ex motu angulari circa Solem), motus enim planetæ nonnisi tempus retrogradationis abbreviat, seu arcus CD & AB minores efficit, ceu patet ex demonstratione præcedente. Quare planeta vicinior etiamsi secundum signorum successionem in orbita sua incedat, per majorem arcum retrogredi videtur, quam remotior simili motu latus, adeoque ♄ per arcum minimum, ♃ per mediocrem, ♂ per maximum retrograditur (§. 591). *Q. e. d.*

SCHOLION.

593. *Rudis hæc phænomenorum motus proprii Planetarum determinatio ad præsens institutum sufficit: ex subsequentibus autem, ubi planetarum theoriam tradiderimus, distinctius constabit, quod supposito motu Telluris circa Solem*

lem exactissime omnium iisdem satisfiat, ita ut ipse Ricciolus *Tabulas astronomicas conditurus, quæ observationibus responderent, ad motum Telluris, quem ex decreto Inquisitorum scripturæ sacræ adversum propitebatur & acriter impugnabat, tanquam ad sacram anchoram confugere teneretur* (r). *Ita sane* Dechales *in casu simili ejus vestigia lecturus* (s): „ P. Ricciolus „ *inquit*, licet ab hypothesi Copernicana esset valde alienus eamque pro viribus fuisset insectatus, nullas tamen tabulas aptare potuit, quæ mediocriter observationibus responderent, nisi secundum systema terræ motæ, quamvis inusitata advocasset subsidia epicyclosque mutabiles perpetuoque incremento & decremento obnoxios, varieque ad eclipticam inclinatos adhibuisset. Unde in sua Astronomia Reformata, in qua tabulas motuum cœlestium accuratissimas, omnibusque observationibus accommodatas se daturum promiserat, in hypothesin terræ motæ relabitur.

THEOREMA 22.

594. *Si Terra motu annuo circa Solem revolvitur, nec diameter orbitæ ejus ad distantiam fixarum a Terra habeat rationem insensibilem, distantia fixarum cum inter se, tum etiam a vertice non omni tempore eadem, in specie stellæ polaris distantia a vertice in solstitiis alia, quam in æquinoctiis.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ stellæ A & B eclipticæ vicinæ, & earum altera A in oppositione cum Sole S, videbitur distantia earundem sub angulo BCA (§. 556). Quodsi eadem A fuerit in conjunctione cum Sole S, spectabitur distantia sub angulo BDA (§. 555). Sed si CD ad CA habeat rationem sensibilem; erit BCA > BDA (§. 188. *Geom*). Distantia igitur stellarum B & A diverso anni tempore varia existit. *Quod erat unum.* Tab. VI. Fig. 64.

Si stellæ M & N fuerint extra eclipticam seu procul ab ea sitæ; Tellure in T existente, videbuntur sub angulo MTN, & illa in V constituta sub angulo MVN. Quod vero non in omni situ Telluris anguli MTN & MVN æquales esse possint, vel exinde liquet, quia angulo MTN invariato, angulus MVN vel major, vel minor evadit, prout stella N vel *n* puncto T vel propior vel ab eo remotior supponitur. *Quod erat alterum.* Tab. VII. Fig. 65.

Quoniam elevatio poli non mutatur

(r) Vid. Astron Reformatæ lib. 10. c. 1. §. 353. 354.
(s) in Mundo Mathem, Tom. 4. Astrom. lib. 6. prop. 55. fol. 551. 552.

tatur diverſis anni temporibus (§. 147); Tellus in orbita circa Solem ita incedere debet, ut axis ejus ſit conſtanter axi ſphæræ mundanæ, hoc eſt, ſibi ipſi parallelus, adeoque motu annuo polus Telluris circulum quendam deſcribit, eodemque modo patet, polum eclipticæ in Tellure deſignatum itidem circulum alium deſcribere de-
Tab. VI. Fig. 66. bere. Sit ergo M polus eclipticæ reſpectu Solis, P polus mundi reſpectu ejusdem & circuli *acbd* & ACBD deſignent eos, quos polus eclipticæ & polus æquatoris terreſtris deſcribunt. Sit porro PM arcus coluri ſolſtitiorum æqualis diſtantiæ poli eclipticæ a polo mundi & adeo in A o ♋, in B o ♑ (§.186). Fiat angulus PMS diſtantiæ ſtellæ polaris a principio Cancri quoad longitudinem, recta MS diſtantiæ ejusdem a polo eclipticæ æqualis: erit in S ſtella polaris. Quando Terra eſt in ariete, polus ejus erit in C; quando vero in o ♋, idem in A erit (§. 168): in priori adeo caſu diſtantia ſtellæ polaris a polo SC, in altero SA. Eſt vero SC < SA (§.302. *Geom.*): diſtantia ergo ſtellæ polaris non omni anni tempeſtate eadem, ſi diameter orbitæ Telluris ad diſtantiam fixarum habuerit rationem ſenſibilem: alias enim DC videbitur ex Tellure ſub angulo inſenſibili, adeoque multo magis differentiæ rectarum ex S ad alia puncta peripheriæ ACBD ductarum & diſtantiæ SC ſub angulo inſenſibili comprehendentur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

595. Tellure in T conſtituta, ſtella Tab.
n videbitur cum N una eademque: VII.
ſed ubi illa ad V pervenit, diſtabunt Fig.
a N aliquo intervallo. Unde in hy- 65.
potheſi terræ motæ fieri poteſt, ut una ſtella certo anni tempore appareat in duas aut plures diviſa.

DEFINITIO 10.

596. Si fixa ex duobus diverſis locis, veluti quæ Terra motu annuo circa Solem lata diverſo tempore in orbita ſua occupat, ſpectatur; differentia locorum opticorum dicitur *Parallaxis fixarum.* Vocatur autem *Parallaxis abſoluta* differentia locorum opticorum ejusdem fixæ ex centro Solis & centro Terræ ſpectatæ, vel angulus, qui intercipitur rectis ex centro Solis & centro Terræ in centrum fixæ ductis. Quæ ex parallaxi abſoluta in latitudinem & longitudinem fixæ ex centro Solis ac centro Terræ ſpectatæ, nec non in ejusdem declinationem atque aſcenſionem rectam redundat differen-

rentia; *Parallaxis latitudinis, longitudinis, declinationis atque ascensionis rectæ* appellatur.

THEOREMA 23.

597. *Si distantia Solis a Terra* CS *ad distantiam fixæ ab eadem* BC *rationem sensibilem habuerit, parallaxis absoluta* CBS *sensibilis nec toto anni tempore eadem; maxima vero, ubi angulus ad Terram maximus.*

Tab. VI. Fig. 64.

DEMONSTRATIO.

Etenim ut distantia Solis a Terra CS ad distantiam fixæ ab eadem CB, ita sinus anguli parallactici SBC seu parallaxi fixæ absolutæ ad sinum anguli BSC (§. 33. *Trigon.*). Quodsi ergo CS ad CB rationem sensibilem habet, sinus etiam parallaxeos fixæ absolutæ ad sinum anguli BSC, consequenter etiam ipsa parallaxis absoluta fixæ ad angulum BSC rationem sensibilem habere debet. Quamobrem cum sinus anguli BSC ad sinum anguli BCS sit ut distantiæ fixæ a Terra ad ejusdem distantiam a Sole, adeoque angulus BSC admodum sensibilis esse debeat (§. 541); parallaxis quoque fixæ quin sensibilis esse debeat dubitari nequit. *Quod erat primum.*

In omni puncto orbitæ cum sit ut sinus anguli ad Terram BCS ad distantiam Solis a fixa ita sinus parallaxeos absolutæ CBS ad distantiam Solis a terra (§. 33. *Trigon.*); erit sinus anguli ad Terram ad sinum parallaxeos absolutæ ut distantia Solis a fixa ad distantiam ejus a Terra (§. 173. *Arithm.*). Jam in hypothesi Terræ motæ centrum Solis in S quiescit, adeoque distantia a fixa BS eadem semper est (§. 11. *Astron* & §. 170. *Geom.*). Quoinam vero ex inferius sequentibus clarius patebit, in præsenti negotio orbitam Solis sumi posse circularem & Solem in ejus centro supponi, consequenter distantia quoque Solis a Terra eadem censeri potest (§. 40. *Geom.*); in duobus quibuscunque orbitæ punctis sinus parallaxium absolutarum ejusdem fixæ erunt inter se ut sinus angulorum ad Terram (§. 167. *Arithm.*). Jam cum per observationes constet, si quis detur sensibilis parallaxis, eam tamen valde exiguam esse debere, sinus vero angulorum exiguorum sint ut ipsi sinus; parallaxes absolutæ ejusdem fixæ, in duobus quibuscunque punctis orbitæ Telluris erunt ut sinus angulorum ad Terram (§. cit. *Arithm.*), consequenter cum anguli ad Terram

ram non sint ejusdem quantitatis, atque adeo nec eorundem sinus inter se æquales; perallaxis absoluta fixæ ejusdem toto anni tempore eadem non est. *Quod erat secundum.*

Angulus ad Terram vel rectus esse debet, vel acutus, vel obtusus (§. 66. *Geom.*). Quamobrem cum sinus totus, qui sinus anguli recti est (§. 2. *Trigon.*), sit omnium sinum maximus (§. 6. *Trigon.*), & parallaxes absolutæ fixæ ejusdem in diversis orbitis Telluris sint inter se ut sinus angulorum ad Terram *per demonstrata*; parallaxis absoluta maxima erit, ubi angulus ad Terram rectus. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

598. Quoniam parallaxes latitudinis, longitudinis, declinationis & ascensionis rectæ a parallaxi absoluta pendent (§. 596); singulæ quoque toto anni tempore eædem non sunt, consequenter si parallaxis quædam fixarum absoluta sensibilis datur, latitudo quoque, longitudo, declinatio & ascensio recta ejusdem fixæ toto anni tempore non erit eadem.

SCHOLION.

599. *Qua lege latitudo, longitudo, declinatio & ascensio recta ob parallaxin fixarum mutetur, jam non inquirimus, cum paucis theoria ista tradi non possit. Dedit eam Astronomus eximius* Eustachius Manfredius (t), *apprime necessariam, ut intelligatur, num detur aliqua fixarum parallaxis, si qua in declinatione, ascensione recta, latitudine ac longitudine annua mutatio observetur. Neque enim ex qualibet variatione annua colligi potest parallaxis fixarum; sed necesse est eam sequi parallaxeos legem annuam; quod ubi non observaveris, fieri poterit ut parallaxin aliquam fixis sensibilem tribuas, quæ tamen ipsis competere nequit. Quod hactenus circa eam observandam moliti fuerint Astronomi & quem successum habuerit ipsorum studium nostrum est exponere.*

OBSERVATIO 41.

600. Robertus Hookius *per telescopium 86 pedum perpendiculariter erectum primus observavit stellam lucidam in capide Draconis ipsi Zenith collegii* Greshamensis, *quod Londini est, 27 circiter vel 30 scrupulis secundis in solstitio brumali propiorem, quam in æstivo* (u). *Observavit* An. 1669. d. 6. *Julii distantiam a vertice septentrionem versus* 2′ 12″, d. 9. *Jul.* 2′ 12″, d. 6. *Aug.* 2′ 6″, d. 21. *Octobr.* 1′ 48″ *vel* 50″ (x). *Has observationes*

(t) in Tractatu de annuis stellarum in errantium aberrationibus.

(u) vid. Tractatus Anglicus, cui Titulus: An attempt to prove the motion of the earth.

(x) vid. epistola Flamstedii apud Wallisium Vol. III. f. 107. & seqq.

tiones cum lege annua parallaxeos fixarum ad amussim conspirare, ut mireris in re tam delicata consensum, demonstravit Manfredius (y).

OBSERVATIO 42.

601. *Post* Hookium *ab* A. 1689. *usque ad* A. 1697. *ope Quadrantis muralis pedum* 6 *cum unciis octo variationes distantiæ stellæ polaris a vertice observavit* Cel. Flamsteedius (z): *ex quibus etsi parallaxin fixarum inferret Astronomus summus, eas tamen ab annua parallaxeos hujus lege abhorrere & privatis literis ipsum docuit* Rœmerus (a), *& publice demonstravit* Cassinus *filius* (b), *atque* David Gregorius *aliam variationis hujus causam allegat* (c), *ob quam parallaxin inde illatam suspectam reddit. Eandem aberrationem stellæ polaris jam ante observaverat* Picardus *in itinere Uraniburgico; sed cum attentius eandem examinaret, eam aliunde quam a parallaxi annua pendere agnovit* (d).

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

OBSERVATIO 43.

602. Jacobus Cassinus A. 1714. *telescopio simplici trium pedum in plano Meridiani immobiliter posito variationes altitudinum Sirii observavit* (e). *Inter altitudinem maximam, quæ* d. 9. *Julii notata, & minimam, quæ* d. 29. *Decembris deprehensa, differentia* 11″ *observata.* A d. 9. *Julii autem usque ad* d. 5. *Octobr. altitudo maxima decrevit* 5″ 30‴. *Etsi autem* Hallejus (f) *observationes istas suspectas reddere conetur; eas tamen cum lege parallaxeos fixarum annua consentire demonstrat* Manfredius (g).

OBSERVATIO 44.

603. Maraldus A. 1704 & 1705. *differentias ascensionum rectarum a Sirio ad Arcturum observavit, quas ad* Manfredium A. 1707. *misit. Eas cum propriis* A. 1727 & A. 1728. *habitis exhibet* Manfredius (h), *& cum lege parallaxeos annuæ fixarum confert. Harum aliquas*

(y) loc. cit. c. 8. p. 61. 62.
(z) vid. epistola laudata apud Wallisium.
(a) Vid. *Horrebovii* Copernicus triumphans c. 2. p. 6.
(b) Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1699. p. m. 207.
(c) in Elem. Astron. phys. & geom. lib. 4. prop. 55. schol. f. 275.
(d) Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc. loc. cit. Conf. *Manfredius* loc. cit. p. 63. 64.
(e) Memoires de l'Acad. Roy. des Scienc. A. 1717. p. m. 330.
(f) Philosophic. Transact. num. 364. p. 1 & seqq.
(g) loc. cit. p. 65. 66.
(h) loc. cit. c. 9. p. 71 & 72.

liquas cum eadem consentire, alias magis dissentire deprehendit, quam quis suspicari poterat.

OBSERVATIO 44.

604. *Jam ante* Maraldum *ab* Anno 1692 *ex temporibus, quæ inter transitus duarum stellarum per Meridianum intercedunt, variationes ascensionis rectæ elicuit* Olaus Rœmerus *& ejus exemplo excitatus observationes istas postea continuavit* Horrebovius *ac inde cum* Rœmero *parallaxin annuam fixarum determinat* 30″ *seu scrupuli primi dimidii* (i). *Enimvero* Manfredius (k), *qui & ipse istiusmodi observationibus* A. 1728 & 1729. *vacavit, non modo illorum observationes suis prorsus contrarias deprehendit, verum etiam easdem a lege parallaxeos annuæ prorsus dissentire evicit.*

OBSERVATIO 45.

605. *Tandem* Jacobus Bradlejus (l) *summo studio & instrumentis exquisitissimis variationes declinationis annuas in* 20 *stellis scrutatus est, cumque eas nullo modo per parallaxin annuam repræsentari posse animadverteret, eas admirando prorsus inter observationes & hypothesin consensu, per novam aberrationis legem exhibuit, quam a successiva luminis propagatione motuque Telluris annuo simul deduxit, scilicet quod Terra interea temporis progreditur, dum lumen a fixa ad oculum observatoris propagatur.* Manfredius (m), *hypotheseos Bradlejanæ, quã dilucide exponit, cum aberrationibus ascensionalibus consensum scrutatus invenit, nõ omnia quidem ad amussim quadrare, in plerisque tamen stellis multo sane majorem cum hac hypothesi, quam cum annuis parallaxibus consensum reperit, ac in quibusdam tam manifestum, ut minime casui adscribi posse videatur, etsi causas physicas a Bradlejo allatas minime probet.*

COROLLARIUM I.

606. Quoniam variationes annuæ declinationis ac ascensionis rectæ fixarum hactenus observatæ cum lege parallaxeos annua non prorsus consentiunt, etsi quædam earum ab eadem non abhorreant; a vero aberrarunt, qui exinde parallaxin fixarum annuam inferre ausi.

SCHO-

(i) in Copernico triumphante c. 5.' §. 26. p. 24.
(k) in Commentariis Bononiensi Scientiar. & Art. instituto p. 612 & seqq.
(l) Philos. Transact. num. 406. p. 637 & seqq.
(m) in Commentar. Bononiens. p. 628. & seqq.

SCHOLION 1.

607. *Unde porro patet, falli etiam eos, qui motum Telluris annuum per parallaxin fixarum demonstratum esse contendunt.*

COROLLARIUM 2.

608. Cum variationes fixarum, quas in declinatione & ascensione recta subeunt, in paucis scrupulis secundis observentur, nullæ autem observentur parallaxes annuæ; evidens est, parallaxin annuam fixarum, si hypothesis terræ motæ sit vera, duobus scrupulis secundis minorem esse debere, adeoque in proxima fixa non posse unico scrupulo secundo majorem assumi.

SCHOLION 2.

609. *Observantur declinationes & ascensiones rectæ fixarum* (§. 150. 228) *ac inde latitudines & longitudines calculo definiuntur* (§. 243). *Quamobrem & aberrationes fixarum quoad declinationes & ascensiones rectas tantummodo observantur neglectis iis, quæ ad longitudinem & latitudinem spectant.*

SCHOLION 3.

610. *Interest autem rei astronomicæ ut aberrationes istæ fixarum annuæ observatorum cura ad liquidum perducantur, non modo ut inde catalogi fixarum emendentur, verum etiam ut loca planetarum ex observatione rectius determinentur & motus ipsorum accuratius constituantur.*

THEOREMA 24.

611. *Si Terra quiescit, & Sol cum stellis universis circa Tellurem motu diurno revolvitur; sidera remotiora celerius, viciniora tardius circa Tellurem revolvuntur.*

DEMONSTRATIO.

Stellæ nimirum omnes duplici motu moveri videntur, altero ab ortu versus occasum, altero ab occasu in ortum (§. 21. 30), cum vero impossibile sit, ut stella, dum ab ortu in occasum progreditur, eodem tempore ab occasu in ortum promoveatur; si motus ab ortu in occasum est verus, alter ab occasu versus ortum erit tantum apparens, ortus nempe ab inæquali motus diurni celeritate. Ponamus enim Lunam cum fixa aliqua hodie culminare: quoniam Luna ex hypothesi tardius movetur quam fixa ab ortu in occasum, ubi crastina die fixa ad Meridianum accedit, Luna adhuc inde versus ortum distabit, adeoque a fixa versus ortum discessisse putatur, videturque motus proprius ob majorem a fixa distantiam tanto celerior, quo communis tardior. Cum adeo Lunæ motus proprius omnium celerrimus (§. 24), in Sole multo tardior (§. 26) & inde usque ad fixas continuo decrescat (§. 32. & seqq.), in quibus tandem

omnium tardisſimus apparet (§. 256); neceſſe eſt motus communis in fixis ſit omnium velocisſimus, in ♄ multo tardior, in ♃ multo adhuc tardior & ita porro, tandemque in Luna omnium tardisſima. Diſtantia vero fixarum a Tellure major quam Planetarum omnium, Saturni major quam Jovis, Jovis major quam Martis, Martis plerumque major quam Solis, Solis denique major quam Lunæ (§. 541), adeoque remotiora ſidera celerius, viciniora tardius circa Tellurem revolvuntur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

612. Quoniam remotiora ſidera peripherias majores deſcribunt vicinioribus (§. 412. *Geom.*), & celerius tamen circa Tellurem revolvuntur (§. 611); peripheriæ majores breviori tempore deſcribuntur minoribus.

COROLLARIUM 2.

613. Motus ergo vicinorum tardior, quam remotiorum.

SCHOLION.

614. *Hæc inconcinnitas vitatur in ſyſtemate terræ mota, ubi multo convenientius quilibet planeta tanto majus temporis ſpatium in orbita ſua motu annuo circa Solem emetienda inſumit, quo amplior extiterit.*

THEOREMA 25.

615. *Si terra quieſcit & ſidera motu communi circa eam revolvuntur, immani celeritate feruntur.*

DEMONSTRATIO.

Inferius independenter ab his oſtendetur, diſtantiam Lunæ a Terra mediocrem eſſe minimum 57 ſemidiametrorum terreſtrium, hoc eſt, quia ſemidiameter terreſtris eſt 860 milliarium Germanicorum, ut in Geographia demonſtratum, 49010 milliarium Germanicorum. Quoniam itaque peripheria circuli diurni lunaris 307845 milliarium exiſtit (§. 429. *Geom.*); Lunæ motus horarius erit 12827 milliarium & ſingulis minutis ſecundis, hoc eſt intervallo minore, quam quod unico arteriæ pulſu metiri liceat, milliaria tria cum quinque partibus nonis & amplius, Luna conficiet, utut tardisſime omnium lata (§. 611). Patebit ulterius inferius, Solis diſtantiam a Terra mediocrem eſſe 22000 ſemidiametrorum terreſtrium ſeu 18920000 milliarium Germanicorum, adeoque ſpatium Solis diurnum, quando in æquatore exiſtit, 118817600 milliarium (§. 429. *Geom.*). Intervallo itaque unius minuti ſecundi, hoc eſt, intra oculi nictum Sol ſpatium

tium conficit 1375 milliarium Germanicorum. Patebit præterea distantiam Solis a Terra esse ad distantiam Martis fere ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, ad distantiam Jovis ut 1 ad $5\frac{1}{4}$, ad distantiam Saturni ut 1 ad 9. Quare cum spatia diurna (§.429. *Geom.*), adeoque & reliqua quæcunque eodem tempore descripta, in eadem ratione existant (§.171. *Arithm.*); ♂ unico oculi nictu progredietur 2062, ♃ 7219, ♄ denique 12375, milliaria Germanica. Et quoniam fixæ longiori multo intervallo quam ♄ a Terra distant (§. 541); motus in æquatore aut prope eundem constitutarum, multo velocior erit motu Saturni. Apparet adeo admissa quiete Telluris, sidera celeritate incredibili circa eam revolvi debere. *Q. e. d.*

SCHOLION.

616. *Equidem* Tycho de Brahe, *qui terræ quietem præjudiciis quibusdam inductus defendit, distantiam Solis a Terra consensu omnium Astronomorum recentiorum ob rationes suo loco adducendas justo minorem facit, ita ut distantia fixarum ipsi sit* 14000 *semidiametrorum terrestrium; adeoque multo minor distantia Solis a Terra a nobis vi observationum recentiorum & accuratiorum assumta; sed admissa illa fixarum distantia extra controversiam justo minore, spatium a fixa prope æquatorem constituta unico nictu oculi confectum est* 875 *milliarium Germanicorum, utique adhuc enorme, etsi spatium a Luna confectum sit tolerabile.*

THEOREMA 26.

617. ***Si terra quiescit & sidera motu communi moventur, singuli planetæ singulis diebus spiras singulas describunt, usque ad certum terminum versus boream excurrentes & inde rursus ad terminum oppositum versus austrum recurrentes, nunc ampliores, nunc arctiores.***

DEMONSTRATIO.

Singulorum enim planetarum distantia a vertice quotidie mutatur, ad certum usque terminum versus boream crescens, inde rursus usque ad alium versus austrum decrescens (§. 39). Quare cum poli altitudo constanter eadem observetur (§.147), nec tamen planetæ ad idem meridiani punctum restituantur; non circulos, sed spiras usque ad certos terminos versus polos hinc inde excurrentes describunt. *Quod erat unum.*

Planetæ singuli non eandem constanter a Terra distantiam retinent, sed nunc propius ad eam accedunt, nunc longius ab eadem recedunt (§. 550) & superiores, præsertim in oppositione cum Sole, Terræ multo

propiores ſunt quam in conjunctione (§. 551): in majori ergo a Terra diſtantia ſpiras majores ſeu ampliores, in minore minores ſeu arctiores deſcribunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

618. Cum tamen motus obſervetur tardior, ſi planeta longius a terra diſtet, quam ſi eidem propior extiterit (§. 613); ſpiræ majores celerius deſcribuntur minoribus.

COROLLARIUM 2.

619. Et quia diſtantia maxima & minima planetarum a terra non eidem cœli puncto affixa (§. 549. 551); ſingulis diebus ab omni retro ævo planetæ ſinguli alia delati ſunt per cœlum via.

SCHOLION 1.

620. *Facile apparet, ſuppoſita quiete telluris, inextricabiles ſequi motus planetarum, qui ſuppoſito ejus motu diurno & annuo ſimpliciſsimi ſunt. Nec ullus hactenus Aſtronomus vel ſomniavit de motu planetarum in ſpiris variabilibus computando: ſed qui Solem circa terram quieſcentem finxerunt mobilem, in theoriis planetarum motum vertiginis Telluris tacite quaſi ſuppoſuerunt, ut ſpiræ diurnæ in circulos degenerarent, in quibus planetæ motu proprio ab occaſu verſus ortum incederent: adeo ſcilicet Aſtronomiæ infenſa eſt quies telluris!*

SCHOLION 2.

621. *Quemadmodum vero Syſtema terræ quieſcentis ſibi relictum nullius eſt in Aſtronomia uſus; ita exiguam quoque in Phyſica utilitatem habet, cum præcipuorum phænomenorum nulla inde ratio reddi poſſit, adeoque vel provocandum ſit ad Numinis nutum immediatum (quod tamen idem eſſe in Phyſicis, quod in Geometria eſt reductio ad abſurdum, inter intelligentes & rerum metaphyſicarum ſatis peritos conſtat), vel ad rationes nobis latentes. Sane ut Aſtronomi Telluris quieti faventes motus planetarum phænomena cum Solis præſertim motu complicata ſalvarent, orbitam Telluris tanquam epicyclum orbitæ planetarum affixerunt, ita ut planeta in epicyclo incederet, dum ipſe per orbitam ſuam circa Solem deferretur: quamvis ne ſic quidem voti ſui ſatis compotes fuerint facti.*

THEOREMA 27.

622. ***Terra movetur & motu diurno ſeu vertiginis, & motu annuo circa Solem.***

Ex obſervationibus conſtat, Solem cum omnibus planetis, ac ſtellis fixis quotidie oriri atque occidere & ſucceſſive ad alios aliosque circulos verticales appellere (§. 11). Sol autem & planetæ ſinguli inæqualibus temporum intervallis motu quodam ſingulis proprio ab occaſu in ortum feruntur (§. 23. & ſeqq.), diſtantias a vertice in culminatione continuo mutant (§. 39),

39), omnes Soli opponuntur, præter Venerem & Mercurium (§. 517) & superiores in oppositione cum Sole propiores sunt, quam in conjunctione (§. 551) fiuntque circa eam retrogradi, inferioribus circa conjunctionem retrogradis factis (§. 562). Quo planeta superior a terra remotior, eo frequentius fit retrogradus, Venere tamen inter inferiores contraria ratione tardius retrograda facta quam ☿ (§. 563). Saturni retrogradationes sunt diuturnæ, Jovis mediocres, Martis brevissimæ (§. *cit.*), Saturnus tamen per arcum minimum, ♃ per mediocrem, ♂ per maximum retrogreditur (§. 564). Fixarum a vertice distantia non semper eadem toto anni tempore, immo aliquo tempore stella una videtur in plures divisa (§. 543), immo variationes declinationis & ascensionis rectæ annuæ observantur (§. 601 & seqq.) & gravitas accedendo ad æquatorem continuo imminuitur (§. 566). Admisso motu Telluris cum vertiginis, tum annuo, hæc omnia necessario consequuntur (§. 579 & seqq.), ita ut non solum phænomenorum singulorum quoad minimas circumstantias ratio pateat, verum etiam (prout in sequentibus docetur) phænomena singula prompte computari & prædici possint. Et quamvis variationes distantiæ a vertice, declinationis & ascensionis rectæ annuæ cum lege parallaxeos fixarum a motu Telluris annuo resultante (§. 597) non prrsus consentiant (§. 604); admisso tamen motu Telluris annuo resultant (§. 605). Ex adverso posita tellure in universo quiescente, omnis concinnitas in motu siderum tollitur (§. 611. & seq.) sidera singula, sola fere Luna excepta, incredibili prorsus celeritate per cœli spatia quotidie vagantur (§. 615), motusque planetarum adeo implicantur (§. 617) ut vix phænomenorum generalis ratio inde reddi, multo minus eadem juxta accuratum computum in futurum prædici possint (§. 593. 620). Nulla igitur ratio suadet, terram quiescere & Solem cum stellis reliquis circa eam moveri: sed confitendum necessario, Tellurem & motu vertiginis cieri & cum comitatu sui simillimo (§. 525) circa Solem naturæ a planetis omnibus prorsus diversæ (§. 431) motu annuo ferri.

COROLLARIUM.

623. Quia poli altitudo toto anni tem-

tempore eadem observatur (§.147), necesse est Tellurem in orbita sua circa Solem ita librari, ut axis ejus axi mundi constanter sit parallelus.

SCHOLION 1.

624. Copernicus *hunc motum* Motum librationis *vocat*, *non inepte hoc simili illustrandum. Globus cum axe axi Telluris parallelo in aplustri summo navali circa axem mobili appictus cogitetur. quod a Noto constanter, impellatur, dum circa insulam navigatur: evidens est, in omni navis situ axem globi picti manere axi mundano parallelum.*

SCHOLION 2.

625. *Agnovere motum Telluris jam inter veteres Philosophi complures. Motum diurnum Telluris* Cicerone *teste* (n), *primus detexit* Nicetas Syracusanus; *annuum circa Solem* Philolaus (o). *Centum annis post* Philolaum & *amplius* Aristarchus Samius *clarius Systema terræ motæ proposuit, teste* Archimede (p). *Obstitit autem Gentilium superstitio, quo minus ulterius excoleretur & ab omnibus Philosophis, saltem sanioribus, propugnaretur. Sacrilegii enim accusatus est* Aristarchus *a* Cleanthe, *quod universi lares Vestamque loco movisset*, (q). *Recentiori ævo* Nicolaus Cusanus *Cardinalis* (r), *motum Telluris asseruit: non tamen Systema Terræ motæ invaluit, antequam* Copernicus *summa ingenii vi præclarum ejus in Astronomia usum apertissime ostenderet* (s), *cui mox omnes Philosophi & Astronomi altius vulgo literatorum sapientes, mentem a superstitionis labe repurgatam habentes & extra censuræ ecclesiasticæ pericula constituti accessere, ita ut* Keplerus *jam suo tempore scribere potuerit* (t); „ Hodierno „ tempore præstantissimi quique „ Philosophorum & Astronomo- „ rum Copernico *adstipulantur*: se- „ cta est hæc glacies, vicimus suf- „ fragiis melioribus, cæteris pene „ sola obstat superstitio aut metus a „ Cleanthibus: & *Vir summus*, Chri- „ stianus Hugenius *confiteatur* (u); „ Omnes nunc Astronomos, nisi vel „ tardiore fuerint ingenio, vel ho- „ minum imperio obnoxiam habe- „ ant credulitatem, motum Telluri „ locumque inter planetas absque „ dubiatione decernere.

SCHOLION 3.

626. *Sunt qui Terræ motum non admittunt, quod eum scripturæ sacræ divinitus revelatæ adversum judicent, tum quod in ea Sol oriri & occidere, tum*

(n) Quæst. Tusculan. lib. 2. non prorsus circa finem.
(o) Plutarchus lib. 3. de Placit. Philos. c. 11. & 13. & Laertius lib. 8. c. 85.
(p) in Arenario statim ab initio.
(q) Vid. Plutarch. in Opusculo de facie in Orbe Lunæ.
(r) de docta ignorantia lib. 11 & 12.
(s) in Libris Revolution. Cœlestium.
(t) in Epitom. Astronom. Copernic. lib. 1. p. 140.
(u) in Cosmotheoro lib. 1. p.m. 14.

tum quod tempore Josuæ *stetisse dicatur. Enimvero videamus, quinam sit scripturæ de ortu, occasu & statione Solis sensus? Ne autem sensum alienum verbis scripturæ affingamus, neque inde inferamus, quæ nullo modo inferri possunt, in regulis interpretandi ante omnia conveniamus necesse est. Suppono itaque* 1. *Verbis Scripturæ singulis suas respondere notiones, & eum tenere sensum eorundem, cui notiones istæ inter legendum occurrunt:* 2. *verba scripturæ cum attentione lecta notiones modo dictas in animo a præjudiciis libero excitare valere. Si prius negaveris, concedendum erit, verba scripturæ esse sine mente sonum: id quod utique absurdum & in Autorem ejus blasphemum. Si posterius non admittendum tibi videatur, excitationem notionum cum verbis scripturæ combinandarum ad supernaturalem Spiritus S. operationem referenti; textus Hebraicus Veteris & Græcus Novi Testamenti prælectus intelligetur ab homine Hebraicarum & Græcarum litterarum ignaro, modo afferat animum sincerum & veritatis salutaris agnoscendæ cupidum, opemque Spiritus S. precibus ardentibus efflagitet: id quod tamen denuo absurdum censebitur, utpote experientiæ communi adversum. Hinc vero* 3. *consequitur, necesse esse, ut aut Deus ipse exhibuerit vocum in Scriptura occurentium definitiones, aut, si notiones jam supponit, ut nobis via ordinaria ad eas pervenire datum sit. Unde tandem* 4. *concluditur, non alias cum verbis scripturæ combinandas esse notiones, quam quæ ad res præsentes attendentibus occurrunt* (§. 19. Method. Mathem.). *Per* ortum *adeo* Solis *intelligit* apparentiam antea latentis in horizonte; *per* occasum Solis *vero* occultationem modo conspicui in horizonte (§. 14). *Quando ergo Ecclesiastes cap.* I. 5: Oritur Sol, *inquit*, & occidit, & ad locum suum revertitur, *non alius certe verborum sensus est, quam solem, qui modo latuerat, nunc apparere in horizonte, postquam conspicuus fuerat, denuo occultari & occultatione facta, ad plagam orientis denuo restitui. Hæc nempe cuilibet manifesta sunt ad Solem attendentibus, adeoque hæ, non aliæ, vi superiorum a Deo supponi possunt. Similiter cum Jos.* X. 12. 13. *Sol & Luna stetisse dicuntur, per* stationem *intelligitur* situs non mutatus, *aut, si mavis*, ejusdem situs conservatio. *Dum enim Josua jussit Solem stare super urbe Gabaon & Lunam super valle Ajalon, non aliud certe requisivit, quam ut Sol, qui ipsi super urbe constitutus apparebat, situm non mutaret. Exinde ergo, quod Solem jusserit tueri situm eundem, inferri nequit, cum circa terram quiescentem moveri.*

SCHOLION 4.

627. *Nimirum probe tenendum est, duplicem dari rerum naturalium cognitionem, alteram confusam, quæ sensui & imaginationi debetur; alteram distinctam, quæ intellectui accepta referri debet. Illa historiam naturalem absolvit & in nuda phænomenorum recensione acquiescit: hæc vero scientiam naturalem constituit & rationes phænomenorum reddit. Quemadmodum*

dum imaginatio intellectui, ita & historia naturalis scientiæ naturali nunquam contraria est, modo rite intelligantur, quæ de notionibus rerum naturalium modo dicta sunt: neque sibi invicem opponi possunt. Historia naturalis ad captum omnium composita; scientia naturalis captum non modo vulgi, sed etiam plerorumque literatorum transcendit, quippe non comparanda, nisi prius in Mathesi & in experimentando ac observando fueris versatus & intellectus in eam formam transierit, quæ literatis superiorum, quas vulgo vocant, Facultatum plerisque negatur. Scriptura itaque cum de rebus naturalibus verba facit, non ad scientiam, sed ad historiam naturalem pertinentia tradit, quippe non solis Philosophis veri nominis, sed vulgo etiam & literatis in rebus naturalibus non altius vulgo sapientibus intelligenda. Patet adeo, ex scriptura sacra dirimi non posse controversiam de motu Terræ, cum hæc quæstio ad scientiam naturalem pertineat, adeoque a Philosophis Mathematicis decidenda. Egregie in rem nostram Gassendus (x) *duplicem codicem sacrum distinguit, alterum scriptum, qui Bibliorum nomine venit, alterum Naturam rerum, & illius interpretes Theologos, hujus vero Mathematicos agnoscit, Deo nimirum duplici lumine sese manifestante, revelationis puta ac demonstrationis. In scientia adeo naturali audiendi sunt Mathematici, sicut in objectis fidei Prophetæ, quorum illi non minus, quam hi Dei ad homines interpretes. Et quemadmodum extra limites evagari censerentur Mathematici, qui res fidei ex Geometria confutandas aggrederentur; ita non minus cancellos egrediuntur Theologi & concionatores, qui de quæstionibus ad scientiam naturalem spectantibus & Geometriæ ac Opticæ ignarorum captum longe superantibus ex Scriptura sacra, quæ nihil earum rerum docet, decretoriam sententiam proterve pronuntiant. Exemplo sunt* Lactantius *atque* Augustinus, *quorum ille de rotunditate Telluris* (y), *hic de antipodibus* (z) *pueriliter admodum locutus, etsi uterque Scripturæ quædam verba in favorem hypotheseos suæ, oppido falsæ, adduceret.*

SCHOLION 5.

618. *Neque est quemadmodum alibi* (a) *jam monuimus, cur Ecclesiæ Romanæ Doctoribus scrupulum moveat Copernicanam systema, cum nec placitis Ecclesiæ suæ repugnet, cujus post scripturam autoritas ipsis quoque sacra esse debet. Etsi enim a Cardinalibus librorum censuræ propositis in* Galilæo *damnatum fuerit* (b); *nunquam tamen a Pontifice Summo, neque a concilio pro hæresi declaratum, ut systema terræ*

(x) in Oratione inaugurali, quæ editioni Hagienii Institutionis Astronomicæ ejusdem subjungitur. p. 165.

(y) Institut. divin. lib. 3. c. 14.

(z) de Civitate Dei lib. 16. c. 9.

(a) in Ratione Prælectionum Sect. 1. c. 3. §. 24.

(b) Ricciolus in Almag. vetere & novo Tom. 2. lib. 9. sect. IX. c. 40. f. 498 & seqq.

terræ quiescentis pro articulo fidei haberi debeat: qua ratione Cartesius *systema Copernicanum amplexus, salva in Ecclesiam Romanam & Pontificem maximum reverentia a scrupulis conscientiam liberavit* (c). *Immo ecclesiam non niti contra evidentiam, sed declaraturam, quod systema terræ motæ S. S. adversum non sit, quamprimum aliqua ejus demonstratio in medium proferatur, rescripto* (d) *jam publice declaravit* P. Fabri *e Societate Jesu, Pœnitentiarius in templo D. Petri, quod Romæ est. Quamobrem & permittit, ut eodem tanquam hypothesi in rebus astronomicis utamur; quemadmodum jam supra* (§. 593) *exemplo* Riccioli *docuimus*.

SCHOLION 6.

629. *Quodsi tamen quis fuerit aut hebetiore ingenio, quam ut hactenus dicta capere possit, aut infirmior, quam ut sibi persuadeat, a Deo permitti, ut scripturam in nonnullis non intelligant, qui ad eam interpretandam Ecclesiæ præficiuntur: ei cum viro summo* Keplero (e) *suadeo*, „ut missa schola „Astronomica, damnatis etiam, si „placet, Philosophorum placitis suas „res agat, & ab hac peregrinatione „mundana desistens domum ad a„gellum suum excolendum se re„cipiat, oculisque, quibus solis videt, „in hoc adspectabile cœlum sublatis „toto pectore, in gratiarum actio„nem & laudes Dei conditoris ef„fundatur, certus se non minorem „Deo cultum præstare, quam Astro„nomum, cui Deus hoc dedit, ut „mentis oculo perspicacius videat, „quæque invenit, super iis Deum „suum & ipse celebrare posfit & ve„lit, *nec unquam ab Astronomis utpote non secundum affectuum impetum, sed secundum rationem pronunciantibus, vicissim damnatum iri.*

THEOREMA 28.

630. ***Sol fere in medio systematis planetarii quiescit, nisi quod motu vertiginis circa proprium axem moveatur. Circa eum moventur in orbitis peculiaribus 1. Mercurius, 2. Venus, 3. Tellus, 4. Mars, 5. Jupiter & 6. Saturnus: circa Terram vero in peculiari orbita movetur Luna, interea dum totum illud spatium, quo orbita Lunæ continetur, una cum Tellure circa Solem transfertur & simili modo quatuor circa Jovem, quinque circa Saturnum Satellites gyrantur.***

Sit enim in S Sol & Terra in T. Tab.
Quoniam orbita Veneris atque VII.
Mercurii Solem S ambit, Tellure Fig.
T extus constituta, orbitaque Mer- 67.
curii intra orbitam Veneris continetur (§. 576); circa Solem duo describantur circuli, designabit eorum interior orbitam ☿, exterior

Hh hh 2 orbi-

(c) in epistola ad Mersennum, quæ est 80 part. 2.
(d) Legitur in Transact. Anglican. A 1665. mense Junio.
(e) in Introductione ad Commentarios de Motibus stellæ Martis.

orbitam ♀. Porro cum Lunæ orbita Tellurem ambiat, sed non Solem (§.578); repræsentabitur per circulum circa Terram descriptum. Similiter cum orbitæ Saturni, Jovis atque Martis & Solem S, & Tellurem T ambiant, eorum tamen centra Soli S propiora esse debeant, quam Terræ T (§.577), sitque orbita ♂ Telluri propior, quam ♃ & orbita ♃ propior quam ♄ (§.591); ex Sole S describantur tres circuli ambitu suo Tellurem T continentes, representabit intimus orbitam ♂, medius orbitam ♃ & extimus orbitam ♄. Circa Jovem describantur quatuor, circa Saturnum quinque circuli; erunt iidem orbitæ Lunularum Jovialium & Saturninarum (§. 500.518). Denique cum Tellus T motu annuo circa Solem S feratur (§.622); ex Sole S per Tellurem T describatur circulus, qui ejus orbitam exhibebit & spatium, quod inter orbitas Veneris & Martis alias vacuum relinqueretur, occupabit. Terram vero cum planetis reliquis ita circa Solem moveri, ut, dum progrediuntur, continuo circa axes suos convertantur, ex superioribus (§. 496.498.) manifestum est. Patet adeo, systema planetarium ea ratione se habere, qua ipsum in theoremate præsente descripsimus.

COROLLARIUM.

631. Sunt itaque ♄, ♃, ♂, ♁, ♀, & ☿ planetæ primarii; ☽ vero secundarius est (§. 529).

SCHOLION.

632. *En celebre hoc ævo Mundi systema, quod ab instauratore* Copernico *vulgo* Copernicanum *dici solet, & cujus ope Astronomia ad insignem perfectionem deducta.* Tycho de Brahe (f) *orbitam Telluris omittit & ejus loco orbitam Solis circa Terram circumducit, quæ orbitam ♂ intersecat, ut is Telluri Sole propior fieri possit* (§.491), *sicque systema* Copernicanum *fere totum probat. Enimvero cum nulla ratio* (§.620. 621), *sed sola superstitio* (§.627.628) *suadeat, Solem circa Tellurem moveri, Terram vero quiescere, non opus est ut figmentorum recensione Astronomiæ puritatem commaculemus. Id itaque annotasse nobis sufficerit, quod in systemate Tychonico nullæ sint planetarum orbitæ nisi fictitiæ* (§.620): *quod adduxit* Origanum (g) & Longomontanum (h), *ut motu vertiginis Telluris concesso motum tantum annuum Soli concederent.*

CA-

(f) Progymnasm. lib. 2. c. 8. p. m. 189.
(g) Vid. præfat. ad ephemerides.
(h) Astron. Danicæ lib. 1. c. 1. f. 161.

CAPUT IV.

DE

THEORIA PLANETARUM PRIMARIORUM.

HYPOTHESIS.

633. ***Tellus & Planetæ omnes primarii moventur in orbita elliptica circa Solem, in cujus foco uno S Sol quiescit, ea quidem lege, ut radius vector* SI *ex centro Solis* S *in centrum Planetæ* I *ductus describat areas* ISA *temporis proportionales.***

Tab. VII. Fig. 68.

SCHOLION.

634. *Hæc ex multiplici observationum collatione magna ingenii sagacitate deduxit* Keplerus (i), *mire triumphaturus, si, quod recentius repertum infra expressius docebitur, theoriam suam Geometriæ & Mechanicæ apprime conformem intellexisset. Ante* Keplerum *Astronomi omnes orbitas planetarum supposuere circulos eccentricos: qualis quidem orbita in Sole sic satis observationibus satisfaciebat, at in Planetis reliquis, præsertim in Marte nimium ab iis aberrabat. Orbitas planetarum esse lineas in se redeuntes ex eo constabat, quod elapso aliquo temporis intervallo restituantur ad eundem terminum, unde digressi fuerant. Quoniam linearum in se redeuntium notissima circulus, cui in Geometria elementari locus est; facile erat supponere, orbitas istas esse circulares. Et quia motus Solis & Lunæ inæquabilis apparebat, qui ob perennitatem suam æquabilis judicabatur; orbitam Solis & Lunæ esse circulum Telluri eccentricum inferebatur, præsertim cum & continua & certa lege facta diametrorum apparentium variatio continuam distantiarum a Terra mutationem loqueretur. In Sole circulus eccentricus satisfacere videbatur salvandis phænomenis ea certitudine, ut prædici possent; sed in Marte nullo satisfaciebat modo, ut adeo indomitus* Keplero *ansam daret de motu elliptico cogitandi, felici prorsus, conatu.*

DEFINITIO II.

635. *Perihelium* est punctum orbitæ P, in quo Planeta minimam a Sole S distantiam habet. In motu Solis circa Terram idem dicitur *Perigæum.* Tab. VII. Fig. 60.

(i) In Commentariis de Motibus stellæ Martis.

DEFINITIO 12.

636. *Aphelium* est punctum orbitæ A, in quo Planeta maximam a Sole S distantiam habet. In motu Solis circa Terram idem dicitur *Apogæum*.

DEFINITIO 13.

637. *Linea apsidum* est recta AP ex aphelio A in perihelium P ducta.

DEFINITIO 14.

638. *Eccentricitas* est distantia centri orbitæ C a Sole S.

SCHOLION.

639. *In Astronomia vetere dicitur distantia centri orbitæ a centro Terræ.*

DEFINITIO 15.

640. *Intervallum* est recta IS ex centro planetæ I in Solem S ducta, seu distantia planetæ a Sole IS.

DEFINITIO 16.

641. *Circulus eccentricus* est circulus PDAE ex centro orbitæ C dimidio axe CA tanquam radio descriptus.

SCHOLION.

942. *In vetere Astronomia circulus eccentricus est ipsa orbita planetæ.*

DEFINITIO 17.

643. *Motus medius* est, quo planeta in sua orbita æquabiliter moveri supponitur.

SCHOLION.

644. *Ad eum adeo determinandum opus est, ut integræ revolutionis periodus in quantumlibet minimis scrupulis definiatur.*

DEFINITIO 18.

645. *Motus verus* est motus Planetæ, qualis ex Tellure spectatur.

DEFINITIO 19.

646. *Anomalia* est distantia Planetæ ab Aphelio vel Apogæo.

DEFINITIO 20.

647. *Anomalia media* sive *simplex* in veteri Astronomia est distantia loci medii planetæ ab Apogæo; in recentiore *Kepleri* tempus, quo planeta ab Aphelio A usque ad locum medium seu punctum orbitæ suæ I digreditur.

COROLLARIUM.

648. Quoniam area ASI tempori, quo planeta arcum AI describit, proportionalis est (§. 633); eadem mensura anomaliæ mediæ optime constituitur.

DEFINITIO 21.

649. *Anomalia eccentri* est arcus circuli eccentrici AK inter Aphelium A & rectam KL, quæ per centrum planetæ I ad lineam apsidum AP perpendicularis ducitur, interceptus.

DE-

DEFINITIO 22.

650. *Anomalia vera vel coæquata* seu *angulus ad Solem* est angulus ASI, sub quo distantia planetæ ab Aphelio AI ex Sole videtur.

COROLLARIUM.

651. In motu adeo Solis erit distantia loci veri Solis ab Apogæo ex Tellure visa (§.636), seu potius distantia loci veri Telluris ab Apogæo ex Sole visa quæ isti æquipollet (§. 571).

DEFINITIO 23.

652. *Æquatio centri* seu *Prosthaphæresis* est differentia inter locum verum & medium planetæ, seu quod perinde est, inter anomaliam mediam & coæquatam.

PROBLEMA 5.

653. *Observare æquinoctium seu ingressum centri solaris in æquatorem.*

RESOLUTIO.

1. Cum hodie ex ephemeridibus & calendariis constet dies, in quo Sol æquatorem ingreditur, eo die observetur altitudo Solis meridiana (§. 129. 137), per additionem parallaxeos (§. 368) & subtractionem refractionis corrigenda (§. 336).
2. Conferatur altitudo Solis cum altitudine æquatoris: cui si æqualis deprehendatur, æquinoctium in ipsum meridiem incidit. Quodsi illa hac major fuerit, æquinoctium vernale ante meridiem, autumnale post eundem contigit. Denique si illa hac minor deprehendatur, vernale post meridiem, autumnale ante eundem accidit (§. 158). Quare
3. Altitudo minor e majore auferatur, ut relinquatur declinatio Solis (§. 150).

Dico, tot horis ante vel post meridiem contigisse æquinoctium, quot scrupulorum primorum declinatio extiterit.

DEMONSTRATIO.

Intervallo 24 horarum Sol primum fere gradum arietis vel etiam libræ percurrere observatur (§. 203) & in spatio tam exiguo supponere licet, declinationis incrementa in casu priore, decrementa in posteriore esse tempori proportionalia. Cum adeo declinatio in 10° ♈ & ♎ sit 24′, supposita declinatione eclipticæ 23° 30′, aut juxta *Dn. de la Hire* 23° 55′ (§. 198); evidens est declinationem tunc temporis variari minuto uno in singulas horas. *Q. e. d.*

OB-

OBSERVATIO. 46.

655. *Quodsi plures observationes æquinoctiorum inter se conferantur, Solem diutius in signis borealibus, quam in australibus commorari manifestum est. Juxta* Cassini *observationes Sol commoratur in signis borealibus* 186 d. 14 h. 53', *in australibus vero* 178 d. 14 h. 56', *differentia adeo existente* 7 d. 13 h. 57' (k).

COROLLARIUM.

656. Cum maxima Solis a terra distantia hodie in ♋ sit, minima in ♑ (§. 554); Sol longius commoratur in semicirculo, in quo majorem a Terra distantiam habet.

PROBLEMA 6.

657. *Observare solstitium, seu ingressum Solis in* 0 ♋ & 0 ♑.

RESOLUTIO.

1. Cum hodie ex ephemeridibus & Calendariis non ignotus dies, quo Solstitium accidere debet; per aliquot dies observetur altitudo meridiana Solis, maxima, qua fieri potest, accuratione, magno inprimis gnomone, qui Quadrantibus hoc in negotio præferendus (§. 129. 137).
2. Quamprimum tres obtinentur altitudines, quarum media in Solstitio æstivo major, in hiberno minor extat reliquis, hoc ipso dies Solstitii innotescit (§. 159).
3. Altitudo Solstitialis conferatur cum altitudinibus immediate antecedente & consequente. Quodsi enim ambæ fuerint æquales, Solstitium in ipsum meridiem incidit: si præcedens fuerit major consequente, solstitium æstivum post meridiem accidit, brumale vero ante eundem.
4. Quare cum declinatio Solis tunc temporis intervallo 24 horarum non ultra 15 secunda mutetur (§. 198), differentia altitudinis Solstitialis ab antecedente vel consequente per subtractionem inventa, ope regulæ trium reperitur horarum intervallum, quo a meridie solstitium distat.

COROLLARIUM.

657. Error adeo 15 secundorum in altitudine meridiana admissus producit errorem integri diei in tempore solstitii definiendo.

SCHOLION.

658. *Patet hinc difficultas observandi Solstitia, ut adeo alium modum observandi*

(k) Astron. Reform. lib. 1, c. 7. f. 22, 23.

vandi Solstitia excogitaverit Hallejus (l) *demonstratum a* Gregorio (m), *quo Solstitia accuratius observari posse confidit, quam æquinoctia observantur* (§. 654). *Operæ igitur pretium judicamus ut eundem hic distincte exponamus & ex primis principiis more nostro demonstremus.*

LEMMA 1.

Tab. XII. Fig. 98. 659. *Sinus versus* RG *&* rg *sunt in ratione duplicata chordarum* RC *&* Rc *arcuum, ad quos referuntur.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut diameter circuli ad chordam RC ita chorda RC ad sinum versum RG & ut eadem circuli diameter ad chordam Rc ita chorda Rc ad sinum versum Rg (§. 330 *Geom.*), consequenter diameter ad sinus versos RG & Rg in ratione duplicata diametri ad chordas RC & Rc (§. 216 *Arithm.*). Quamobrem sinus versus RG & Rg sunt in ratione duplicata chordarum RC & Rc (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

660. Quoniam arcus exigui sunt inter se ut chordæ; si arcus RC & Rc fuerint exigui, erunt sinus versus RG & Rg in ratione duplicata arcuum RC & Rc.

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

THEOREMA 29.

661. *Differentiæ declinationum Solis a maxima paulo ante & post Solstitium sunt inter se in ratione duplicata temporum inter singula observationum momenta & ipsum Solstitium interceptorum.*

DEMONSTRATIO.

Designet arcus RL eclipticæ portionem exiguam prope punctum Solstitiale R & recta eam tangens TR portionem tropici. Ex punctis eclipticæ C & c demittantur ad TR perpendiculares, erunt DC, dc distantiæ a tropico, cum arcus exigui pro lineis rectis haberi possint, consequenter differentiæ declinationum in C & c a maxima in R. Quodsi RG ducatur ad TR perpendicularis, erit ea pars diametri (§. 292 *Geom.*) & ductæ ex punctis c & C rectæ CG & cg ipsis DR & dr parallelæ erunt ad RG perpendiculares (§. 230 *Geom.*), consequenter DC = GR & dc = gR (§. 226 *Geom.*). Quamobrem cum RG & rg sint in ratione duplicata arcuum RC & cR (§. 659); erunt etiam Dc & dc seu differentiæ declinationum solis a maxima in punctis C & c in ratione dupli- Tab. XII. Fig. 98.

Ii ii cata

(l) in Transact. Anglic. num. 219 & p. 12.

(m) in Elem. Astron. Phys. & Geom. lib. 3, prop. 11. f. 281 & seqq.

cata eorundem arcum RC & R*c*. Patebit ex inferioribus ideo, quod Apogæum Solis a puncto Solstitiali non procul distet, motum, ad sensum æquabilem esse. Sunt itaque arcus CR & *c* R ut tempora, quibus percurruntur (§. 31 *Mech.*), consequenter differentiæ declinationum in punctis C & *c a* maxima DC & *dc* sunt circa Solstitia in ratione duplicata temporum inter momenta observationum in C & *c* & solstitium interceptorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

662. Quoniam arcus RC pro recta sumi potest, cum sint *cd* & CD inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit $dR : DR = cR : CR$ (§. 268 *Geom.*), consequenter cum arus *c*R & CR repræsent tempus ab observationibus in *c* & C factis usque ad solstitium in R residuum, quemadmodum ex demonstratione intelligitur, idem tempus etiam exponi potest per rectas *d*R & DR.

COROLLARIUM 2.

663. Et quoniam $Rg : RG = gc^2 : GC^2$ (§. 661. 662); arcus ecliptica exiguus LR prope solstitium parabolam repræsentat, cujus abscissæ R*g*, RG exponunt differentias declinationum a declinatione maxima, semiordinatæ vero *gc*, GC tempora inter momenta declinationum observatarum & ipsum solstitium intercepta.

THEOREMA 30.

664. *Si circa Solstitium observentur umbræ gnomonis prealti, in* EG, & F; *erunt differentiæ umbrarum* EG & EF *differentiæ declinationum Solis in observationum momentis.* Tab. XII. Fig. 99.

DEMONSTRATIO.

Quoniam gnomon AB ad BG perpendicularis, anguli BAG, BAE & BAF tanquam suis verticalibus æquales (§. 156 *Geom.*) exhibent distantias Solis a vertice, consequenter cum tantundem ad verticem Sol accedat, quantum ab æquatore recedit, adeoque declinatio ejusdem augetur (§. 75), & contra anguli EAG & EAF sunt differentii declinationum in G, E & F æquales. Concipiamus jam planum aliquod CD ad planum BG ita inclinatum, ut radius A*g* sit ad idem perpendicularis, ob angulos *e* A*f* & *e* A*g* admodum exiguos, etiam A*f* & A*e* ad idem planum erunt propemodum perpendiculares, consequenter si iisdem ducas arcus per puncta *g* & *f*, ipsis perpendiculares (§. 38 *Anal. infin.*), arcus isti angulorum *e* A*f* & *g* A*e* mensuræ (§. 57 *Geom.*) sensibiliter non different a rectis *eg* & *ef* atque

atque ideo hæ rectæ pro differentiis declinationum Solis in G, E & F haberi possunt. Jam quia gnomon AB præaltus *per hypoth.* rectæ Gg, Ee, Ff in puncto valde remoto A concurrentes pro parallelis haberi possunt. Quamobrem erit GE : EF = *ge* : *ef* (§. 268 *Geom.*), consequenter umbrarum in G, E & F observatarum differentiæ GE & EF sunt ut differentiæ declinationum in observationum momentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

665. Quodsi ponamus in H esse locum umbræ solstitialis; erunt HG, HE, HF differentiæ declinationum Solis in G, E & F a declinatione maxima.

PROBLEMA 7.

Tab. XII. Fig. 18. 666. *Datis tribus observationibus umbrarum gnomonis præalti in eodem circulo verticali circa Solstitium, veluti inter 5 dies ante Solstitium & intra quinque dies post eundem, in* G, E & F; *invenire tempus Solstitii.*

RESOL. & DEMONST.

1. Cum differentiæ umbrarum a solstitiali HG, HE, HF sint in ratione duplicata temporum inter momenta observationum & tempus solstitii interceptorum (§. 665. 661); si circa rectam BH, in qua observantur umbræ gnomonis, descripta concipiatur parabola NHP, transiens in vertice per terminum umbræ solstitialis BH & HG, HE, HF sint differentiæ umbrarum observatarum a solstitiali; erunt GN, EM & FO tempora inter observationum momenta & solstitium in H intercepta (§. 663).

2. Sit igitur tempus inter primam & secundam observationem intercedens AC = NR = *a*, tempus intercedens inter secundam observationem & tertiam CD = *b*, differentia umbrarum in prima & secunda observatione EG = *c*, differentia earundem in secunda & tertia EF = *d*, tempus inter observationem secundam & Solstitium intercedens ME = *x*; erit tempus inter primam & Solstitium interceptum NG = *a* + *x* & quod intercipitur inter tertiam & solstitium FO = *b* − *x*. Quodsi porro parameter fuerit = *p*; erit $EH = x^2 : p$, $HG = (a^2 + 2ax + x^2) : p$ & $FH = (b^2 - 2bx + x^2) : p$ (§. 391 *Analys. infin.*).

3. Habemus itaque

$$c = \frac{a^2 + 2ax}{p} \qquad d = \frac{b^2 - 2bx}{p}$$

$$p = \frac{a^2 + 2ax}{c} \qquad p = \frac{b^2 - 2bx}{d}$$

$$\frac{a^2 + 2ax}{c} = \frac{b^2 - 2bx}{d}$$

$$a^2d + 2adx = b^2c - 2bcx$$

$$2adx + 2bcx = b^2c - a^2d$$

$$x = \frac{b^2c - a^2d}{2ad + 2bc}$$

Patet adeo, quomodo inveniatur tempus EM sive CB inter observationem umbræ secundam in E & momentum solstitii in B intercedens. Nimirum

1. Quadratum temporis a secunda observatione usque ad tertiam ducatur in differentiam umbræ in prima & secunda observatione & quadratum temporis inter primam & secundam observationem intercedentis in differentiam umbrarum in secunda & tertia observatione.
2. Ducantur etiam ipsa tempora in easdem umbrarum differentias.
3. Tandem differentia factorum *num.* 1. repertorum dividatur per duplam summam factorum *num.* 2. inventorum: quotus erit tempus a secunda observatione usque ad momentum Solstitii.

Quodsi etiam desideres tempora inter primam & tertiam observationem atque solstitii momentum interjecta, cum sit prius $MG = a + x$, posterius $FO = b - x$; erit illud $= a + \frac{b^2c - a^2d}{2ad + 2bc} = \frac{2a^2d + 2abc + b^2c - a^2d}{2ad + 2bc} = \frac{a^2d + 2abc + b^2c}{2ad + 2bc}$, hoc vero $= b - \frac{b^2c + a^2d}{2ad + 2bc} = \frac{2abd + 2b^2c - bc^2 + a^2d}{2ad + 2bc} = \frac{2abd + a^2d + b^2c}{2ad + 2bc}$.

Si umbra in F sit media inter umbram in E & G, ut nempe AC = CD, erit $a = b$, adeoque $x = ME = \frac{a^2c - a^2d}{2ad + 2ac} = \frac{ac - ad}{2d + 2c}$, $MG = \frac{a^2d + 2a^2c + a^2c}{2ad + 2ac} = \frac{3ac + ad}{2d + 2c}$ & $FO = \frac{2a^2d + a^2d + a^2c}{2ad + 2ac} = \frac{3ad + ac}{2d + 2c}$. Nimirum

Dupla summa differentiarum, quæ inter umbras in prima & secunda, atque in secunda & tertia observatione intercedunt est ad differentiam earundem, ut tempus inter primam & secundam observationem intercedens ad tempus inter observationem

nem ſecundam & ſolſtitium interceptum]

Et ut eadem dupla ſumma ad ſummam ſimplam ſed dupla differentia umbrarum in prima & ſecunda obſervatione auctam ita tempus inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam & ſolſtitium.

Denique ut eadem dupla ſumma ad ſummam ſimplam, ſed tripla differentia in ſecunda & tertia obſervatione auctam ita tempus inter primam & ſecundam obſervationem intercedens ad tempus inter tertiam obſeruationem interceptum.

SCHOLION.

667. *Regulæ hæ praxi admodum accommodatæ & ex ipſa reſolutione problematis apparet, cur* Hallejus *asſeruerit, Solſtitia facilius & accuratius obſervari posſe quam æquinoctia. Etenim umbrarum obſervationes facillimæ, & calculus nulla alia clementa aſtronomica ab altis obſervationibus pendentia ſupponit, quemadmodum obſervationes æquinoctiorum obnoxiæ ſunt refractionibus & calculus eorundem pendet ab elevatione æquatoris & declinatione maxima eclipticæ* (§.635).

OBSERVATIO 47.

668. *Quodſi obſervationes æquinoctiorum cum obſervationibus ſolſtitiorum conferas; inæqualitas moræ Solis in quatuor eclipticæ quadrantibus manifeſta eſt. Juxta* Ricciolum (n) *mora Solis in ſignis vernalibus* 93 d. 36′; *in æſtivis* 93 d. 12 h. 12′; *in autumnalibus* 89 d. 14 h. 11′; *in hibernis* 89. d. 45′.

PROBLEMA 9.

669. ***Invenire quantitatem anni ſolaris, hoc eſt, temporis intervallum, quo eclipticam percurrit.***

RESOLUTIO.

1. Obſervatio æquinoctii antiqua conferatur cum obſervatione recentiore, ubi prius antiqua methodo inferius tradenda ad eundem meridianum atque idem calendarium fuerit reducta, & per ſubtractionem inveſtigetur præcesſio æquinoctiorum, hoc eſt, temporis intervallum, quo a die obſervationis antiquæ in antecedentes retrogresſum.
2. Quæratur tempus inter duas obſervationes intercedens in annis Julianis, quorum unusquisque 365 dierum & horarum 6, & per eam præcesſio æquinoctiorum dividatur, quotus eſt præcesſio anni unius.
3. Quodſi ergo hæc a quantitate anni Juliani ſubducatur, relinquetur quantitas anni vera.

(n) Aſtron. Reform. lib. 1. c. 7. f. 22. 23.

E. gr. *Hipparchus* obſervavit A. 158 ante Chriſtum natum Alexandriæ æquinoctium autumnale d. 27 Sept. 24 h. ſeu in ipſo meridie: *Hevelius* vero A. 1655 Dantiſci d. 12 Sept. 21 h. 12′ 30″. Eſt ergo

Æqu. *Hipparchi* 158 A. 27 Sept.	24 h.	0′.	0″		
differ. meridianorum ſubtr.	1	27	9		
Æquinoct. *Hipparchi* in merid. Dantiſ. 158 A. 27 Sept.	22 h.	32′	51″		
Æqu. *Hevelii* 1655 A. 12 Sept.	21	12	30		
Interval. Annor. 1812					
Præceſſio æquinoctii 14 d.	1 h.	20′	21″		
Ergo annua		11′	10″	12‴	37⁗
An. Julian. 365 d. 5. h.	59	59	59	60	
Ann. Solar. 365 d. 5 h.	48.	49.	47.	23	

SCHOLION.

670. *In quantitate anni ſolaris determinanda æquinoctia ſolſtitiis præferuntur, quia ſolſtitia communi methodo difficilius obſervantur* (§. 6). *Et æquinoctia autumnalia vernalibus anteponuntur, quia vernalium obſervationes refractio ob vapores vere copioſiores magis turbare creditur.*

OBSERVATIO 48.

671. Keplerus *in Tabulis Rudolphinis quantitatem anni ſolaris ponit 365 dierum* 5 h. 48′ 57″ 39‴, Ricciolus *in Aſtronomia Reformata* 365 d. 5 h. 48′ 48″, Tycho *in Progymnaſmatibus* 365 d. 5. h. 48′ 5″, de la Hire *in Tabulis aſtronomicis* 365 d. 5 h. 49′, *qualem nimirum invenerunt* Blanchinius *atque* Caſſinus (o) *&* *Calendarii Gregoriani Autores ſuppoſuerunt.*

PROBLEMA 9.

672. *Data quantitate anni ſolaris, invenire motum Solis medium in anno 365 dierum, item diurnum, horarium &c.*

RESOLUTIO.

Quia motus medius eſt tempori proportionalis (§. 643), erit, ut quantitas anni ſolaris ad 360°, ita annus 365 dierum, dies unus, hora una, ſcrupulum unum &c. ad arcum eclipticæ eo tempore conficiendum. Reperietur adeo hic arcus ope regulæ trium (§. 302 *Arithm.*).

E. gr. *Philippus de la Hire* aſſumit quantitatem anni 365 d. 5 h. 49′ (§. 671), reperitur adeo motus in anno communi 11 ſignorum 29° 45′ 40″, in uno die 59′ 8″, in una hora 2′ 28″, in uno minuto primo 2″ 28‴ &c.

COROLLARIUM.

673. Per ſolam adeo additionem inſtar

(o) Vid. Acta Erudit. A. 1705. p. 309.

instar abaci Pythagorici (§. 109. *Arithm.*) inde construuntur Tabulæ motuum mediorum in annis, diebus, horis & scrupulis.

PROBLEMA 10.

674. *Observare locum Aphelii & Perihelii, seu situm lineæ apsidum determinare.*

RESOLUTIO.

Quoniam Terra in Apelio maximam, in Perihelio minimam a sole distantiam habet (§. 635. 638); ibi motus ejus tardissimus, hic velocissimus apparet (§. 354 *Ontol.*). Observetur itaque singulis diebus locus Solis, dum cancrum & capricornum ingreditur, summa, qua fieri potest, accuratione (§ 203) & loca se invicem consequentium dierum a se invicem subtrahantur, ut relinquatur motus Solis diurnus. Quando enim velocissimus, in Perihelio Terra est; quando tardissimus, in Aphelio, consequenter cum constet, ubi hæreat Sol, hoc ipso patet, ubi sit Terræ Aphelium & Perihelium.

Aliter.

1. Quodsi observationes locorum Solis per aliquod temporis intervallum continuentur, donec idem motus Solis diurnus bis reperiatur; duo habentur loca ab Aphelio & Perihelio æquidistantia. Quamobrem
2. si arcus inter duo ista loca interceptus bifariam dividatur, habetur locus Aphelii vel Perihelii, prouti observationes o ♋ vel o ♑ propiores (§. 554).
3. Cum Aphelium Perihelio opponatur (§. 633); loco uno dato, alter innotescit, addito semicirculo seu 180°.

PROBLEMA 11.

675. ***Invenire eccentricitatem Solis.***

RESOLUTIO.

1. Quoniam diameter apparens Solis maxima est ad minimam ut 32′ 43″ ad 31′ 38″, (§. 552), hoc est (reductione scrupulorum primorum ad secunda facta) ut 1963 ad 1898; erit distantia Solis a terra maxima SA ad minimam PS ut 1963 ad 1898 (211. *Optic.*). Tab. VII. Fig. 60.
2. Cum adeo sit PS + SA = PA = 3861; reperietur radius eccentrici CP 1930, consequenter SC = PC − PS = 32.
3. Quare si CP = 100000: invenitur CS = 1658 (§. 302 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

676. Cum eccentricitas SC in Sole vix sexagesimam radii eccentrici CP par-

partem excedat (§.675); orbita Solis elliptica a circulari non admodum differt.

SCHOLION.

677. *Unde non mirum, quod calculus in circulo eccentrico institutus observationibus satis respondeat. Et quoniam eccentricitas ex variatione diametrorum apparentium, in quibus observandis error aliquot scrupulorum secundorum evitari vix potest, deducta non satis exacta haberi debet; ideo nil obstat, quo minus eccentricitas & locus Apogæi in hypothesi circuli eccentrici investigetur: quod adeo faciemus problemate sequente.*

PROBLEMA 15.

Tab. IIX. Fig. 69. 678. ***Datis duabus observationibus æquinoctiorum sibi immediate succedentium & unius loci Solis extra puncta æquinoctialia & solstitialia in* S *: invenire eccentricitatem* TC *& locum Apogæi* A.**

RESOLUTIO.

1. Ob datum locum Solis L datur arcus DL, distantia ☉ a puncto æquinoctiali verno, consequenter angulus LTD (§. 57. *Geom.*) & ejus contiguus LTB (§. 149 *Geom.*).

2. Ob datum tempus æquinoctii in B, datur tempus, quo ☉ ex L in B pervenit: cui conveniens motus medius Solis reperiatur (§. 672), & sic habebitur angulus SCM seu SCI.

3. Similiter ob datum tempus æquinoctii in D datur tempus, quo Sol ex M pervenit in W: cui conveniens motus medius reperiatur (§. 672), & sic habebitur angulus MCW, consequenter angulus CMW (§. 248 *Geom.*) & ob ante repertum LTB (*num.* 1) angulus MIT (§. 245 *Geom.*), cui SIC æqualis (§. 156 *Geom.*).

4. Datis adeo in triangulo CSI latere CS 100000 & angulis SCI & CIS (*num.* 2 & 3), invenitur latus CI (§. 36 *Trigon.*), quod ex radio CM subductum relinquit MI.

5. Hinc porro in triangulo MIT ex datis singulis angulis (*n.* 1 & 3) & latere MI (*n.* 4) reperitur TI (§. 36 *Trig.*).

6. Denique ex datis in triangulo TIC lateribus TI & IC (*num.* 4 & 5) & angulo CIT (*num.* 3 & §. 149 *Geom.*), invenitur angulus LTA, distantia apogæi AL a loco Solis in L observato (§. 40 *Trigon.*) & eccentricitas TC (§. 36 *Trigon.*).

§. gr.

E. gr. *Ricciolus* (p) observavit Bononiæ A. 1655 d. 30. Jul. in ipso meridie locum Solis in 7° 0′ 8″ ♌ & æquinoctium autumnale in B d. 22 Septembr. h. 18 55′, tandem A. 1656 æquinoctium vernale in D d. 19 Martii h. 9. 51′. Erat adeo LTD 127° 0′ 8″, tempus quo ☉ ex L in B pervenit 54 d. 18 h. 55′ & quo ex B in D promotus 178 d. 14 h. 56′: unde angulus SCM 54° 0′ 35″ & angulus MCW 176° 3′ 10″ 35‴, adeoque porro CMW 1° 58′ 25″, MIT seu CIS 125° 1′ 43″, CIT 54° 58′ 17″ & CSI 0 57′ 42″. Quare si CS 100 000, reperitur CI 2049½, IM 97951, TI 4224, CT 3480 & LTA 28° 50′ 0″; sed LTD 127° 0′ 8″: ergo ATD 98° 10′ 8″, hoc est locus Apogæi ♋ 8° 10′ 8″.

COROLLARIUM 1.

679. Quodsi ex supposita eccentricitate TC, quæ in circulo eccentrico repræsentandis æquationibus respondet, quæratur ratio semidiametrorum apparentium, erit ea ob TV = CV − CT = 96520 & ob NT = CN + TC = 103480 ut 103480 ad 96520. Unde si semidiameter apparens maxima fuerit 1963″ seu 32′ 43″, reperietur minima 1830″ seu 30′ 30″, adeoque justa minor (§. 553). Quare cum dimidia eccentricitas seu ½ TC 1740 eodem, quo ante calculo, producat semidiametrum minimam 31′ 36″, quæ ab observata 31′ 38″ nonnisi 2″ dissidet (§. *cit.*); evidens est dimidiam eccentricitatem TC repræsentandis variationibus semidiametrorum apparentium, adeoque eccentricitati in ellipsi satisfacere (§. 675).

COROLLARIUM 2.

680. Hinc vero apparet centrum mediorum motuum non esse in centro eccentrici C, sed ab eo tanto intervallo distare versus Apogæum A, quanto Sol S ab eodem versus Perigæum P distat, ut nempe sit CS = CF. Tab. VII. Fig. 68.

SCHOLION 1.

681. *Cum hæc perpenderet* Keplerus *qui bisectionem e centricitatis primus reperit, atque perpenderet, esse in ellipsi duos focos* S & F *a centro* C *æqualiter utrinque remotos; in ellipticam orbitarum figuram incidit. Quamvis adeo pronum erat inferre, focum ellipseos alterum F esse centrum mediorum motuum, hoc est ex eo motus planetæ in orbita physice inæquales spectari æquales, quod etiam ab ipso animadversum constat* (q); *eam tamen hypothesin, quam postea excoluit* Sethus Wardus (r) *apud Anglos &* Comes de Pagan (s) *apud Gallos, rejecit, quod eam deprehenderet phænomenis minime consentientem, præsertim in Marte, qui theoriæ inveniendæ ansam dedit, ac præ-*

(p) Astron. Reform. lib. 1. c. 9. f. 30.
(q) Epit. Astron. Copernic. lib. 5. part. 2. p. 685.
(r) in Astronomia Geometrica.
(s) in Theoria Planetarum.

terea causis physicis, quas scrutabatur, alversum, quemadmodum & postea demonstratum est a Bullialdo (t) *& veram theoriam supra propositam exhibuit, quæ incessui planetarum in orbita curvilinea circa Solem convenit* (§.651 Mechan.).

SCHOLION 2.

682. Ptolemæus (u) *eccentricitatem Solis A. C. 139. reperit partium 4152 qualium radius eccentrici est 100000, quæ bisecta pro elli se est 2076. Enimvero* Albategnius (x) A.C. 883 *jam observavit eam esse justa majorem, eamque fecit 3465 $\frac{7}{12}$ istiusmodii partium, quas diximus, quæ bisecta evadit fere 1733. Etsi autem, qui ipsum secuti sunt, ipse* Copernicus & Tycho, *eandem majore* Albategniana, *utut minorem* Ptolemaica *statuerint, &* Keplerus *bisectam* (y) 1800 *partium esse collegerit, qualium eccentrici radius est* 100000; *nostro tamen ævo omnes in eo consentiunt Astronomi, eccentricitatem* Keplerianam *in excessu peccare ac ideo Tabulas Rudolphinas correctione indigere.* Cassinus *eccentricitatem bisectam statuit partium istiusmodi, quas diximus*, 1700; Whistonus (z) *eam accuratius esse ait* 1686.

LEMMA 2.

683. *Sector circuli* AKC *est ad aream integri circuli ut arcus* AK *ad peripheriam circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sector circuli AKC æqualis est triangulo cujus basis æqualis est arcui AK, altitudo autem circuli radio CA (§. 415 *Geom.*), area vero circuli æqualis est triangulo, cujus basis æqualis est integræ peripheriæ circuli, altitudo vero radio CA (§. 410 *Geom.*). Est itaque Sector AKC ad aream circuli in ratione arcus CA ad integram peripheriam (§. 389 *Geom.*). *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 68.

PROBLEMA 13.

684. *Data eccentricitate* SC *una cum anomalia eccentri* AK, *invenire anomaliam mediam.*

RESOLUTIO.

Quoniam anomalia media exprimitur per aream ASI seu ejus ad integram ellipsin, in qua planeta movetur, rationem (§.648), & area ASI ad ellipsin integram eam rationem habet, quam ASK ad circulum integrum (§. 141 *Analys. infinit.*); non alia re opus est, quam ut area KSA in istiusmodi partibus inveniatur, qualium area circuli integri ADPE est 360. Igitur Tab. VII. Fig. 60.

1. Data

(t) in Fundamentis Astron. Phil. clarius explicans c. 1 & 2 p. 7 & seqq.
(u) Almag. lib. 3. c. 4. f. m. 68.
(x) de Scientia stellarum c. 28.
(y) in Tab. Rudolphinis.
(z) in Prælect. Astronom. lect. 8. probl. 3. p. 90.

1. Data semidiametro eccentrici CA, quæratur area circuli (§. 420 *Geom.*).
2. Data eccentricitate SC una cum KL sinu anomaliæ eccentri KA, inveniatur area trianguli KSC (§. 392 *Geom.*).
3. Hinc porro ope regulæ trium investigetur, quot gradus & scrupula eidem triangulo conveniant, qualium integra circuli area est 360.
4. Jam cum Sector KCA habeat ad aream circuli rationem arcus KA ad peripheriam integram (§. 683); anomalia eccentri KA addatur triangulo KSC in gradibus & scrupulis circuli invento: summa erit area KSA, adeoque exprimet anomaliam mediam quæsitam.
5. Quodsi Planeta a perihelio P ad aphelium A progrediatur, triangulum S*k*C a sectore PC*k* seu anomalia eccentri subtrahendum, ut relinquatur anomaliæ mediæ ADPS*k* excessus ultra semicirculum PS*k*.

E. gr. juxta *Keplerum* in Rudolphinis eccentricitas Solis CS est 1800, radio CA existente 100000. Sit anomalia eccentri AK 2°; erit KL 3489, adeoque triangulum SKC 3140100. Sed circuli eccentrici area est 314 15900000 (§.425.429 *Geom.*): quare si eadem ponatur 360° seu 1296000″, reperietur SKC paulo major 129″ hoc est, quam proxime 2′ 10″. Est igitur anomalia media 2° 2′ 10″, prouti extat in *Rudolphinis*.

PROBLEMA 14.

685. ***Data eccentricitate* CS *una cum anomalia eccentri, invenire intervallum* SI.** Tab. VII. Fig. 86.

RESOLUTIO.

Quoniam angulum KCA anomalia eccentri AK metitur (§. 58 *Geom.*); erit CL ejusdem cosinus (§. 11 *Trigon.*), in ultimo quadrante C*l* sinus excessus super 3 quadrantes, in secundo, utpote sinus arcus D*k* sinus excessus super unum & in tertio utpote sinus arcus E*k* cosinus excessus super duos.

1. Fiat ut CA ad CL ita CS ad quartam proportionalem: quæ
2. in primo & ultimo quadrante addatur ad CA, in secundo & tertio inde subtrahatur, ut prodeat intervallum SI.

E. gr. Sit eccentricitas Solis CS 1800, anomalia eccentri KA 2°, erit CL 99939, consequenter quarta proportionalis ad CA, CL & CS 1799. Ergo intervallum SI 101799, prout extat in *Rudolphinis*.

DEMONSTRATIO.

Sit enim AL$=x$, SC$=c$, CA$=\frac{1}{2}a$,

erit SI in primo & tertio quadrante $\frac{1}{2}a + c - 2cx : a$, in secundo & quarto $\frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§.434 *Analys. infin.*). Est vero $c - 2cx : a$ quarta proportionalis ad $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a - x$ & c, hoc est, ad CA, CL & CS: ergo si ea addatur ad AC in casu uno, in altero autem inde subtrahatur, prodibit SI. *Q. e. d.*

PROBLEMA 15.

Tab. VII. Fig. 68. 686. *Datis anomalia eccentri* AK, *eccentricitate* SC *& intervallo* SI, *invenire anomaliam coæquatam seu angulum ad Solem* ISA.

RESOLUTIO.

I. Si Planeta fuerit in primo (vel ultimo quadrante), in triangulo ISL ad L rectangulo ex datis intervallo SI & SL composita ex cosinu anomaliæ eccentri AK in primo & sinu excessus super tres quadrantes in ultimo quadrante atque eccentricitate CS invenitur anomalia coæquata ISL in primo quadrante (§. 40. *Trig.*), vel ejus complementum ASk ad circulum in ultimo quadrante.

E. gr. Sit eccentricitas ☉ SC 1800, anomalia eccentri 1°, erit SI 101799 (§.685), CL 99939 & hinc SL 101739: reperitur ISL 1° 57′ 58″.

II. Si anomalia eccentri fuerit quadrans AD eccentricitas SC est latus trianguli GSC & angulus GSC reperitur ut ante.

III, Si planeta fuerit in secundo vel tertio quadrante, e. gr. in *k*, in triangulo IS*l* ad *l* rectangulo datur intervallum *i*S, latus *l*S, quod est differentia inter eccentricitatem SC & cosinum *l*C excessus anomaliæ eccentri super quadrantem in priore, super semicirculum in posteriore casu. Unde angulus *l*S*i* teperitur ut ante.

COROLLARIUM.

687. Quodsi anomalia media & coæquata a se invicem subtrahantur, relinquetur æquatio centri (§. 652).

SCHOLION 1.

688. *Patet jam ratio construendi* Tabulas æquationum, *quales pro Sole & singulis planetis exhibet* Keplerus *inter Rudolphinis. Nimirum* 1. Anomaliam eccentri *a gradu* 1 *usque ad* 180 *in prima columna posuit & ei valorem trianguli* SIC (*quod* partem æquationis physicam, *alias quoque* triangulum æquatorium *vocat*, *cum altera* pars æquationis optica *ipsi sit angulus* SIC) *seu respondentis in eccentrico* SKC *subjicit* (§. 684), *quorum aggregatum anomaliam mediam constituit* (§. cit.) 2. *Ad latus anomaliæ eccentri atque mediæ posuit* anomaliam coæqua-

quatam *per problema præsens* (§.686). *erutam* & 3. intervallum *per problema præcedens* (§.685) *repertum.*

SCHOLION 2.

689 *In aliis Tabulis astronomicis in columna prima compareat* anomalia mediæ *ex anomalia eccentri elicienda* (§. 684), *in altera* æquatio centri *ex coæquata & media anomaliis facile determinanda* (§.687) *& in tertia denique intervallum, quod per problema* 14 (§. 685) *reperiri potest.*

PROBLEMA 16.

690. ***Data eccentricitate & anomalia media, invenire anomaliam eccentri & anomaliam coæquatam.***

RESOLUTIO.

Constat ex superioribus (§.684), anomaliæ mediæ respondere aream KSA & anomaliæ eccentri sectorem KCA, cui tot partes areæ totius circuli conveniunt, quot arcus eccentrici AK habet gradus. Non alia igitur re opus est, quam ut area trianguli æquatorii SKC in partibus istiusmodi inveniatur, qualium circulus eccentricus 360 habet. Hinc enim innotescit anomalia eccentri (§. *cit.*) & inde porro coæquata (§.686). *Keplerus* (a) utitur regula positionum, pro arbitrio anomaliam eccentri assumens & inde mediam computans, calculumque quoties opus est, instaurans; id quod exemplo rectius, quam præceptis docetur.

Sit e. gr. anomalia media 2° 2′ 10″ seu 7330″. Quoniam sector KCA minor area KSA; erit etiam anomalia eccentri KA minor 2° 2′ 10″, adeoque sinus KL minor 3551494, sinu nempe 2° 2′ 10″. Fiat ergo KL 3550. Quoniam triangula DSC & SKC inter se in ratione DC & KL existunt (§.389 *Geom.*), DC vero 100000 & SC 1800, adeoque DSC 90 000 000 (§.392 *Geom.*) seu 3713″; reperietur per regulam trium ope nempe rationis DC ad KL seu sinus totius ad sinum anomaliæ eccentri assumtæ triangulum æquatorium SKC 132″ seu 2′ 12″, quod anomaliæ eccentri 2° 2′ 5″ (cui nempe respondet sinus 3550) additum, producit anomaliam mediam 2° 4′ 17″, quæ datam 2° 2′ 10″ excedit 2′ 7″. Assumatur ergo anomalia eccentri primo assumta minor, scilicet 2° 1′ ad instaurandum calculum. Cum ei respondeat sinus KL 3519, reperietur △ SKC 130″ seu 2′ 10″: quod additum anomaliæ eccentri 2° 1′, producit anomaliam mediam 2° 3′ 10″, data 2° 2′ 10″ majorem 1′. Assumatur itaque ad instaurandum calculum anomalia eccentri 2°. Quoniam eidem convenit KL sinus 3499 reperietur △ SKC 130″ seu 2′ 10″: quod additum anomaliæ eccen-

(a) Epit. Astron. lib. 5. p. 695.

riam ut 10000000 ad 31415926 (§. 426 *Geom.*), erit radius ad peripheriam ut 10000000 ad 62831853. Quare cum eadem peripheria sit 360°; inferendo ut 360° ad 62831853 ita arcus datus ad quartum proportionalem, invenietur arcus in istiusmodi partibus, qualium radius est 10000000.

2. Quare cum in Canone Sinuum sinus ejusdem arcus in istiusmodi partibus detur; si ab arcu auferatur, relinquitur differentia in partibus radii.

3. Denique cum gradus unus sit 174533 in partibus radii (*n.* 1) & scrupulorum secundorum 3600, inferendo ut 3600 ad 174533 ita differentia in partibus radii reperta (*n.* 2) ad quartum proportionalem, erit is eadem differentia in scrupulis secundis.

PROBLEMA 17.

Tab. VII. Fig. 68. 696. *Data eccentricitate* SC & *radio eccentrici* CA, *invenire axem dimidium minorem orbitæ ellipticæ* CG.

RESOL. & DEMONST.

Quoniam in ellipsi recta ex foco S ad punctum G ducta est axi dimidio majori CA æqualis (§. 434 *Analys. infin.*), a quadrato radii eccentrici SG subtrahatur quadratum eccentricitatis SC & ex residuo extrahatur radix, quæ erit dimidius axis orbitæ ellipticæ minor CG (§. 417 *Geom.*).

E. gr. Juxta *Keplerum* eccentricitas Solis SC = 1800, CA = 100000. Reperitur ergo CG = 99983.

PROBLEMA 18.

697. *Data anomalia media & eccentricitate* SC, *invenire coæquatam.* Tab. VII. Fig. 68.

RESOL. & DEMONST.

1. Quoniam anomalia media exprimitur per aream sectoris ASI (§. 648); ex ea inveniri potest semiordinata IL, ex loco planetæ L ad lineam apsidum AP ducta (§. 193 *Analys. infin.*).

2. Quæratur porro ex radio eccentrici CA & eccentricitate CS axis dimidius minor orbitæ ellipticæ CG (§. 696).

3. Quoniam IL ad LK ut CG ad CD (§. 599 *Anal. infin.*); per regulam trium invenietur LK: qui cum sit sinus anomaliæ eccentri AK (§. 3 *Trigon.* & §. 649 *Astron.*),

4. hæc cognita invenietur intervallum SK (§. 685), tandemque anomalia coæquata (§. 686).

Aliter.

Aliter.

Tab. XII. Fig. 101. Quia ex dato ſectore KSI ſemiordinata IL moleſto calculo eruitur, ideo addere lubet methodum faciliorem, ad condendas tabulas æquationum magis aptam.

1. Cum in △ DCS dentur latera DC radius eccentrici & CS eccentricitas una cum angulo DCS ipſi DCA anomaliæ mediæ datæ æquali *per hypoth.* deinceps poſito (*§.* 149 *Geom.*); reperietur angulus CDS (*§.* 40 *Trigon.*),
2. Quoniam hic ipſe angulus alteri DCK æqualis ſi angulus SDF fuerit uno ſcrupulo ſecundo minor (§. 694), id quod obtinere deprehenditur, ſi fuerit minor 2° 30′ CDS; angulus inventus ex anomalia DCA ſubtrahatur, relinquetur angulus ACK, anomalia eccentri (*§.* 649).
3. Quodſi vero idem angulus CDS fuerit major 2° 30′; ex datis in △ CDS lateribus DC & CS una cum angulo CDS *n.* 1. reperto invenitur latus SD (38 *Trig.*).
4. Hinc porro quæratur differentia inter arcum, qui metitur angulum CDS. & ejus ſinum in ſcrupulis ſecundis (§. 695), quem citra errorem ſenſibilem pro differentia inter arcum DK & ejus ſinum DE ſeu recta SF accipere licet.
5. Quoniam in △ SDF eſt ut DS ad ſinum totum ita SF ad ſinum anguli SDF (*§.* 33. *Trig.*), & SF in ſcrupulis data haberi poteſt pro arcu, cujus ſinus eadem SF in particulis decimalibus radii data, ſinus vero arcuum ſeu angulorum exiguorum ſunt inter ſe ut ipſi arcus ſeu anguli; erit quoque SF in ſcrupulis ſecundis data ad angulum SDF ut SD ad ſinum totum (*§.* 167 *Arithm.*), adeoque angulus SDF reperiri poteſt.
6. Quodſi jam angulus SDF ab angulo SDC ante (*n.* 1) invento ſubtrahatur, relinquetur angulus FDC, cui DCK æqualis & hinc ut ante (*n.* 2) reperitur anomalia eccentri KCA.
7. Data anomalia eccentri KCA & eccentricitate SC invenitur intervallum IS (*§.* 685), tandemque anomalia coæquata ISA (*§.* 686). Vel cum data anomalia eccentri ACK detur complementum ad duos rectos KCS (*§.* 149 *Geom.*) ac præterea in △ SCK dentur latera CS eccentricitas & CK radius eccentrici, reperietur angulus SKC (*§.* 40 *Trigon.*): qui ex

anomalia eccentri KCA subductus relinquit angulum KSA §. 239 *Geom.*). Quodsi SL sumatur pro sinu toto, erit KL tangens anguli KSA & IL tangens anguli ISA (§. 7. *Trigon.*). Quare cum sit KL ad IL ut radius eccentrici ad axem conjugatum orbitæ ellipticæ ex datis inveniendum (§ 599 *Analys. fin.*) inferendo: ut radius eccentrici CD ad dimidium axem minorem CG ita tangens anguli KSA ad tangentem anguli ISA reperitur tandem anomalia coæquata ISA.

Tab. VII. Fig. 68.

E. gr. Quæratur anomalia vera Solis, quæ respondet anomaliæ mediæ 2°. Cum sit juxta *Keplerum* eccentricitas SC = 1800'', erit typus exempli sequens.

CD = 100000	CD = 100000
SC = 1800	SC = 1800
CD + CS = 101800	CD − SC = 98200

$$\text{ang. } \tfrac{1}{2} DCA = \frac{CSD + CDS}{2} = 1^\circ$$

CD + SC = SA
CD − SC = SP

Log. SA	50077478
SP	49921115
Tang. ½ DCA	82419215
Summa Logg.	132340330
Tang. $\frac{CSD - CDS}{2}$	82262852

cui in Tabulis quam proxime respondent 57' 52''

$$\frac{CSD - CDS}{2} = 57' \quad 52''$$

$$\frac{CSD + CDS}{2} = 1^\circ \quad 0 \quad 0$$

DCK = CDS = 2' 8''
CDA = 2°

KCA = 1° 57' 52''

$$\tfrac{1}{2} KCA = \frac{CSK + SKC}{2} = 58' \quad 56''$$

Log. SA	50077478
SP	49921115
Tang. ½ KCA	82341291
Logg. Summa	132262406
Tang. $\frac{CSK - SKC}{2}$	82184928

cui in Tabulis respondent 56' 50''

$$\frac{CSK - SKC}{2} = 56' \quad 50''$$

$$\frac{CSK + SKC}{2} = 58 \quad 56$$

ASK = 1° 55' 46''

Log. CD	40000000
CG	39999261
Tang ASK	85274736
Logg. Summa	125273997
Tang. ASI	85273997

cui in Tabulis respondent 1° 55' 44'' pro anomalia coæquata quæsita.

COROL.

COROLLARIUM 1.

698 Quoniam perinde eſt, ſive b ipſi c addas & a $b+c$ ſubtrahas a, ſive differentiam $a-b$ a c ſubtrahas, utrobique nimirum prodeunte $b+c-a$; differentia logarithmorum diſtantiæ maximæ & minimæ a Sole AS & SP ſubtrahenda eſt a tangente dimidiæ anomaliæ mediæ ACD pro differentia dimidia angulorum CSD & CDS & a tangente dimidiæ anomaliæ eccentri ACK pro ſemidifferentia angulorum CKS & CSK.

COROLLARIUM 2.

699. Eodem modo patet, differentiam logarithmorum axium dimidiorum orbitæ ellipticæ ſubtrahi debere a tangente anguli ASK pro anomalia coæquata.

COROLLARIUM 3.

700. Quoniam in quolibet planeta diſtantia maxima & minima & axes dimidii orbitæ ellipticæ ſunt quantitates conſtantes; nonniſi duobus Logarithmis ad calculum opus eſt ſubtractivis, veluti in Sole, ſi eccentricitas *Kepleriana* retineatur, 156363 & 739, quorum ille eſt differentia logarithmorum diſtantiarum, hic axium.

SCHOLION.

701. *Monuit jam* Caſſinus (b), *cui methodum hanc debemus, in theoria Solis, Lunæ, Veneris, Jovis & Saturni, negligendam eſſe differentiam inter arcum* DK *& ejus ſinum* DE. *Calculus igitur in his planetis maximæ facilitatis* (§. 698 & ſeqq.). *Et quamvis differentia iſta in Marte atque Mercurio, quorum orbitæ valde eccentricæ, negligi non poſſit, ad facilitandum tamen calculum conſtrui poteſt Tabula* (§. 695), *qualem exhibet* Caſſinus (c), *ut inde differentiæ deſideratæ excerpi poſſint a Tabularum conditoribus, quoties opus habent.*

PROBLEMA 19.

702. ***Invenire Apogæi motum annuum.***

RESOLUTIO.

1. Conferantur inter ſe duæ obſervationes loci Apogæi longiſſimo intervallo a ſe invicem diſtantes, minorque e majore ſubducatur.
2. Differentia in ſcrupula minima converſa dividatur per numerum annorum inter utramque obſervationem intercedentium.

Quotus erit motus Apogæi annuus.

E. gr. *Hipparchus* anno ante Chriſtum 140 obſervavit Apogæum Solis in ♊ 5° 30′, *Ricciolus* anno poſt Chriſtum 1646 in ♋ 7° 26′ 15″. Quodſi differentia 31° 56′ 15″ ad ſcru-

(b) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1719. p. 199 edit. Bat.
(c) loc. cit. p. 204.

ſcrupula ſecunda redacta dividatur per intervallum annorum 1785 prodibit motus annuus Apogæi 1′ 2″. quemadmodum extat in Tabula Cel. *de la Hire*.

COROLLARIUM.

703. Dato motu annuo Apogæi, facile invenitur menſtruus atque diurnus & tabulæ motuum Apogæi conſtruuntur, quemadmodum tabulæ motuum mediorum (§. 672. 673).

PROBLEMA 20.

704. ***Dato ad aliquod momentum per obſervationem loco Solis vero, invenire medium.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur locus Apogæi ad datum tempus (§. 674. 678).

Tab. VII. Fig. 68.

2. Longitudo Apogæi ſubtrahatur a longitudine Solis, aucta integro circulo, ſi illa minor fuerit: quod relinquitur eſt Anomalia coæquata ſeu angulum KSL (§. 650).
3. Quodſi in tabulis æquationum anomalia coæquata evolvatur; invenietur ei reſpondens media.
4. Anomaliæ mediæ addatur locus Apogæi; ita prodibit locus Solis medius.

COROLLARIUM.

705. Dato loco Solis medio ad aliquod tempus datum facile invenitur idem ad tempus quodcunque aliud datum (§. 672).

PROBLEMA 21.

706. ***Dato motu Solis medio & motu Apogæi annuo, invenire motum anomaliæ annuum.***

RESOLUTIO.

Cum motus Apogæi annuus ſit differentia inter motum Solis medium & motum anomaliæ (§. 646); motus Apogæi ex motu Solis ſubductus relinquit motum anomaliæ annuum. E. gr.

Motus ☉ medius ann.	11. 29°	45′	40″
Motus Apogæi annuus			1	2
Motus anomal. annuus	11. 29	44	38

COROLLARIUM.

707. Dato motu anomaliæ annuo, invenitur etiam menſtruus & ſic tabulæ anomaliarum Solis conduntur.

SCHOLION.

708. *Tales Tabulas exhibet* Longomontanus *in Aſtronomia Danica. Notandum vero, quod pro motu anomaliæ diurno atque horario ſumatur medius diurnus & horarius ob tarditatem motus Apogæi.*

THEOREMA 32.

709. ***Dies ſolares ſunt inæquales.***

DEMONSTRATIO.

Quoniam cum arcubus eclipticæ æqualibus inæquales arcus æquatoris per meridianum transeunt, quem-

quemadmodum vel ex tabulis ascensionum rectarum constat, tum etiam ex collatione arcuum æquatoris & eclipticæ inter punctum æquinoctiale alterutrum & circulos quoslibet declinationum interceptorum statim innotescit; præterea ipse motus Solis verus in ecliptica inæqualis est, testibus observationibus: fieri omnino nequit, ut in singulis Solis revolutionibus idem numerus graduum ac scrupulorum æquatoris per meridianum transeat. Dies adeo solares inæquales sunt (§. 211). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

710. Quoniam ad motus siderum computandos tempus æquale requiritur; ejus mensura non inepte constituitur Sol quidam fictus, qui motu medio Solis in æquatore movetur.

COROLLARIUM 2.

711. Est adeo differentia inter dies æquales & inæquales temporis particula, quo durante differentia inter ascensionem rectam Solis veri & locum Solis ficti seu locum medium veri per meridianum transit.

DEFINITIO 24.

712. *Tempus medium* est tempus æquale, quod appulsu Solis ficti motu Solis veri medio in æquatore incedentis ad Meridianum determinatur.

DEFINITIO 25.

713. *Tempus apparens* vel *verum* est tempus inæquale, quod motu Solis veri in ecliptica incedentis determinatur.

DEFINITIO 26.

714. *Æquatio temporis* est differentia inter tempus medium & apparens.

PROBLEMA 22.

715. *Dies solares æquare, hoc est, tempus apparens in medium convertere & medium in apparens.*

RESOLUTIO.

I. Si ascensio recta Solis æquatur motui medio ejusdem, Sol fictus & verus eodem tempore per meridianum transeunt, adeoque tempus apparens cum medio coincidit.

II. Si ascensio recta est major motu medio, hic ab illa subtrahatur & differentia in tempus solare conversa (§. 212) subducatur ex apparente, ut habeatur medium, vel addatur medio, ut habeatur apparens (§. 721 & seqq.).

III. Si denique ascensio recta minor motu medio, illa ex hoc subducatur & differentia in tempus solare conversa (§. 212) addatur apparenti, ut habeatur medium,

 dium,

dium, vel e medio subducatur, ut prodeat apparens (§. *cit.*).

SCHOLION 1.

716. *Hæc æquandi ratio obtinet, si calculus fuerit progressivus: si vero retrogradus*, h. e. *si tempus ante epocham retro numeretur, contraria prorsus ratione operandum.*

SCHOLION 2.

717. *Dicitur autem* æquatio *a nobis exposita* astronomica, *cui alias addidere recentiores, hoc loco prætermittendas, quia non certis, sed ad arbitrium confictis fundamentis, judice* Ricciolo (d) *nituntur & ecclipsibus, omnibus pensitatis, astronomica magis satisfacit quam aliæ, ex falsis hypothesibus de Solis & Lunæ motibus, ex meridianorum differentia minus exacta & ex observationibus ecclipsium fallacibus manantibus, quæ contra eam afferuntur.*

PROBLEMA 23.

718. ***Constituere epochas seu radices motus Solis medii & Apogæi.***

RESOLUTIO.

1. Eligatur aliqua epocha, a qua principium numerationis fieri debet, e. gr. meridies diei primæ Januarii (aut ultimi Decembris) anni secularis.
2. Quæratur aliquis locus Solis verus ad datum quodcunque tempus apparens per observationem (§. 204).
3. Locus verus convertatur in medium (§. 713) & tempus apparens itidem in medium (§. 715), ut habeatur aliquis locus Solis medius ad datum aliquod tempus medium.
4. Quæratur intervallum inter epocham & tempus observationis medium in annis, diebus, horis atque scrupulis, eique competens motus medius assignetur (§. 672).
5. Subtrahatur is ex loco Solis medio ante invento, ut prodeat longitudo Solis media ad epocham, quæ tempus observationis præcedit; idem ad eundem addatur, ut locus Solis ad epocham prodeat, quæ tempus observationis sequitur.
6. Simili prorsus modo locus Apogæi observatur (§. 674. 678) & ad tempus medium reductus §. 715) epochæ alligatur.

SCHOLION.

719. *Hoc artificio constructæ sunt Tabulæ Epocharum seu Radicum a recentioribus:* Ptolemæus *vero*, Alphonsus & Copernicus *tempori apparenti epochas affixere. Notandum vero*

(d) Almag., lib. 3. c. 32, f. 179.

ro epochas tum alligatas esse meridiano, in quo observationes habitæ.

PROBLEMA 24.

710. *Ad datum tempus locum Solis verum supputare.*

RESOLUTIO.

1. Constituatur epocha motus Solis medii & Apogæi (§.718).
2. Intervallo temporis inter epocham & tempus datum intercedenti reperiatur conveniens motus medius & motus Apogæi (§. 703).
3. Uterque loco Epochæ affixo addatur, integris circulis, si qui proveniunt, abjectis, ut prodeat locus Solis medius & locus Apogæi ad tempus datum.
4. Locus Apogæi a loco Solis (integro circulo, si illo minor sit, aucto) subtrahatur, ut relinquatur anomalia media (§. 647).
5. Anomalia media data reperiatur coæquata (§. 697), aut æquatio a media ab Apogæo usque ad Perigæum subtrahenda a Perigæo ad Apogæum addenda, ut habeatur coæquata.
6. Anomaliæ coæquatæ addatur locus Apogæi supra repertus *n.* 3: summa erit locus Solis verus ad datum tempus medium in meridiano, cui epochæ alligantur.
7. Dato loco Solis vero quæratur ejus ascensio recta (§. 204): qua data, tempus medium in apparens convertatur (§. 75) & ut ante locus Solis ad adparens supputetur, aut (quia iterario calculi nimis molesta foret & præter necessitatem repeteretur, cum in paucis scrupulis horariis motus verus a medio sensibiliter non differat) loco Solis ad tempus medium invento addatur, vel ab eodem subtrahatur tantundem motus medii, quantum æquationi additivæ aut subtractivæ respondet.

DEMONSTRATIO.

Ratio totius calculi ex articulis citatis abunde patet: id unice demonstrandum, quod æquatio sit subtrahenda in sex prioribus anomaliæ mediæ signis, addenda vero in posterioribus. Quoniam enim centrum mediorum motuum F a centro verorum motuum S ultra C distare debet (§. 680); angulus IFA, vel *i*FA anomaliæ mediæ æqualis (§. 647), sicut ASI vel AS*i* est anomaliæ coæquatæ æqualis (§. 650). Quare cum angulus IFA > ISA & *i*FA > *i*SA (§. 239 *Geom.*), anomalia media in prio- Tab. VII. Fig. 68.

priore semicirculo major coæquata, consequenter æquatio e media subtrahenda, ut relinquatur vera (§. 652). Eodem prorsus modo patet, in altero semicirculo anomaliam coæquatam esse media majorem, cum angulus PS*i* sit major ipso PF*i* (§. 239 *Geom.*), consequenter æquatio media addenda, ut prodeat coæquata (§. 652). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

721. *Non aliis præceptis opus est, si quis ex Tabulis astronomicis locum Solis ad datum tempus computare voluerit, nisi quod in genere notandum, si qua accurate in Tabulis non extent, prout desiderantur, e. g. si quis in Tabulis* Philippi de la Hire *quærat æquationem ad anomaliam mediam* S. 1. 20° 25′, *& in ea tantum habeatur, quæ gradibus duobus & tribus respondet; quærendam esse per regulam trium partem proportionalem, pro re nata vel addendam, vel subtrahendam eo prorsus modo, quo in Trigonometria in excerpendis sinibus atque eorum logarithmis ex Canone sinuum usi sumus* (§. 38. Trigon.). *E. gr. æquatio Anomaliæ mediæ* 1 *S.* 2° *respondens est* 59′ 56″, *differentia inter eam & anomaliam* 1 *S.* 3° *est* 1′ 41″ *seu* 101″: *quodsi ergo fiat ut* 60′ *ad* 25′ *ita* 101″, *ad numerum quartum proportionalem* 42″, *erit pars proportionalis* 42″ *ad æquationem* 59′ 56″ *addenda, ut habeatur desiderata* 1° 0′ 38″. *Deinde notandum quod in omnibus istiusmodi computis astronomicis semper abjiciendi sint integri circuli ex additione resultantes & circulus unus addendus sit, si quando majus e minori subtrahendum.*

SCHOLION 2.

722. *Consultum vero videtur ut modum computandi locum Solis ex Tabulis* Cel. de la Hire *exemplo aliquo illustremus. Supputandus itaque sit locus Solis verus ad tempus apparens d.* 1. *Aug. A.* 1711 *in Meridiano Parisiensi, ad quem Tabulæ istæ constructæ sunt.*

A. 1700	Apog. 3S.	8°	7′	30″
A. 10			10	15
Jul.				35
	Apog. 3S.	8°	18′	20″

Rad.

Rad. A. 1700.	9 S. 10°	52′	17″	
Mot. med. A. 10	10. 29	35	11	
Jul.	6. 28	57	26	
Loc. ☉ med.	4S. 9°	24′	54″	
Apog. subtr.	3 8	18	20	
Anom. med.	1S. 1	6	34	
Æquat. subtr.		58	25	
Anom. coæq.	1S. 0	8	9	
Apog. add.	3 8	18	20	
Loc. ☉ ver.	4S. 8	26	29	
Asc. rect.	4 10	51	57	
auferat. inde	1	3	30	(§. 715)
Asc. corr.	4S. 9	48	27	
Long. med. ☉	4S. 9	24	54	
Excess. Asc.		23	33	
Æquat. temp. add.		1	34	
Mot. med. ☉ h. t.			4	
Loc. ☉ verus	4S. 8	26	29	

Loc. ☉ verus 4S. 8 26 33 in Merid. Paris. ad tempus apparens.

SCHOLION 3.

723. *Novam Tabularum formam excogitavit* Cl. Grandjean (d), *qua calculus mire abbreviatur & Ephemeridum calculatio facillima redditur, cum non ad singulos dies calculus instaurandus sit, quemadmodum vulgo fieri necesse est. Nimirum* 1. *construi jubet* Tabulam Transitus ☉ per Apogæum & Longitudinis Apogæi (*Wolfii Math. Tom.* 3.) *ad Annos Christi, ut inde momentum illius transitus loco Epochæ excerpi possit una cum longitudine Apogæi. Hoc momentum si auferatur a tempore dato, ad quod locus Solis computandus, relinquitur tempus a transitu per Apogæum elapsum. Quamobrem secundam construi porro præcipit* Tabulam veri motus anomalistici in singulis diebus ab Apogæo, *una cum differentiis diurnis, ut inde motus Longitudini Apogæi in momento transitus addendus excerpi & pro appendice horarum & scrupulorum pars proportionalis addenda reperiri possit, pro qua facilius invenienda addit* Tabulam *tertiam* proportionalis *motus diurni Solis. Quantum calculus hoc pacto abbrevietur, patet ex Autoris exemplo, quod hic subjicere lubet. Locum Solis exhibet ad d.* 12. *Jul.* 1732 *in meridie.*

A. 1732	194 d.	0h.	0′	0″
Transf. ☉ per. Apog.	182	21	13	54
Temp. ab Apog.	11 d.	2 h.	46	6″

Mot. anomal.	11 d.	10°	29′	21″
	2 h.		4	46
	46′		1	49
	6″			0
Longit. Apog.	3 S.	8	39	37
Loc. ☉ verus	3 S.	19°	15	33″

Cum in Tabula extent motuum ab Apogæo differentiæ diurnæ, sola earundem additione locus Solis ad dies sequentes innotescit. Patet etiam has Tabulas

Mm mm *sive*

(c) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1731 p. 433 & seqq. edit. Paris.

sine omni hypothesi ex ipsis observationibus deduci, & ea accuratione construi posse, quæ in observationes loci Solis cadit.

SCHOLION 3.

724. *Quodsi locus Solis aut planetæ cujuscunque ad Meridianum diversum ab eo, cui epochæ alligatæ sunt, supputandus; reductio meridianorum instituenda juxta ea, quæ suo loco independenter ab his docentur.*

SCHOLION 4.

725. *Quoniam æquatiô temporis in loco Solis, Lunæ ac planetarum inferiorum computando negligi nequit, nisi subinde integris minutis, immo in Luna dimidio gradu & amplius aberrare velis; ideo quoque construi solent tabulæ* æquationum temporis *huic usui inservientes: prout in problemate sequenti docetur.*

PROBLEMA 25.

726. ***Tabulas æquationum temporis construere.***

RESOLUTIO.

1. Constituatur aliquis terminus, unde æquatio temporis initium sumere debet noteturque ad illum diem differentia inter ascensionem rectam loci veri Solis & locum ejus medium.
2. Ad singulos gradus longitudinis mediæ quæratur respondens longitudo vera (§. 720).
3. Data longitudine Solis vera, quæratur ascensio recta ipsi conveniens (§. 204) & excessus ascensionis rectæ supra Solis locum medium supra inventus inde auferatur vel defectus illius ab hoc supra inventus eidem addatur, ut habeatur ascensio correcta.
4. Differentia inter ascensionem correctam & locum medium Solis assumtum in tempus solare convertatur: quod prodit, est æquatio temporis cum titulo competente (§. 715) Tabulæ æquationis inserenda.

E. gr. Sit epocha, a qua sumitur initium æquationis, dies prima Januarii A. 1700, qua ascensio recta veri loci Solis superabat locum ejus medium 1° 3′ 30″: quæritur æquatio temporis pro illo die, quo Sol in 1° ♌ versatur motu medio. Ergo

a Long. ☉ med.	4 S.	1°		
subtr. Apog. locus	3	8	7′	30″
erit Anom. med.		22	52	30
subtr. Æquatio centri			43	55
erit Anom. vera		22	8	35
Loc. Apog. add.	3 S.	8	7	30
Loc. Solis verus	4 S.	0	16	5
cui resp. Ascens. recta		122	28	10
subtrahatur excessus		1	3	30

erit

erit ascensio correcta	121	24	40
Jam locus medius Sol.	121	0	0

Excess. ascens. rectæ	24′ 40″
Respondent vero	
Æquatoris 24′ Temp. medii	1′ 36″,
40″	2 40

Ergo æquatio temporis	1′ 38″ 40‴
hoc est,	1′ 39″

quanta nimirum reperitur in Tabula æquationis temporis Cel. *de la Hire* (f).

Aliter.

Quoniam tabulæ hac ratione constructæ temporariæ sunt, quia locum Apogæi datum ad aliquod tempus supponunt, qui tamen fixus non est, sed singulis annis 2 scrupulis primis & 2 secundis mutatur; ideo ab aliis duplex conditur tabula æquationis temporis, & per duarum æquationum additionem vel subtractionem in usu eruitur æquatio tempori proposito conveniens. Ut fundamentum utriusque Tabulæ intelligatur, ponamus in O esse

Tab. VII. Fig. 70. ♈, in A locum Solis verum, in E medium, & perpendiculum ex A in æquatorem OB demissum designare loci veri ascensionem rectam C (§. 190). Fiat OD = OE & OB = OA, erit DB differentia inter locum verum & medium, seu æquatio centri, & CB differentia inter locum verum & ejus ascensionem rectam, CD vero utriusque differentiæ differentia, tanquam differentia inter ascensionem rectam loci veri C & locum medium D in tempus conversa dat æquationem temporis (§. 715). Quodsi in E fuerit locus verus, in A medius, æquationi respondens arcus GB est summa dictarum differentiarum GD & DB. Patet adeo Tabulam æquationis temporis unam construi, si singulis gradibus anomaliæ mediæ jungatur æquatio centri in tempus medium conversa: alteram vero, si singulis gradibus longitudinis mediæ adscribatur differentia inter locum verum Solis & ejus ascensionem rectam in tempus conversa, notatis tamen, quæ de termino, unde æquationis initium sumitur, dicta sunt.

PROBLEMA 26.

727. ***Observare oppositionem planetarum superiorum cum Sole.***

RESOLUTIO.

1. Quando suspicio est, planetam Soli mox oppositum iri, quæratur per observationem ascensio recta planetæ, ut supra probl. 4 (§. 559), vel ex observata distantia a duabus stellis fixis notæ ascensionis (§. 227).

(f) Tabb. Astron. p. 2.

2. Ad momentum obſervationis ſupputetur locus Solis verus (§. 710), quæraturque ejus aſcenſio recta (§. 204).

3. Quodſi differentia inter aſcenſionem rectam Solis & aſcenſionem rectam planetæ fuerit 180°, oppoſitio ipſo momento obſervationis facta: quod quidem rariſſime continget.

4. Si vero differentia illa fuerit ſemicirculo minor, obſervatio iteretur, donec eodem major evadat.

5. Cum ex harum obſervationum collatione innoteſcat incrementum diurnum aſcenſionis rectæ Solis ſupra aſcenſionem rectam planetæ & ex obſervatione ultima conſtet differentia inter aſcenſionem rectam Solis & aſcenſionem rectam planetæ ad momentum obſervationis, ſi per regulam trium quæratur tempus ad 24 horas eam rationem habens quam differentia prædicta ad incrementum prædictum, & a momento obſervationis ſubtrahatur, prodibit momentum oppoſitionis veræ.

COROLLARIUM.

728. Quoniam ♀ & ☿ interdiu juxta Solem per tubos videri poſſunt, non abſimili modo eorum conjunctiones cum Sole hodie obſervari poſſunt.

PROBLEMA 27.

729. *Determinare temporis intervallum, quo planetæ ſuperiores revolutionem unam circa Solem abſolvunt.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumantur ab initio duæ obſervationes oppoſitionum non multum a ſe invicem diſtantes, ne numerus revolutionum incertus evadat: cognito enim loco Solis ad oppoſitionum momenta, habetur quoque locus planetæ ad eadem momenta.

2. Supputetur intervallum temporis ab una obſervatione usque ad alteram elapſum in minimis ſcrupulis & ex collatione locorum planetæ in obſervationum momentis eruatur arcus, quem is dato intervallo deſcripſit.

3. Hinc inferatur, ut arcus modo repertus ad intervallum temporis inter duas obſervationes interjectum, ita 360 gradus ad tempus integræ revolutioni debitum: quod adeo, licet minus exacte, per regulam trium invenitur, cum Planeta nec in circulo, nec motu æquabili moveatur, quemadmodum ſupponitur.

4. Co-

4. Cognita saltem aliquatenus quantitate unius revolutionis, assumantur duæ observationes longa annorum serie distantes, & tempus ab una usque ad alteram elapsum in scrupulis horariis accurate supputetur, per quantitatem unius revolutionis paulo ante repertam dividendum, ut prodeat numerus revolutionum interea peractarum.

5. Ex collatione loci planetæ in prima oppositione cum loco in altera deducatur quantitas arcus supra integros circulos modo inventos, atque his in graduum scrupula conversis addatur.

6. Hinc inferatur: ut hoc aggregatum ad temporis intervallum inter duas observationes intercedens, ita 360 gradus ad quantitatem unius revolutionis: quæ adeo per regulam trium reperitur.

E. gr. *Longomontanus* oppositionem Saturni cum Sole Hafniæ A. 1582 d. 21 Aug. st. v. h. 2 post mediam noctem observavit in ♓ 7° 26′, A. 1583 d. 3 Sept. h. 1 post mediam noctem in ♓ 19° 50′, A. 1611 d. 15 Aug. h. 16 in 2° 12′ ♓: *Tycho* vero A. 1582 d. 21 Aug. h. 2 in ♓ 7° 26′ & Astronomi Alexandrini A. 136 d. 9 Jul. h. 24 in ♑ 14° 14′. Ex his observationibus quantitas revolutionis ♄ circa Solem ita deducitur:

Observ. I. A. 1582 d. 21 Aug. h. 14 ♓ 7° 26′

Observ. II A. 1583 d. 3 Sept. h. 10 ♓ 19. 50

Intervallum temporis d. 377 h. 23

Motus eidem respond. 12° 24′ seu 744′

Inferatur: ut 744′ ad horas 9071 ita 360°

ad Tempus Revolut. d. 10973.

Observ. III A. 1611 d. 15 Aug. h. 16 ♓ 2° 12′

Interval. temp. inter I. & III d. 10586 h. 14

Motus eidem respond. 354° 46′ s. 21286′.

Inferatur: ut 21286 ad 254078 h. ita 360°

ad Tempus Revolut. d. 10742 h. 18.

Observ. Alex. A. 136 d. 9. Jul. h. 24 ♑ 14° 14′

Tych. A. 1582 d. 21 Aug. h. 2 ♓ 7° 28′

Differentia Meridian. add. h. 1. 35′

Tychon. in Merid. Alex. h. 3. 35

Intervallum temporis d. 528194 h. 3. 35′, quod per 10742 divisum ostendit, ♄ 49 revolutiones absolvisse & ultra tempus iis debitum restare d. 1836.

Motus eidem conveniens 49 Circ. 53° 12′ seu 17993° 12′

Inferatur: ut 17993° ad 528194 h. ita 360°

ad Tempus Revol. d. 10747 h. 4. hoc est, Annorum Ægyptiacorum (quorum singuli sunt 365 dierum) 29 d. 162 h. 4.

COROLLARIUM 1.

730. Quia ♀ & ☿ Soli nunquam opponuntur, conjunctiones autem eorundem cum Sole ob defectum telescopiorum a veteribus observari non potuerunt; ipsorum revolutiones circa Solem eodem prorsus modo reperiri nequeunt.

COROLLARIUM 2.

731. Quoniam tamen revolutiones Planetarum inferiorum circa Solem brevi temporis spatio absolvuntur & in singulis revolutionibus binæ cum Sole conjunctiones celebrantur (§. 538); ideo observationes minori temporis intervallo dissitæ in posterum huic scopo satisfacient.

OBSERVATIO 49.

732. Keplerus (g) *invenit periodum circa Solem* ♄ 29 A. 174 d. 4 h. 58′ 25″ 30‴, ♃ 11 A. 317 d. 14 h. 49′ 31″ 56‴, ♂ 1 A. 321 d. 23 h. 31′ 56″ 49‴. *Unde motus diurnus* ♄ 2′ 0″ 36‴, ♃ 4′ 58″ 26‴, ♂ 31′ 26″ 39‴, Philippo de la Hire *vero* (h) *est motus diurnus* ♄ 2′ 1″, ♃ 4′ 59″, ♂ 31′ 27″.

COROLLARIUM.

733. Hinc facile construuntur Tabulæ mediorum motuum ♄, ♃, & ♂, ut supra (§. 673).

PROBLEMA 28.

734. *Datis quatuor oppositionibus Planetæ superioris in* D, E, F & G, *invenire eccentricitatem & situm lineæ apsidum* HI.

RESOLUTIO.

Tab. IIX. Fig. 71.

Keplerus (i) hac utitur methodo, sed indirecta. Sit Sol in S, B centrum eccentrici, C centrum mediorum motuum. Oppositiones quatuor observatæ sint in F, E, D & G & HI sit linea apsidum. Quoniam in oppositionibus planetæ cum Sole planeta ex Sole & Terra per eundem radium videtur; erunt anguli FSE, ESD, DSG, GSF æquales differentiis locorum verorum in oppositionibus F, E, D & G, adeoque vi observationum dantur. Porro cum detur tempus inter binas quascunque observationes intercedens, dabitur quoque medius Planetæ motus eidem respondens (§. 733), consequenter centro mediorum motuum in C existente anguli FCE, ECD, DCG, FCG innotescunt. Sit locus Aphelii H ruditer saltem determinatus: qui cum vi observationum per aliquot annos citra metum erroris

(g) Epit. Astron. Copern. lib 6. part. 2. p. 731.
(h) in Tab. Astron. p. 39 & seqq.
(i) in Comment. de motibus stellæ ♂ part. 2. c. 16 f. 92 & seqq.

roris ſenſibilis in hoc negotio admittendi immotus ſupponi poſſit, ob data loca planetæ in oppoſitionibus, dantur anguli HCF, HCE, itemque DCI & GCI. Quodſi locus Aphelii H & perihelii I rite fuerit determinatus, neceſſe eſt ut centrum eccentrici B ſit in linea HI inter S & C, atque quatuor oppoſitionum puncta F, E, D, G in eadem peripheria exiſtant: id quod ita explorandum.

1. Aſſumta SC 100000 ob calculi commoditatem, in triangulo CFS ob datum angulum FCH datur contiguus FCS (§. 149 *Geom.*). Quare cum etiam detur FSH & latus SC, vi antecedentium, reperietur diſtantia planetæ a Sole FS (§. 36 *Trig.*). Similiter ex datis in triangulo CGS angulis GCI & GSH ob notos GSF & HSF atque latere SC recta SG; ex datis in triangulo CSD angulis DCI & DSC ob DSE & DSI notos atque latere SC recta SD; denique ex datis in triangulo CSE angulis ECI & ESC ob HCE, ESF & FSH notos, atque latere SC recta SE reperitur (§. *cit.*).
2. Ex datis in triangulis FSG, FSE, ESD & DSG angulis cognominibus, vi ſuperiorum, atque lateribus eos comprehendentibus SF, SE, SD & SG modo inventis, reperiuntur anguli GFS & FGS, EFS & FES, SED & EDS, SDG & DGS (§. 40 *Trigon.*); unde per additionem reſultant anguli EFG, FED, EDG & DGF.
3. Addantur anguli oppoſiti EFG & EDG, atque FED & FGD. Quodſi enim ſumma utraque fuerit ſemicirculo æqualis ſeu 180°, erunt puncta F, E, D, G in eadem peripheria (§. 350 *Geom.*); ſin minus, locus aphelii H erit tantiſper vel promovendus, vel retrahendus, donec ſumma prædictorum angulorum a ſemicirculo ſeu duobus rectis ſenſibiliter non aberret.
4. Ut porro conſtet, utrum punctum B ſit in eadem recta cum punctis C & S, medio inter C & S loco, ex datis in triangulo GSE angulo cognomini, qui ex DSG & DSE vi ſuperiorum notis componitur, & lateribus ES & SG ante inventis reperitur angulus SGE (§. 40 *Trigon.*) & latus EG (§. 36 *Trig.*).
5. Cum triangulum EBG ſit æquicrurum (§. 40 *Geom.*) & angulus cognominis ipſius EFG ex antecedentibus noti duplus (§.

313 *Geom.*), adeoque etiam angulus BEG reperiri possit (§. 248 *Geom*), invenietur radius eccentrici BG (§. 36 *Trig.*).

6. Datis jam in triangulo BSG lateribus SG & BG antea repertis & angulo BGS differentia inter angulos BGE & SGE ex antecedentibus notos, reperitur tandem angulus BSG, qui si fuerit æqualis angulo HSG, ex stabilito Aphelio in H & oppositione in G observata noto, erit punctum B in recta HI & locus Aphelii in H rite constitutus. Sin minus, locus aphelii erit promovendus, vel retrahendus, donec & anguli EFG atque EDG fuerint duobus rectis æquales, & angulus BSG idem per calculum reperiatur, qui ex statuto aphelio in H resultat.

7. Loco Aphelii tandem reperto, ex datis in triangulo BDS radio eccentrici BD 10000, latere SD supra invento atque angulo BSD ex contiguo DSI noto (§. 149 *Geom.*) invenitur eccentricitas BS (§. 40. 36 *Trigon.*).

SCHOLION 1.

735. *Non diffitetur* Keplerus (k), *methodum hanc esse & valde laboriosam, & minus geometricam; maluit tamen eadem uti, quam vel alias minus accuratas adhibere, vel hypotheses veris motuum legibus & causis physicis adversas (qualis est illa* Wardi *centrum mediorum motuum in foco altero orbitæ statuens) admittere. Exemplum in Marte affert* Keplerus, *sed prolixius, quam ut huc transcribi possit.*

COROLLARIUM 1.

736. Cum per hanc methodum, qua locum Aphelii H & eccentricitatem BS investigare docuimus, una constet locus planetarum medius in oppositione qualibet; poterunt inde Tabulæ radicum mediorum motuum ac Apheliorum ♄, ♃ & ♂, perinde ac supra ☉, (§. 718) construi.

COROLLARIUM 3.

737. Si locus Aphelii ex observationibus antiquis deductus conferatur cum loco ejusdem ex recentioribus derivato; motus Aphelii annuus determinabitur ut supra (§. 702) & inde tabulæ motuum Aphelii condentur.

SCHOLION 2.

738. *Quoniam Astronomus celeberrimus* Hallejus (l) *methodum dedit geometricam in orbitis ellipticis iisque* Keplerianis *investigandi positionem lineæ apsidum atque eccentricitatem Solis atque planetarum primariorum nostro explicemus; nostrum est, ut eam nostro more explicemus. Quoniam vero supponit cognitam opticam inæqualitatem, quam motus*

(k) loc. cit. f. 95.
(l) in Transact. Anglic. num. 128. p. 683.

motus Terræ annuus per eclipticam Planetis inducit, de ea nobis agendum, antequam illam exponamus.

OBSERVATIO 50.

739. Keplerus *vi observationum statuit ad* A. 1700 *locum Aphelii* ♄ *in* ♐ 28° 3′ 44″, ♃ *in* ♎ 8° 10′ 40′, ♂ *in* ♍ 0° 51′ 29″, de la Hire *vero* ♄ *in* ♐ 29° 14′ 41″, ♃ *in* ♎ 10° 17′ 14″, ♂ *in* ♍ 0° 35′ 25″. *Motum aphelii annuum* Keplerus *statuit in* ♄ 1′ 10″, *in* ♃ 47″, *in* ♂ 1′ 7″: *at* de la Hire *in* ♄ 1′ 22″, *in* ♃ 1′ 34″, *in* ♂ 1′ 7″.

PROBLEMA 29.

740. *Digressiones Veneris & Mercurii maximas a Sole observare.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 72. 1. Cum in maxima digressione a Sole ♀ & ☿ appareant bisecti, ope tubi exploretur utcunque dies, quo digressio maxima contingit.

2. Quando suspicio est, planetam in maxima digressione mox conspectum iri, per aliquot dies observetur distantia planetæ TV & SV a duabus stellis fixis S & T notæ latitudinis TM & SN & longitudinis M atque N.

3. Quoniam in triangulo TOS dantur latera TO & SO, latitudinum TM & SN datarum complementa ad quadrantem (§. 240), & angulus MON, cujus mensura est differentia longitudinum datarum MN (§. 33 *Sphæric.*); reperietur distantia stellarum ST (§. 163 *Sphæric.*) & angulus OTS (§. 165 *Sphæric.*).

4. Datis in triangulo TSV tribus lateribus TS, SV & TV, reperietur angulus STV (§. 168 *Sphæric.*), quo alteri OTS addito, prodit angulus OTV.

5. Datis jam in triangulo OTV præter angulum cognominem OTV lateribus OT & TV, invenietur latus OV (§. 163 *Sphæric.*), latitudinis planetæ PV complementum ad quadrantem (§. 240), & angulus TOV (§. 165 *Sphæric.*), cujus mensura MP est differentia longitudinum Planetæ V & stellæ T. Hæc adeo illi addita efficit longitudinem planetæ.

6. Ad datum momentum observationis supputetur locus Solis medius (§. 672), qui cum longitudine planetæ collatus digressionem ejus a loco Solis medio patefacit.

7. Quodsi adeo observationes continuentur, donec digressiones,

quæ antea creverant, denuo decrescant, digressio maxima innotescet & tempus digressionis maximæ elicietur ut supra momentum oppositionis planetarum superiorum cum Sole (§. 727).

SCHOLION 1.

741. *Me non monente apparet, aliorum quoque siderum ac phænomenorum latitudines & longitudines eodem modo haberi posse, quo Veneris & Mercurii per observationem eruere docuimus. Et cum hodie Venus & Mercurius beneficio telescopii interdiu observari possint; eorundem quoque longitudo eodem modo haberi potest, quo supra (§. 559) planetæ longitudinem & latitudinem observare docuimus.*

SCHOLION 2.

742. *Quoniam Veteribus nec locus Solis, nec fixarum loca satis exacte fuere cognita; ideo* Ricciolus (m) *eorundem observationes ex motibus Solis & locis fixarum nunc accuratius cognitis emendat.*

PROBLEMA 30.

Tab. IIX. Fig. 73. 743. *Invenire locum Aphelii Veneris & Mercurii, seu situm lineæ apsidum* AP *determinare.*

RESOLUTIO.

1. Observentur plures digressiones maximæ (§. 740), donec duæ M & E, Sole in S posito, inveniantur æquales, quarum una sit matutina ex Tellure in O constituta observata, altera vespertina ex B visa.
2. Intervallum inter utramque digressionem interjectum dividatur bifariam; erit AP recta per Solem S transiens (§. 633) linea apsidum.
3. Comparentur inter se digressiones circa A & P factæ; ubi enim digressiones circa A deprehenderis minores, quam circa P; evidens erit, in A esse Perihelium, in P vero aphelium (§. 635. 636).

SCHOLION.

744. *Negari non potest, hanc methodum lubricam admodum esse, ita ut facile vel integro signo aberrare possis, ob defectum observationum satis accuratarum, brevique satis intervallo temporis dissitarum, cum Aphelium ab una observatione ad alteram immotum, terraque a Sole distantia in utraque observatione eadem supponatur. Usi tamen eadem sunt Astronomi, quia non aliunde quam ex digressionibus maximis locum Aphelii elicere licuit. Idem tamen problema, quemadmodum ante monuimus (§. 738), accuratius in orbitis ellipticis* Keplerianis *solvere docebimus. Interest autem rerum astronomicarum studiosis*

(m) Astron. Reform. lib. 2. f. 129. & seqq.

studioso antiquas etiam cognitas habere methodos, tum ut constet, quantum observationibus veterum sit fidendum, tum ut eas corrigere possis, antequam iisdem utaris ex inventis recentiorum.

OBSERVATIO 51.

745. Keplerus (n) *ad* A. 1700 *st. v. Aphelium* ♀ *constituit in* ♒ 3° 24′ 27″, ☿ *in* ♐ 15° 44′ 29″: de la Hire (o) *vero st. n. Aphelium* ♀ *in* ♒ 6° 56′ 56′ 10″, ☿ *in* ♐ 13° 3′ 40″.

COROLLARIUM.

746. Si loca aphelii olim observata cum locis recentioribus conferas, innotescit inde ut supra Aphelii motus & Tabulæ motuum Aphelii construentur (§. 702).

OBSERVATIO 52.

747. Keplerus *statuit motum annuum Aphelii* ♀ 1′ 18″, ☿ 1′ 45″: de la Hire *motum Aphelii* ♀ 1′ 26″, ☿ 1′ 39″.

SCHOLION.

748. *Neminem puto offendet, quod in numerum observationum nonnulla referamus, quæ ex observationibus deducta sunt, ne titulorum numerus multiplicandus esset.*

PROBLEMA 31.

Tab. IIX. Fig. 73. 749. *Invenire eccentricitatem planetarum inferiorum* SC.

RESOLUTIO.

1. Ex pluribus observationibus digressionum maximarum maxima cum cura peractis (§. 740) seligantur duæ, quarum altera facta in Perihelio Planetæ A, altera in Aphelio ejusdem P.

2. Ad tempus utriusque observationis inveniatur intervallum Telluris a Sole SG & SD (§. 685).

3. Cum anguli ad A & P sint recti, & præterea in triangulo SAG detur angulus G, sub quo digressio maxima in Perihelio videtur, & intervallum SG; in altero autem SPD angulus PDS, sub quo digressio maxima in Aphelio apparet, & intervallum SD; reperietur ibi AS, hic PS (§. 36 *Trigon.*).

4. Quoniam PF distantia foci F a P æqualis est ipsi SA (§. 633 *Astron.* & §. 427 *Analys. finit.*); subducta AS ex PS, relinquetur distantia focorum FS, quæ bisecta in C dat eccentricitatem SC (§. 638) in istiusmodi particulis, qualium radius eccentrici Telluris est 100000. Unde

5. per regulam trium facile invenitur in istiusmodi partibus, qua-

 lium

(n) in Rudolphinis f. 66. 72.
(o) in Tab. Astron. p. 63. 71.

lium radius eccentrici planetæ inferioris AC est 100000. Si enim summam ex AS & SP bifariam dividas, prodibit radius eccentrici planetæ AC in istiusmodi particulis, quarum semidiameter orbitæ Telluris est 100000.

OBSERVATIO 53.

750. Keplerus (p), *constituit eccentricitatem* ☿ 21000, ♀ 694, ♁ 1800, ♂ 9263, ♃ 4822, ♄ 5700, *qualium semidiameter eccentrici uniuscujusque est* 100000.

PROBLEMA 32.

751. ***Determinare tempus revolutionis planetarum inferiorum circa Solem.***

RESOLUTIO.

Cum nostro tempore conjunctiones eorum cum Sole observari possint per telescopia; inde facile innotescit tempus integræ revolutionis, si notetur, quodnam elapsum fuerit ab una conjunctione usque ad alteram, planeta in utraque vel supra, vel infra Solem constituto. Quare si veteres observationes prostarent, ex collatione recentiorum cum antiquis accuratius idem determinaretur, ut supra in Planetis superioribus (§. 729). Enimvero quamdiu observationes conjunctionum deficiunt, ita procedendum.

1. Si planeta M fuerit in digressione maxima a Sole, radius eccentrici MC est ad lineam visivam OH perpendicularis, adeoque dato per observationem loco Planetæ H datur etiam punctum I quadrantis intervallo ab eo remotum, cumque locus Perihelii N notus sit (§. 746), arcus quoque IN, consequenter angulus MCS datur. Quare cum etiam radius eccentrici CM & eccentricitas CS dentur, reperietur angulus CMS (§. 38 *Trigon.*), cui arcus IK æqualis est, ob immensam nempe eclipticæ ab orbita planetæ distantiam. Quodsi ergo IK ex arcu IH subtrahas, relinquetur locus planetæ K ex Sole S visus. Tab. IIX. Fig. 71.

2. Quodsi hac ratione in duabus maximis a Sole digressionibus magno intervallo annorum distantibus quærantur loca Planetæ ex Sole visi; tempus uni revolutioni circa Solem debitum elicietur ut supra (§. 729).

OB-

(p) Epitom. Astron. lib. 6. p. 732. 765.

OBSERVATIO 54.

752. Keplerus (q) *tribuit revolutioni Veneris circa Solem* 224 d. 17 h. 44′ 55″ 14‴; ☿ 87 d. 23 h. 14′ 24″. *Motum diurnum concedit* ♀ 1° 36′ 8″, ☿ 4° 5′ 32″ (r): de la Hire *vero motum eundem retinuit* (s).

COROLLARIUM 1.

753. Dato motu Planetarum inferiorum diurno, tabulæ mediorum motuum construuntur ut supra (§. 673).

COROLLARIUM 2.

754. Cognito vero loco medio uno ad momentum alicujus digressionis maximæ (§. 751); tabulas quoque epocharum seu radicum condere ulterius licet (§. 718).

DEFINITIO 27.

755. *Locus eccentricus in orbita* est locus planetæ, in quo ex Sole videtur. Vocatur etiam *Locus centricus.*

COROLLARIUM.

756. Quoniam data eccentricitate una cum loco & motu Aphelii motuque planetæ medio, supputari potest locus Telluris ex Sole visus (§. 720), motus autem planetæ primarii cujuscunque oculo in Sole posito eodem modo apparet, quo motus Telluris (§. 633); evidens est, planetæ locum eccentricum eodem modo supputari, quo supra locum Solis supputare docuimus, & tabulas ad eum supputandum iisdem artificiis construi, quæ supra (§. 684 seqq. vel §. 723) exposita sunt.

DEFINITIO 28.

757. *Locus ad eclipticam reductus*, seu *locus eccentricus in ecliptica* est punctum eclipticæ, ad quod planeta e Sole visus refertur. Coincidit cum longitudine planetæ e Sole visa, vocaturque *locus heliocentricus.*

DEFINITIO 29.

758. *Locus geocentricus* est punctum eclipticæ, ad quod planeta ex Tellure visus refertur.

SCHOLION.

759. *Sit* NEOR *ecliptica*, NPOQ *orbita Planetæ*, *Sol in* S, *Terra in* T, *Planeta in* P; *recta* SP *designabit locum eccentricum in orbita*, RS *locum ad eclipticam reductum seu heliocentricum*, TR *vero locum geocentricum.* Tab. IIX. Fig. 74.

DEFINITIO 30.

760. *Angulus commutationis* ESR est differentia inter locum ve-

Nn nn 3 rum

(q) in Epitom. Astron. lib. 6. part. 3. p. 760.
(r) in Rudolphinis f. 66. 72.
(s) in Tab. Astron. p. 65. 73.

rum Solis E ex terra T visi & locum planetæ ad eclipticam reductum R.

COROLLARIUM.

761. Invenitur adeo, loco Solis vero E e loco heliocentrico planetæ R sublato, vel contra.

DEFINITIO 31.

762. ***Angulus elongationis*** seu ***angulus ad Terram*** ETR est differentia inter locum verum Solis E & locum geocentricum planetæ R.

DEFINITIO 32.

763. ***Parallaxis orbis*** est differentia inter angulum commutationis RSE & angulum elongationis RTE.

COROLLARIUM.

764. Est adeo angulus SRT, quem intercipiunt rectæ ex Terra T & Sole S in locum R ad eclipticam reductum ductæ (§. 239 *Geom.*).

DEFINITIO 33.

Tab. IIX. Fig. 74. 765. *Nodi* sunt puncta intersectionum N & O eclipticæ & orbitæ planetæ. *Nodus ascendens* est punctum N, a quo planeta ultra eclipticam versus polum borealem excurrit. *Nodus descendens* est punctum O, unde planeta infra eclipticam versus polum australem descendit. Ascendens dicitur etiam *Nodus borealis*; descendens *australis*.

SCHOLION.

766. *Nodus ascendens exprimitur per hoc signum* ☊; *descendens vero per illud* ☋.

DEFINITIO 34.

767. ***Inclinatio*** est angulus ad Solem RSP, sub quo distantia planetæ P ab ecliptica PR ex Sole videtur.

DEFINITIO 35.

768. ***Latitudo*** est angulus ad Terram PTR, sub quo distantia planetæ ab ecliptica PR ex terra videtur.

DEFINITIO 36.

769. ***Argumentum latitudinis*** est distantia loci eccentrici in orbita a Nodo ascendente NP.

DEFINITIO 37.

770. ***Reductio ad eclipticam*** est differentia inter argumentum latitudinis NP & arcum eclipticæ NR inter locum planetæ reductum R & nodum N interceptum.

DEFINITIO 38.

771. ***Distantia curtata*** est distantia loci planetæ ad eclipticam reducti a Sole SR.

DEFINITIO 39.

772. ***Curtatio*** est differentia inter

ter distantiam planetæ a Sole PS & distantiam curtatam SR.

DEFINITIO 40.

773. ***Inæqualitas prima*** est inæqualitas motus planetæ ex Sole visi orta ex orbitæ eccentricitate.

SCHOLION.

774. *Eam adeo in antecedentibus jam explicavimus: unde etiam patet, accedere ipsi partem quandam physicam ab inæquabili in orbita incessu (§. 633). Coincidit nempe cum æquatione orbis.*

DEFINITIO 41.

775. ***Inæqualitas secunda*** est inæqualitas motus planetæ ex Terra visi orta ex motu Telluris annuo circa Solem.

SCHOLION.

776. *Hæc tota optica est & nunc explicanda. Est nempe illa ipsa, quam supra* Parallaxin Orbis *diximus* (§. 763).

PROBLEMA 33.

777. ***Nodos planetæ observare.***

RESOLUTIO.

1. Observetur per aliquod tempus longitudo & latitudo planetæ (§. 559.740), cumq; latitudo valde decrescere deprehenditur, maxima cum cura continuetur, donec nulla evadat. Quando enim latitudine caret, in nodo est.
2. Supputetur ad datum tempus, quo planeta ex Tellure in T in nodo N observatur, ejus locus verus L (§. 720); differentia inter locum planetæ & Solis erit angulus NTL. Tab. XII. Fig. 102.
3. Observetur quoque momentum temporis, quando planeta a nodo N digressus ad eundem redit (*num.* 1) & supputetur ad idem quoque locus Solis M tunc temporis ex Tellure in V visi; erit differentia utriusque loci angulus NVM.
4. Et cum differentia locorum Solis L & M manifestet angulum LSM, cui verticalis TSV æqualis est (§. 156 *Geom.*); quærantur porro ad utrumque observationis momentum intervalla seu distantiæ Solis a Terra TS & SV (§. 685) & hinc porro
5. ex datis in △ TSV duobus lateribus TS & SV cum angulo intercepto TSV investigentur STV & SVT (§. 40 *Trigon.*) cum latere tertio TV (§. 36 *Trigon.*).
6. Angulus NTS (*num.* 2) ab STV subtrahatur, ut relinquatur angulus NTV, & angulus SVT ad angulum NVS (*num.* 3) addatur, ut prodeat angulus NVT.
7. Datis jam in △ NVT angulis omnibus (§. 245 *Geom.*) una cum late-

latere TV (*num.* 5), inveniatur distantia planetæ a Terra in prima observatione TN (*§.* 36 *Trigon.*).

8. Tandem in △ NST datis duobus lateribus TS (*num.* 4) & TN *num.* 7) una cum angulo intercepto NTS (*num.* 2) inveniatur angulus TSN (*§.* 40 *Trigon.*) & distantia nodi a Sole NS (*§.* 36 *Trigon.*).

9. Quare cum ad momentum primæ observationis detur locus Solis e terra visus L (*num.* 2), adeoque & locus Telluris T e Sole visus (*§.* 572); locus quoque nodi N e Sole visus innotescit, cui si addantur 180, prodibit locus nodi alterius O.

COROLLARIUM 1.

778. Ex collatione observationum recentiorum cum antiquis innotescit, nodos omnium planetarum moveri in consequentia & ut supra motus Apogæi Solis (§. 702) motus nodorum determinatur.

COROLLARIUM 2.

779. His vero datis facile construuntur Tabulæ tam radicum, quam motus nodorum ascendentium planetarum primariorum (§. 718).

OBSERVATIO 55.

780. *Juxta* Keplerum *locus* ☊ *fuit* A. 1700 *st. v.* ♄ 22° 49′ 4″ ♋, ♃ 5° 31′ 47″ ♋, ♂ 17° 50′ 46″ ♉, ♀ 14° 19′ 5″ ♊, ☿ 14° 47′ 26″ ♉: *juxta* Philippum de la Hire *vero st. n.* ♄ 21° 56′ 29″ ♋, ♃ 7° 11′ 44″ ♋, ♂ 17° 25′ 20″ ♉, ♀ 13° 54′ 19″ ♊, ☿ 14° 53′ 14″ ♉. *Ille motum annuum* ☊ *constituit* ♄ 1′ 12′, ♃ 4″, ♂ 40″, ♀ 47″, ☿ 1′ 25″: de la Hire *vero* ♄ 1′ 12″, ♃ 14, ♂ 37″, ♀ 46″, ☿ 1′ 25″.

SCHOLION.

781. *Quoniam motus nodorum admodum tardus est* (§. 780); *ideo patet, quod in determinando loco Nodorum tuto negligatur & citra errorem sensibilem supponatur, nodum intra revolutionem unam locum non mutasse.*

COROLLARIUM.

782. Quoniam motus nodorum admodum tardus est, ut in una revolutione pro immotis haberi possint; revolutio una absolvitur in orbita, dum ab eodem nodo digressus planeta ad eundem redit. Quamobrem si bis in eodem nodo observetur, tempus inter binas observationes sese immediate excipientes interceptum est revolutionis unius quantitas, accuratius adeo per observationes planetæ in nodo, quam per oppositiones determinanda in superioribus (§. 729) & quam per digressiones maximas in inferioribus (§. 751).

POR-

PROBLEMA 34.

783. *Inclinationem planetæ maximam seu angulum, quem orbita planetæ cum ecliptica efficit* ANB *observare.*

RESOLUTIO.

Tab. IIX. Fig. 74. n. 2. 1. Data theoria Solis una cum loco & motu nodorum, inveniri potest tempus, quo Sol S ex Terra T in nodo N videtur.

2. Eodem tempore observetur longitudo AV & latitudo AB planetæ P (§. 559.741) inclinationi hoc tempore qualis.

3. Longitudo Solis VN a longitudine planetæ AV subtrahatur, relinquitur arcus NA.

4. Datis in triangulo sphærico ANB ad A rectangulo, latitudine AB & latere AN invenitur angulus ANB (§. 116 *Sphæric.*).

OBSERVATIO 56.

784. *Juxta* Keplerum *inclinatio maxima* ♄ 2° 32′, ♃ 1° 20″ ♂ 1° 50′ 30″, ♀ 3° 22′, ☿ 6° 54′: *juxta Philippum* de la Hire *vero* ♄ 2° 33′ 30″, ♃ 1°, 19′ 20″, ♂ 1° 51′ 0″, ♀ 3° 23′ 5″, ☿ 6° 52′ 0″.

COROLLARIUM.

Tab. IIX. Fig. 74 785. Datis inclinatione maxima N & argumento latitudinis NP invenitur inclinatio PR ut supra declinatio, (§. 198) & hoc modo Tabulæ inclinationum construuntur.

(Wolfii Math. Tom. 3.)

PROBLEMA 35.

786. *Dato angulo inclinationis* PNR *& argumento latitudinis* NP, *invenire reductionem.* Tab. IIX. Fig. 47.

RESOLUTIO.

1. Quæratur arcus NR (*§. 128 Sphæric.*).

2. Subtrahantur a se invicem NR & NP: residuum est reductio (§. 770).

COROLLARIUM.

787. Patet ergo modus construendi Tabulas reductionum.

SCHOLION.

788. *Exemplum non addimus, quia problema coincidit cum probl.* 5 *partis* 1. (§. 203).

PROBLEMA 36.

789. *Dato intervallo* PS *una cum inclinatione* PSR, *invenire distantiam curtatam* SR.

RESOLUTIO.

Intelligatur ex loco planetæ P ad planum eclipticæ demissa perpendicularis PR, in triangulo adeo RSP ad R rectangulo datur angulus PSR & latus PS, invenitur adeo RS (§. 36 *Trigon.*), inferendo nempe: ut sinus totus seu radius circuli eccentrici ad intervallum PS ita cosinus inclinationis RPS ad distantiam curtatam RS.

COROLLARIUM.

790. Quoniam differentia inter intervallum PS & distantiam curtatam RS est curtatio (§.772); patet jam modus construendi *Tabulas curtationum.*

SCHOLION.

791. *Quia inclinationis, reductionis & curtationis quantitas ab argumento latitudinis pendet, adeoque singulæ tabulæ ad argumenti latitudinis singulos gradus construuntur; ideo* Keplerus *in Rudolphinis tabulis* inclinationis, reductionis & curtationis *in unam contraxit, cui nomen* Tabulæ Latitudinariæ *indidit.*

PROBLEMA 37.

Tab. IIX. Fig. 74. 792. *Datis angulo commutationis* ESR, *distantia Solis a Terra* TS *& distantia planetæ curtata* SR, *invenire angulum elongationis* RTS, *parallaxin orbis* SRT *& distantiam planetæ a Terra* TR.

RESOLUTIO,

Datis in triangulo SRT duobus lateribus RS & ST cum angulo comprehenso RST, invenitur angulus RTS inferendo:

1. ut ST ad RS (vel in planetis inferioribus ut RS ad ST, quia tum RS < ST) ita sinus totus ad tangentem anguli alicujus, qui 45 gradibus mulctatus vocetur A.
2. Ut tangens 45° ad tangentem anguli A modo inventi, ita tangens semisummæ angulorum R & T ad tangentem semidifferentiæ eorundem: quæ in superioribus planetis semisummæ angulorum R & T addatur, in inferioribus dematur, ut habeatur angulus ad terram RTS.

Hoc autem dato, invenitur ulterius SRT (§.245 *Geom.*) & RT (§.36 *Trigon.*).

DEMONSTRATIO.

Fiat SA = ST = SB & erigatur RD = RA ad RA perpendicularis ducanturque SF & BE ipsi RD parallelæ; erit ob AR = RD etiam FS = SA & HF ipsi RA parallela = RS (§.268 *Geom.*), angulique RDA & RAD semirecti (§.241 *Geom.*) atque BF = FA (§.179 *Geom.*). Quare cum sit SF : FA = HF : FD (§.267 *Geom.*); erit etiam SF : FB = HF : FD (§.168. *Arithm.*) & hinc SF : HF = FB : FD (§.173 *Arithm.*). Est ergo ut SF sive TS ad HF sive RS ita sinus totus ad tangentem anguli DBF (§.40 *Trigon.*). Sed ob parallelas BG & FS (§.256 *Geom.*) GBF semirecto BFS æqualis (§.233 *Geom.*): ergo angulus DBE hoc est RDB (§.*cit.*) relinquitur, si ex DBF per illationem primam problematis invento subtrahitur semirectus EBF. Quoniam itaque Tab. IIX. Fig. 76.

ut

ut RA ad RB h. e. ut summa laterum TS & RS ad differentiam eorundem RB, ita tangens semirecti RDA ad tangentem residui anguli RDB (§. 7 *Trigon.*); erit etiam ut tangens semirecti ad tangentem illius residui, ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum TRS & RTS ad tangentem semidifferentiæ eorundem (§. 40 *Trigon.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

793. *Exemplum mox dabimus in loco ♃ supputando, quo & præsens & reliqua ipsi agnata problemata illustrabuntur.*

LEMMA 4.

794. ***Tangentes duorum angulorum sunt in ratione reciproca cotangentium eorundem.***

DEMONSTRATIO.

Sint duo anguli A & B. Erit ut tangens anguli A ad sinum totum ita sinus totus ad cotangentem anguli A & similiter ut tangens anguli B ad sinum totum ita sinus totus ad cotangentem anguli B (§. 104 *Trigon. Sphær.*). Quamobrem cum etiam sit ut sinus totus ad tangentem anguli B ita cotangens ejusdem anguli B ad sinum totum (§. 173 *Arithm.*); erit ut tangens anguli A ad tangentem anguli B ita cotangens anguli B ad cotangentem anguli A (§. 198 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 38.

795. ***Datis angulis inclinationis* RSP, *elongationis* STR *& commutationis* ESR, *invenire latitudinem planetæ* PTR.** Tab. IIX. Fig. 74.

RESOLUTIO.

Fiat: ut sinus anguli elongationis RTS ad sinum anguli commutationis RSE vel RST, ita cotangens inclinationis RSP ad cotangentem latitudinis PTR.

Vel:

Inferatur: ut sinus anguli commutationis RSE vel RST ad sinum anguli elongationis RTS ita tangens inclinationis RSP ad tangentem latitudinis RTP.

DEMONSTRATIO.

Ut SR ad TR ita cotangens RSP ad cotangentem RTP (§. 213 *Optic.* & §. 178. *Arithm.*). Est vero SR ad TR ut sinus RTS ad sinum RST (§. 33 *Trigon.*): ergo sinus RTS ad sinum RST ut cotangens RSP ad cotangentem RTP (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Est vero ut cotangens RSP ad cotangentem RTP ita tangens RTP ad tangentem RSP (§. 794).

Quare cum sit sinus RTS ad sinum RST ut tangens RTP ad tangentem RSP (§. 167 *Arithm.*); erit etiam sinus RST ad sinum RTS ut tangens RSP ad tangentem RTP (§. 169 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Quæratur distantia planetæ a Terra TR (§. 791) & distantia curtata SR (§. 789).
2. Quoniam anguli RSP & RTP sunt exigui, fiat: TR : RS = RSP : RTP (§. 212 *Optic.*).

COROLLARIUM 1.

796. Datis angulis SRT & RTS datur ratio distantiæ Terræ a Sole TS ad distantiam planetæ ab eodem RS (§. 33 *Trigon.*): & hoc modo repertum, posita distantia Terræ a Sole 10, esse distantiam ☿ a ☉ 4, ♀ 7, ♂ 15, ♃ 52, ♄ 95 (t).

COROLLARIUM 2.

797. Data ratione semidiametri eccentrici planetæ ad semidiametrum eccentrici Telluris (§. 795) & eccentricitate orbitæ planetariæ in particulis 100000 semidiametri eccentrici (§. 734. 749); invenitur quoque eccentricitas planetæ in particulis 100000 semidiametri eccentrici Telluris.

SCHOLION.

798. *En ope horum corollariorum deductas planetarum a Sole distantias & orbitarum eccentricitates in particulis, qualium semidiameter eccentrici Telluris est* 100000, *suppositis eccentricitatibus* Keplerianis *supra commemoratis* (§. 750).

	Dist. maxima	media	minima	Eccentr.
♄	1005027	951000	896793	54207
♃	544708	519650	494592	25058
♂	166465	152350	138235	14115
♀	101800	100000	98200	1800
♁	72900	72400	71900	500
☿	46955	38806	30657	8419

THEOREMA 33.

799. ***Quadrata temporum periodicorum ♄, ♃, ♂, ♀, ♁ & ☿ circa Solem sunt in ratione triplicata distantiarum a Sole.***

DEMONSTRATIO.

Periodus ♄ est fere annorum 30 periodus ♃ 12 (§. 31. 32) distantiæ veræ eorundem a Sole sunt ut 95 ad 52 (796). Quadrata temporum periodicorum 900 & 144 sunt fere in ratione sextupla: cubi distantiarum 857375 & 140608 in eadem quam proxime existunt. Sunt ergo quadrata temporum periodicorum ♄ & ♃ in ratione triplicata distantiarum a Sole (§. 259 *Arithm.*). Periodus Telluris est unius

(t) Gregorius Astron. Phys. & Geom. lib. 1. prop. 1. f. 2.

unius anni, ♄ vero 30, distantia illius ad distantiam hujus ut 2 ad 19 (§.796): quadrata temporum periodicorum 1 & 900 sunt fere ut cubi distantiarum a Sole 8 & 6859. Quodsi periodos accuratius definias, etiam proportio illa accuratior obtinebitur. Idemque eodem modo ostenditur de planetis reliquis. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

800. *Periodos Planetarum circa Solem respectu fixarum eum in finem in diebus & partibus earum decimalibus retentis distantiis mediis* Keplerianis *modo exhibitis* (§.798) *ita definit* Newtonus (u).

Planetæ	Periodi circa Solem	horæ & scrup.		
♄	10759. 275	6 h.	36′	26″
♃	4332. 514	12	20	25
♂	686. 9785	23	27	30
♁	365. 2565	6	9	30
♀	224. 6176	16	49	24
☿	87. 9692	23	15	53

Adjecimus horas & scrupula partibus decimalibus diei respondentia.

SCHOLION 2.

801. *Elegans hoc theorema invenit* Keplerus *& vir summus* Newtonus (x) *demonstravit, corporibus in ellipsi gyrantibus vi centripeta ad focum alterum tendente, ita ut radius vector verrat areas temporibus æquales (qualem motum* Keplerus *planetis primariis circa Solem tribuit* (§.633.799), *convenire istam proportionem. Enimvero, quemadmodum* Bernoullius *primus demonstravit* (y), *admissa illa proportione planetæ in nulla alia quam elliptica orbita incedere possunt* (§.670 Mech.). *De figura itaque orbitarum elliptica & lege, qua in ea incedunt juxta* Keplerum, *vix amplius dubitandum. Ipse sane Cel.* de la Hire (z) *non inficiatur, figuram ellipticam non multum abesse ab orbita vera planetarum.*

SCHOLION 3.

802. *Restat ut adhuc doceamus, quomodo eccentricitas tam solis, quam planetarum superiorum & inferiorum in orbitis ellipticis salvis veris motuum legibus inveniatur: quem in finem præmittimus.*

LEMMA 5.

803. *Si in ellipsi* APB *ex foco alte-* Tab.
rutro S *ducatur ad punctum quod-* XII.
cunq; peripheriæ P *recta* SP *& pro-* Fig.
ducto axe AB *in* G, *donec sit distantia* 103.
foci a vertice AS *ad* AG *ut distantia focorum* SF *ad axem* AB, *ex puncto* P *ducatur* PH *ipsi* GB *paral-*

(u) in Princip. Phil. Nat. Math. p. 393. edit. ult.
(x) Princ. Phil. Nat. Math. lib. 1. prop. 15 p. 60.
(y) Memoir. de l' Acad Roy. des Scienc. A. 1710, p. m. 682 & seqq.
(z) in præfat. ad Tabulas Astron.

lela perpendiculari HG *in* G *excitatæ occurrens in* H, *erit* PH *ad* PS *ut axis* AB *ad distantiam focorum* SF.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex P perpendicularis ad axem PK, sitque AB $= a$, AK $= x$, SC $= c$; erit SF $= 2c$, AS $= \frac{1}{2}a - c$, SP $= \frac{1}{2}a - c + \frac{2CK}{a}$ (§. 434 *Analys. fin.*). Et quia

SF : AB = AS : AG *per hypoth.*

$2c : a = \frac{1}{2}a - c :$

erit AG $= (\frac{1}{2}a^2 - ac) : 2c = \frac{a^2}{4c} - \frac{1}{2}a$, consequenter cum PK & HG sint ad GB perpendiculares & HP ipsi GB parallela per *hypoth. & constr.* adeoque HP = GK (§. 28 *Geom.*), erit HP $= x - \frac{1}{2}a + \frac{a^2c}{4c}$. Quamobrem

$$HP : PS = x - \tfrac{1}{2}a + \frac{a^2}{4c} : \tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

$$= 4cax - 2a^2c + a^3 : 2a^2c - 4ac^2 + 8c^2x$$

$$= a : 2c$$ (§. 181 *Arithm.*),

dividendo scilicet utrinque per $4cx - 2ac + a^2$ est igitur PH : PS = AB : SF. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

804. Quodsi ex puncto ellipseos quovis alio L ducatur recta IL perpendicularis ad HG; erit AB : SF = LI : LS (§. 803). Quare cum etiam sit AB : SF = PH : PS (§. *cit.*) erit PH : PS = LI : LS (§. 167 *Arithm.*) & PH : LI = PS : LS (§. 173 *Arithm.*). Rectæ igitur ex foco S ad perimetrum ellipseos utcunque ductæ PS & LS sunt in hypothesi lemmatis rectis PH & IL axi AB parallelis proportionales.

COROLLARIUM 2.

805. Quodsi porro chorda PL continuetur ultra ellipsin, donec ipsi HG in Q occurrat; cum sit PQ : QL = PH : IL (§. 268 *Geom.*) & PH : IL = PS : LS (§. 804), erit etiam PQ : QL = PS : LS (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

806. Si fuerit GA : AS = AB : SF; erit etiam GA : AB = AS : SF (§. 173 *Arithm.*), consequenter GA : GB = AS : AF (§. 190 *Arithm.*), adeoque ob AS = FB ex natura ellipseos, & hinc AF = SB (§. 88 *Arithm.*) GA : GB = AS : SB: (§. 168 *Arithm.*). Quare GA : AS = GB : SB (§. 173 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

807. Si fuerit GA : AS = AB : SF; erit GA : AS = GB : SB (§. 806). Quare cum etiam sit GA − AS : AS = GS : SB (§. 193 *Arithm.*); erit etiam GA − AS : GS = AS : SB (§. 173. *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

808. Si fuerit GA : AS = AB : SF; erit

etiam GA : AS = PH : PS (§.803), consequenter GS : GA = PH + PS : PS (§. 190 *Arithm.*).

LEMMA 6.

Tab. XII. Fig. 103. 809. ***Datis positione & magnitudine tribus rectis* SP, SL *&* SM *in puncto* S *coëuntibus, describere ellipsin, cujus focus sit in* F, *per puncta* P, L *&* M *transeuntem.***

RESOLUTIO.

1. Producatur PL in Q, donec sit PQ : QL = PS : SL, inferendo nempe, ut PS–SL : SL = PL : QL (§. 193 *Arithm.*).
2. Eodem modo producatur LM in O, donec sit LO : OM = SL : SM.
3. Per puncta O & Q ducatur recta HO & ex puncto S demittatur ad eam perpendicularis SG ducaturque ex P eidem parallela PH.
4. Dividatur GS in A, ut sit GA : AS = PH : PS, atque producatur in B, donec sit GA : AS = GB : SB; erit AB axis ellipseos per puncta M, L & P transeuntis, cujus focus in S (§. 803. 807. 808).
5. Quodsi itaque fiat BF = AS; erit in F focus alter & ellipsis describi poterit (§. 435 *Anal. fin.*).

PROBLEMA 39.

810. ***Invenire eccentricitatem orbitæ ellipticæ Telluris & locum Aphelii atque Perihelii.*** Tab. XIII. Fig. 104.

RESOLUTIO.

1. Observetur oppositio Martis cum Sole (§.727), tum enim ♂ in M, vel punctum eclipticæ M, in quod cadit perpendiculum ex ♂ in eclipticam demissum, si latitudinem habuerit, ☉ in S & Terra in T erunt in eadem recta MS.
2. Quando Mars elapsis 687 diebus denuo ad punctum M redit (§. 800), Terra vero nonnisi post 730½ dies, quo binas periodos absolvit (§. *cit.*), ad idem restituatur adeoq; in puncto A hæret, observetur locus Solis, quem Terra per rectam AS respicit (§. 203) & locus Martis, quem videt per rectam KA (§. 741). Ita enim ob locum Solis in E tempore secundæ observationis, & locum ejusdem in F tempore primæ observationis datur angulus ESF, cui verticalis MSA æqualis (§. 156 *Geom.*). Et ob locum Solis & ♂ in secunda observatione datur distantia ♂ a ☉ sive angulus MAS.
3. Quodsi ergo MS ponatur 100000,

in

in iſtiusmodi partibus reperietur diſtantia Terræ a Sole SA (*§. 36 Trigon.*).

4. Eodem modo reperietur angulus MSB & diſtantia Terræ a ☉ BS in particulis decimalibus MS, quando ♂ ſecunda vice redit in M, itemque angulus MSC & recta SC, quando ♂ tertia vice reſtituitur in M.

5. Quoniam in S eſt focus orbitæ Telluris ellipticæ (§. 633) & puncta A, B & C in orbita exiſtunt; linea apſidum determinabitur & orbita deſcribetur (§. 809), conſequenter & eccentricitas innoteſcit (*§.* 638).

Quodſi jam eccentricitatem SC & radium eccentrici AC in numeris invenire volueris.

Tab. XII. Fig. 103. 6. Ex datis in △ PLS lateribus PS & LS una cum angulo intercepto PSL (*num.* 2 & 3) inveniantur anguli SPL & SLP (*§.* 40 *Trigon.*) cum latere PL (§. 36 *Trigon.*).

7. Eodem modo ex datis in △ LMS lateribus LS & MS una cum angulo intercepto (*num.* 4) inveſtigentur anguli SML & SLM una cum latere ML.

8. Quodſi jam anguli PLS & SLM modo inventi (= angulo PML) ex 180° ſubducantur; relinquetur angulus QLO (§. 148 *Geom.*).

9. Quoniam PS − SL : SL = PL : QL (*num.* 1 §. 809), dantur vero PS & SL (*num.* 3. 4) atque PL (*num.* 6); reperietur QL (§. 302 *Arithm.*) & eodem modo ob datos SL & SM (*num.* 4) atque LM (*num.* 7) invenietur MO.

10. Datis in △ QLO lateribus QL (*num.* 9) & LO (*num* 7. 9) una cum angulo intercepto QLO (*num.* 8) quæratur angulus QOL (*§.* 40 *Trigon.*): qui

11. Ex 90° ablatus in △ IOL ad I rectangulo *per conſtr.* relinquit angulum OLI (*§.* 241 *Geom.*), cui ſi addatur angulus notus SLM (*num.* 7), prodibit angulus ILS = LSB ob parallelas IL & AB (§. 222 *Geom.*), conſequenter diſtantia Terræ in L ab Aphelio B (§. 636), quod adeo hoc pacto innoteſcit.

12. Jam porro ex datis in △ NOM ad N rectangulo angulo NMO ipſius NOM ante inventi (*n.* 10) complemento ad rectum (*§.* 241 *Geom.*) reperiatur latus NM.

13. Datis adeo NM (*num.* 11) & MS (*num.* 4) datur ratio axis AB ad diſtantiam focorum SF (§. 803), conſequenter radii eccentrici AC ad eccentricitatem

SC

SC (§. 181 *Arithm.*). Quare si AC fiat 100000, invenietur tandem eccentricitas SC in particulis decimalibus radii eccentrici (§. 302 *Arithm.*).

SCHOLION.

811. *Nihil in hac solutione supponitur, quam Planetam in eodem orbitæ puncto eandem a Sole distantiam habere: id quod ob tarditatem motus Apheliorum* (§. 736. 741) *supponere licet.*

PROBLEMA 39.

812. ***Planetam in eodem orbitæ puncto bis observatum inæqualitate secunda exuere, seu ex dato loco geocentrico invenire heliocentricum & ejus a Sole distantiam.***

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 105. 1. Observetur longitudo & latitudo planetæ P geocentrica ex Terra in T (. 559. 741).

2. Ad momentum observationis supputetur locus Solis (§. 720) & intervallum TS (§. 685) ita angulus elongationis PTS (§. 762) & locus Terræ T innotescit (§. 572).

3. Quodsi jam elapso intervallo, quo planeta periodum suam absolvit (§. 782), ex Terra in A constituta denuo planetæ longitudo & latitudo geocentrica observetur & locus Solis ex A visi (*Wolfii Math. Tom.* 3.) supputetur cum intervallo AS; angulus elongationis PAS & locus Terræ A innotescit.

4. Per data Terræ loca T & A (*num.* 2. 3) datur angulus TSA. Quamobrem cum etiam dentur latera AS & ST (*num.* 2. 3); reperiuntur anguli STA & SAT (§. 40 *Trigon.*) & latus KL (§. 36 *Trigon.*).

5. Quodsi anguli STA & SAT ex angulis STP & SAP notis (*num.* 2. 3) subtrahantur, relinquuntur auguli TAP & PTA, adeoque in △ APT invenitur distantia planetæ a Terra curtata tempore primæ observationis PT (§. 36 *Trigon.*).

6. Datis jam in △ PTS lateribus PT (*n.* 5), & TS (*n.* 2) una cum angulo intercepto PTS (*n.* 1) invenitur angulus KSP (§. 40 *Trig.*). Unde ob locum Terræ T notum (*num.* 2) locus planetæ heliocentricus tempore primæ observationis innotescit. Cognito angulo PST reperitur porro distantia planetæ a Sole curtata PS (§. 36 *Trigon.*).

7. Jam cum detur distantia planetæ curtata a Sole RS (*num.* 6) & a Terra TR (*num.* 5) & latitudo planetæ RTP (*num.* 2), inveniri potest inclinatio RSP. Cum Tab. IIX. Fig. 74.

enim fit ut finus anguli RTS ad finum anguli RST ita tangens RTP ad tangentem RSP (§. 794) & idem finus fint ut SR ad TR (*§.33 Trigon.*); erit ut diftantia planetæ a Sole curtata SR ad diftantiam ejusdem curtatam a Terra TR ut tangens latitudinis ad tangentem inclinationis (*§. 167 Arithm.*).

8. Cum in △ PRS ad R rectangulo detur angulus RSP (*num.* 7) & latus RS (*num.* 6), invenitur diftantia planetæ a Sole vera feu intervallum SP (*§. 36 Trig.*).

9. Denique quia datur locus planetæ heliocentricus in eccliptica R (*num.* 6) & locus nodi N ad momentum obfervationis (§.779); datur etiam diftantia a nodo in ecliptica RN. Quare cum porro in △ RPN ad R rectangulo detur inclinatio maxima (*§.*783); reperietur diftantia a nodo in propria orbita (§.120 *Trigon.Sphær.*), confequenter locus centricus planetæ (§. 755).

PROBLEMA 40.

813: ***Invenire eccentricitatem planetarum primariorum in orbita elliptica & pofitionem lineæ apfidum.***

RESOLUTIO.

1. Inveniantur tria loca planetæ heliocentrica una cum diftantiis ejusdem a Sole veris (§. 812).
2. Cum ita dentur tria puncta, per quæ ellipfis tranfit, una cum foco ejusdem; linea apfidum & eccentricitas tam geometrice, quam per calculum eodem prorfus modo determinantur, quo in Sole (§.810).

PROBLEMA 41.

814. ***Ad datum tempus veram planetæ longitudinem & latitudinem fupputare.***

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus fupputetur locus Solis verus E (*§.*720) & ejus intervallum TS (§ 658). Tab. IIX. Fig. 47.
2. Eodem modo (*§. cit.*) computetur locus planetæ eccentricus in orbita P cum intervallo ejus PS.
3. Quæratur porro locus Nodi afcendentis N ad datum tempus (§.779).
4. Locus Nodi N auferatur a loco planetæ eccentrico P; refiduum eft argumentum latitudinis PN (§.769).
5. Dato argumento latitudinis PN, quæratur porro inclinatio PR, (§.

(§.785) & locus ad eclipticam reductus R (§.786 seu longitudo heliocentrica.

6. A loco Solis E subtrahatur locus planetæ reductus R, vel hic ab illo, minor nempe e majore: relinquetur angulus commutationis RSE, qui porro ex 180° subductus residuum facit angulum RST.

7. Datis intervallo planetæ PS & inclinatione RSP, inveniatur distantia curtata RS (§.789) & inde

8. porro angulus ad Terram RTS;

9. Si distantia ♉ a loco planetæ reducto R fuerit minor semicirculo, locus Solis verus E, angulo ad terram RTS addatur; sin illa major extiterit, hic ab eodem subtrahatur, ut vera planetæ longitudo prodeat.

10. Denique ex datis angulis RST & RTS atque inclinatione RSP inveniatur planetæ latitudo RTP (§.794).

E. gr. Quæratur longitudo & latitudo ♂ ad diem 1 Aug. A. 1711. Primum itaque supputandus est locus ☉ verus cum ejus intervallo. Est vero

Loc. ☉ verus 4S 8. 26. 33 in Merid. Parif. ad tempus apparens &

Logarithmus intervalli 400625 (§. 722).

Loco Solis vero & intervallo ejus invento, calculus pro Marte ita instituitur:

Radix

A.1700.0S.3°12′37″ Aphel.5S.0°35′25″
Mot. med.
A. 10 3. 23.54.18 11 5
Jul. 3. 21 6.11 38
Loc.med.♂7S.18.13.6 Aphel.5S.0.47.8
Aphel. 5S. 0.47.8 ☊ 1S. 17.25.20

Anom.med.2S.17.25.58 6 9
Æquat. subtr. 10. 6. 0 21

Anom.coæq.2S.7.19.58 ☊ 1S. 17.31.50
Aphel. 5S.0.47. 8 Log. Interv. 419490

Loc.♂ eccen. 7S. 8. 7. 6
Loc☊ 1S.17. 31.50

Argum. Lat. 5S.20.35.16
Inclinat. 18. 9
Reductio add. 17
Loc.♂ eccentr.7S.8. 7. 6

Loc. ♂ reduct. 7S.8. 7.23
Loc. ☉ verus 4S.8.26.33

Ang. ESR 2S.29.40.50
5S.29.59.60

Ang. RST 3S. 0.19.10
seu 90.19.10
179.59.60

SRT + STR 89.40.50

½R + ½T 44.50.25

Log. Sin. tot.	1000000
Interv. ♂	419490
Cosin. Inclin.	999999
Log. Dist. curt. SR	419489
Log. Interv. ☉TS	400625

Tang. Ang. A 1018864, cui in Canone respondent 57° 4′ 10″
subtr. 45

A	12	4	10

Log. Tang. 45	1000000
Tang. A.	933006
Tang. ½R + ½T	999758

Tang. ½T − ½R 932764, cui in Canone respondent 12° 0′ 38″

½R + ½T		44	50	25
Ang. ad Terr. RTS		56	51	3
seu	1S.	26	51	3
Loc. ☉ ver.	4	8	26	33
	6S.	5	17	36

Est adeo ♂ longitudo vera ♎ 5°17′36″

Tandem pro latitudine fiat:

Log. Sin. RTS	992285
Sin. RST	999999
Cotang. Inclin.	1227739
	2227738

Cotang. Latit. 1235453, cui in Canone respondent 89° 44′ 48″
89 59 60

Ergo Latitudo ♂ 15 12

Brevius quoque invenitur hunc in modum:

Log. Sin. RST	999999
RTS	592285
Tang. Inclin.	772263
	1764548

Tang. Latit. 764549, cui in Tabulis quam proxime respondent 15′ 12″.

SCHOLION.

815. *Quibus calculum astronomicum exercere volupe fuerit, iis suadeo, ut aut Tabulis* Cel. de la Hire *utantur, aut, si Rudolphinæ ad manus fuerint, ex iis tamen nonnisi locum planetæ heliocentricum investigent, ad geocentricum autem inveniendum methodum trigonometricam adhibeant: ita enim facilius scopo suo potientur.*

CAPUT

CAPUT V.

DE

THEORIA PLANETARUM SECUNDARIORUM, PRÆSERTIM LUNÆ.

DEFINITIO 42.

816. *Mensis periodicus* est temporis intervallum, quo Luna integrum Zodiacum percurrit; seu ad idem Zodiaci punctum restituitur, unde fuerat digressa.

DEFINITIO 43.

817. *Mensis synodicus* f. *Lunatio* est temporis intervallum, quo Luna a Sole digressa ad eundem redit.

DEFINITIO 44.

818. *Mensis anomalisticus* est temporis intervallum, quo Luna ab Apogæo digressa ad idem redit.

DEFINITIO 45.

819. *Mensis Draconticus* est temporis intervallum, quo Luna a nodo ascendente digressa ad eundem redit. Nodus enim ascendens dicitur *Caput Draconis*: nodus descendens *Cauda Draconis*.

DEFINITIO 46.

820. Hinc simul intelligitur, quid sint variæ illæ motuum species, quarum apud Astronomos mentio fieri solet. *Motus* nimirum *in longitudinem periodicus* est mensura mensis periodici. *motus Lunæ a Sole* synodici; *motus anomaliæ* anomalistici; *motus in latitudinem* dracontici.

OBSERVATIO 57.

821. *Quodsi repetitis crebro observationibus longitudo atque latitudo Lunæ inveniatur* (§. 559. 741); *majorem multo in motibus ejus inæqualitatem deprehendes, quam in Sole atque planetis primariis. Illa tamen inæqualitas regularitate omni non destituitur. Intra* 28 *enim dies semel velocissimus, bis mediocris & semel tardissimus. Quodsi ope telescopii Luna observetur dichotoma sive bisecta, & ad momentum observationis quæratur*

una longitudo planetæ (§. cit.), *eædemque observationes sæpius repetantur, periodos in singulis lunationibus minime æquales reperies. Eodem modo constat inæqualitas mensium synodicorum pariter & periodicorum, si ad tempus, quo Luna Soli opponitur vel cum fixa conjungitur, longitudinem observes.*

OBSERVATIO 58.

822. *Si ponamus Lunam in ellipsi moveri, in cujus altero foco terra existit, ea lege, qua primarii circa Solem feruntur* (§. 633) *& ex eclipsibus seu conjunctionibus & oppositionibus (quas communi nomine* Syzygias *appellare solent) singula ad supputationem loci Lunæ veri necessaria eo modo, quo in theoria Solis, determinentur; locus Lunæ eodem modo, quo locus Solis, supputatus cum observatione tantum consentit in syzygiis, omni autem tempore reliquo mire ab eadem discrepat, ita ut æquatio nunc augeatur, nunc minuatur. Maxima nimirum differentia in quadraturis observatur: a novilunio nempe usque ad primam quadraturam crescit, inde usque ad plenilunium iterum decrescit, & eodem modo se habet a plenilunio usque ad novilunium.*

DEFINITIO 47.

823. *Inæqualitas prima* seu *soluta* est inæqualitas motus periodici orta ab invariabili orbitæ eccentricitate, in syzygiis observabilis.

DEFINITIO 48.

824. *Inæqualitas altera* seu *menstrua* est inæqualitas motus elongationi a Sole alligata, quæ in quadraturis omnium maxime se prodit.

PROBLEMA 42.

825. *Invenire quantitatem mensis periodici & synodici.*

RESOLUTIO.

1. Cum in medio eclipsium lunarium, prout in sequentibus independenter ab his patebit, Luna Soli opponatur; supputetur in minimis scrupulis intervallum temporis inter duas eclipses seu oppositiones intercedens.
2. Hoc intervallum dividatur per numerum lunationum interea absolutarum, quotus erit quantitas mensis synodici (§. 817).
3. Supputetur motus Solis medius, qui quantitati mensis synodici respondet (§. 672) & integro circulo, quem luna interea absolvit, addatur.

4. Tan-

4. Tandem inferatur: ut aggregatum modo inventum ad 360°, ita quantitas mensis synodici ad quantitatem periodici.

DEMONSTRATIO.

Etenim cum Luna restituitur ad idem punctum, in quo Soli opponebatur, periodum suam absolvit, adeoque tempus interea elapsum est mensis periodicus (§. 816). Interea vero temporis Sol progressus ulterius, ut adeo Luna adhuc arcum aliquem ultra integram revolutionem absolvere teneatur, antequam eidem denuo opponatur. Quamobrem cum spatium inter binas oppositiones, interjectum sit mensis synodicus (§. 817); intra mensem synodicum Luna præter revolutionem integram tantum conficere debet arcum, quantum hoc tempore Sol conficit. Quare si 360° addatur motus medidius ☉ intra mensem synodicum, prodibit motus Lunæ medius eidem respondens, consequenter cum motus medius sit tempori proportionalis (§. 643); ex quantitate mensis synodici invenitur quantitas periodici, quemadmodum præcipitur. *Q. e. d.*

E. gr. *Copernicus* A. 1500 d. 6 Nov. h. 12 post mediam noctem observavit eclipsin lunæ Romæ & A. 1523 h. 4. 25′ d. 1 Aug. aliam Cracoviæ. Inde quantitas mensis synodici ita eruitur.

Obs. II. A. 1523 d. 237 h. 4 25′	
Obs. I. A. 1500 d. 310 h. 2 20	
Interv. temp. A. 22 d. 292 h. 2 5′	
addantur intercal. dies 5	
Interv. exact. A. 22 d. 297 h. 2 5′	
seu	1199100 5′

quod per 282 menses interea elapsos divisum dat quantitatem

Mensis synodici 42521′ 9″ 9‴
hoc est, 29 d. 12 h. 41′

Idem *Copernicus* A. 1522 d. 6 Sept. h. 13 20′ post mediam noctem, hoc est, A. 2272 *Nobonassaris* eclipsin lunarem Cracoviæ observavit: sed anno 28 ejusdem epochæ media nocte inter 18 & 19 mensis Thot, Babylone, hoc est, in meridiano Cracoviensi & nostro Calendario d. 26 Aug. h. 10. 10′, alia observata. Ex harum observationum collatione ut ante quantitas mensis synodici accuratius elicitur. Nimirum

Obs. II. A. 2272 d. 6 Sept. h. 13 20′
Obs. I. A. 28 d. 26 Aug. h. 10 10

Interval. temporis 2243 A. Ægyptiac. d. 11. h. 3. 10′
hoc est 1178936830′

quod per quantitatem paulo ante inventam divisum exhibet numerum lunationum interea absolutarum. Quare si idem intervallum denuo per hunc numerum dividatur, prodibit quan-

quantitas Menfis fynodici $42' 24' 3'' 10''' 9''''$,

hoc eft, d. 29 h. 11	$44'$	3	10	
Mot. ☉ med. interea	29°	6	24	18
Motus ☽	389	6	24	18

E. Men. period. d. 27 h. 7 43 $5''$

SCHOLION.

826. *Quantitas menfis elicitur ex plenilunıis veris: quare nova determinatione opus eft. Scilicet ubi ope quantitatis inventæ determinatus fuerit locus & motus Apogæi atque eccentricitas & hujus beneficio æquationes inventæ, oppofitiones veræ in medias convertendæ & tempus apparens itidem ad medium reducendum & inde demum obfervationum collatio inftituenda.*

COROLLARIUM 1.

827. Data quantitate menfis periodici, per regulam trium inveniri poteft motus diurnus, horarius &c. & fic tabulæ motuum mediorum Lunæ conftruuntur.

COROLLARIUM 2.

828. Quodfi motus diurnus Solis medius a motu Lunæ medio diurno fubtrahatur, relinquitur motus diurnus Lunæ a Sole.

COROLLARIUM 3.

829. Cum in medio eclipfeos totalis cum mora Luna in nodo exiftat, quemadmodum infra independenter ab his oftendetur; fi ad momentum illud quæratur locus Solis eidemque addantur fex figna, prodibit locus Nodi.

COROLLARIUM 4.

830. Collatio obfervationum recentiorum cum antiquis motum nodorum manifeftabit: ex iis vero apparet, nodos Lunæ moveri in figna antecedentia, e. gr. ex ♉ in ♈, ex ♈ in ♓.

COROLLARIUM 5.

831. Si adeo motui Lunæ medio diurno addatur motus diurnus nodorum; fumma erit motus latitudinis (§. 820) & inde ulterius ope regulæ trium invenitur, quanto tempore Luna 360° a capite Draconis digrediatur, hoc eft, ab eo digreffa denuo ad idem reftituatur. Patet ergo, quomodo quantitas menfis Dracontici fit invenienda (§. 819).

COROLLARIUM 6.

832. Dato motu latitudinis diurno Tabulæ motuum latitudinis conftruuntur ut fupra (§. 673).

SCHOLION.

833. *Tabulas ejusmodi exhibet* Bullialdus (a).

COROLLARIUM 7.

834. Si motus Apogæi diurni fubtrahatur a motu Lunæ medio diurno, relinquitur motus Lunæ medius ab Apogæo & inde per regulam trium elicitur menfis anomaliftici quantitas (§. 818).

OB-

(a) in Philolaicis f. 122.

OBSERVATIO 59.

835. Keplerus (b) *reperit quantitatem mensis synodici mediocrem* d. 29 h. 12. 44′ 3″ 11‴: *periodicum* d. 27 h. 7. 43′ 5″ 8‴. *Apogæi locum ad* A. 1700 d. 1. *Jan. st. v.* 11 S 8° 57′ 1″, *locum* ☊ 4 S. 27° 39′ 17″, *motum medium* ☾ *diurnum* 13° 10′ 35″, *motum diurnum Apogæi* 6′ 41″, *motum diurnum* ☊ 3′ 11″ (c): *eccentricitatem denique constantem* 4362, *qualium semidiameter eccentrici est* 100000.

COROLLARIUM.

836. Est adeo motus latitudinis diurnus 13° 13′ 46″ (§. 831), motus ab Apogæo diurnus 13° 3′. 54″ (§. 834).

SCHOLION.

837. *Cum tabulæ æquationum ad salvandam inæqualitatem solutam eodem prorsus artificio construantur, quo supra tabulas æquationum Solis & planetarum primariorum construere docuimus, non opus est, ut ibi dicta hic repetamus. Restat igitur, ut ostendamus, quomodo æquationes illæ corrigantur, ut extra syzygias veros Lunæ motus exhibeant: ubi non diffitendum, magnas hic occurrere difficultates, ita ut Lunæ sidus plane contumax censeri debeat, nec quisquam veras illarum rationes explicatas* (*Wolfii Math. Tom.* 3.) *dederit ante profundarum meditationum Autorem* Newtonum (d), *quas deinde ulterius evolvit* David Gregorius (e). *Sed cum theoriam Lunæ per causas physicas explicare nostri jam non sit instituti; suffecerit nobis evolvisse hypothesin, qua* Keplerus *noster ad secundam Lunæ inæqualitatem salvandam utitur.*

OBSERVATIO 60.

838. *Si Apogæum vel Nodus Lunæ est in quadris, nulla observatur inæqualitas secunda integro mense, qui adeo* Vacuus *appellari solet. Proximo vero mense etiam in ipso Apogæo & Nodo, ubi prima inæqualitas nulla, motus aliqua inæqualitas, nempe altera, notatur. Ab eo tempore inæqualitas secunda singulis mensibus crescit, donec copulis in Apogæo vel Nodo factis, maxima omnium evadat: qui* mensis plenus *dici solet. Mense subsequenti iterum decrescere incipit, donec prorsus extinguatur.*

HYPOTESIS 2.

839. *Si* DLFM, *fuerit orbita* Tab.
Lunæ (*quæ per circulum hic ex-* IIX.
hibetur, quia ellipsis lunaris ad eum Fig.
proxime accedit), DF *linea apsi-* 75.

(b) in Epit. Astron. Copern. lib. 6. p. 789.
(c) in Rudolphinis f. 78.
(d) in Princip. Phil. Nat. Math. lib. 3 p. 388 & seqq.
(e) in Elem. Astron. Phys. & Geom. lib. 4. fol. 282 & seqq.

dum, ex terræ centro A *intervallo eccentricitatis constantis* AB *describatur circulus, per idem ducatur recta* IK *seu* linea illuminationis, *quæ hemisphærium terræ illuminatum ab obscuro separat, porro per* A *agatur ad eam perpendicularis* HG, *quæ sit* linea copularum, *conjunctione nimirum Lunæ cum Sole in* H, *oppositione in* G *contingente, denique per centrum eccentrici* B *ducantur rectæ* NO *&* PQ *ipsis* IK *&* HG *parallelæ: erit* AC eccentricitas menstrua, toto mense, quo copulæ fiunt in H *&* G, *&* *in* H Apogæum, *in* G Perigæum menstruum, *& si his utamur tanquam in prima inæqualitate Apogæo* D *& eccentricitate* AB; *inæqualitates secundæ prodeunt. Cæterum quia hæc etiam latitudinem afficit planum orbitæ ad planum eclipticæ libratile concipitur, ut angulus inclinationi maximæ respondens varietur.*

SCHOLION.

840. *Quod hæc hypothesis sit conformis observationi quoad generales circumstantias patet, si eam cum ipsa conferre libuerit. Ponamus enim centrum* B *pervenire in* S, *ita ut linea illuminationis* IK *cum linea apsidum perpetua* DF *coincidat: erunt tum quadræ in Apogæo & Perigæo eccentrici & linea* NO *pariter coincidet cum* IK *atque* punctum menstruum C *coincidet cum* A, *nullaque adeo est eccentricitas menstrua. En mensem vacuum! Coincidat vero* FD *cum* HG, *tum punctum* B *&* C *coincident cum* E, *eritque eccentricitas menstrua eccentricitati perpetuæ* AB *æqualis adeoque maxima omnium, quia circellum istum nunquam egreditur. En mensem plenum! Consensum quoad circumstantias speciales calculus in hac hypothesi institutus monstrat.*

DEFINITIO 49.

841. ***Distantia Solis a Nodo vel Apogæo Lunæ*** est arcus eclipticæ inter locum Solis verum H & apogæum Lunæ D seu nodum ipsius interceptus, seu angulus ad terram DAH vel, si arcus ille major semicirculo, angulus, quem metitur ejus complementum ad 360°. Tab. IIX. Fig. 75.

DEFINITIO 50.

842. ***Scrupula menstrua longitudinis*** sunt valor trianguli æquatorii rectanguli BNZ super eccentricitate menstrua BZ stantis in istiusmodi particulis, qualium omnium maximum in mense pleno est 60, cum nempe punctum B coincidit cum E.

DEFINITIO 51.

843. ***Argumentum longitudinis menstruæ*** est arcus eccentrici Lunæ LP interceptus inter locum Lunæ

Lunæ primo æquatum L & rectam PQ per centrum eccentrici B ductam atque lineæ absidum menstruæ HG parallelam. *Annuum* est angulus DAH.

DEFINITIO 52.

Tab. IIX. Fig. 75. 844. *Æquatio menstrua* est valor trianguli æquatorii LAC, ductis rectis LA & LC ex loco Lunæ L ad punctum menstruum C & Terræ centrum A determinati, in istiusmodi particulis, qualium area totius orbitæ est 360.

DEFINITIO 53.

845. *Particula exsors* est differentia inter triangulum æquatorium LAC & ejus socium BLZ.

PROBLEMA 43.

846. *Datis loco Apogæi Lunæ solutæ* D, *loco Solis vero* H *& anomalia eccentri Lunæ* LBD, *invenire argumentum longitudinis menstruæ* LBP.

RESOLUTIO.

1. Ex dato loco Solis H & loco Apogæi lunæ D, invenitur per subtractionem distantia Solis ab Apogæo Lunæ, hoc est angulus HAD, cui ob parallelismum rectarum HG & PQ (§. 839) PBD æqualis (§. 233 *Geom.*).
2. Hic ergo ulterius subtrahatur ab anomalia eccentri Luna LBD; residuum est argumentum longitudinis menstruæ LBP.

E. gr. Sit Apogæum Lunæ in ♈ 24° & ☉ in ♊ 0, erit HAD 36°. Sit anomalia eccentri LBD 81° 42′ 24″; erit argumentum longitudinis menstruæ LBP 45° 42′ 24″.

PROBLEMA 44.

847. *Datis distantia loci Solis veri (aut eidem oppositi) ab Apogæo Lunæ* HAD *una cum eccentricitate perpetua* AB, *invenire eccentricitatem menstruam* AC. Tab. IIX. Fig. 75.

RESOLUTIO.

Cum in triangulo CAB ad C rectangulo (§. 839) dentur angulus CAB & latus AB; reperietur CA (§. 36 *Trigon.*).

E. gr. Sit BAC 36°, eccentricitas AB 4362: erit

Log. Sin. tot.	100000000
AB	36396857
Cosin. BAC	99079576
Log. AC	435476433, cui in tabulis respondent 3529.

PROBLEMA 45.

848. *Data eccentricitate menstrua* AC *vel* BZ *& eccentricitate perpetua* AB, *invenire scrupula menstrua longitudinis.*

RESOLUTIO.

1. Eccentricitas utraque ducatur

in semissem semidiametri eccentrici BN vel BL: facta erunt areæ triangulorum BLA & BNZ (§. 392 *Geom.*), quorum illud est triangulum æquatorium in mense pleno, hoc vero in dato (§. 840. 842).

2. Inferatur: ut area trianguli BLA ad 60 scrupula prima, ita area alterius BNZ ad scrupula menstrua longitudinis.

E. gr. Sit AB 4362, AC 3529, BN = LB = 100000: erit BLA 218100000 & BNZ 1764 50000, consequenter:

21810 : 17645 = 60 :

30) 727) 35290 (48′ 394/727
2908
62.10
5816
394
60
727) 23640 (32″ s. 33″
2181
1830
1454
376

Sunt ergo scrupula menstrua longitudinis 48′ 33″.

SCHOLION.

849. *Equidem cum orbita Lunæ sit elliptica, rectæ* BL & BN *æquales non sunt: sed cum ea ad circulum proxime accedat, differentia adeo exigua est, ut contemni queat. Quando enim puncta* B & E *coincidunt, hoc est, quando differentia maxima, observante* Keplero (f), *error vix* 17 *secundorum committitur, qualis in motu Lunæ ob ejus velocitatem contemni potest.*

PROBLEMA 46.

850. *Data eccentricitate menstrua* AC *una cum argumento longitudinis annuo* HAD, *invenire particulam exsortem.* Tab IIX. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ex datis in triangulo BCA ad C rectangulo (§. 839) hypothenusa AB & angulo CAB inveniatur CB (§. 36 *Trigon.*).
2. Ducatur CB in semissem eccentricitatis menstruæ AC: factum erit area trianguli ACB (§. 392 *Geom.*).
3. Quæratur etiam area circuli ex radio eccentrici BL, tandemque
4. Inferatur: ut area circuli ad 360° seu 129600″ ita area trianguli ACB ad valorem ejus in istiusmodi scrupulis.

Dico, hunc valorem esse particulam exsortem.

E. gr.

(f) in Epit. Astron. lib. 6 part. 4 p. 800.

E. gr. Sit HAD 36°, AB 4362, AC 3529, erit

Log. Sin. tot.	100000000
AB	36396857
Sin. BAC	97692187
Log. BC	434089044, cui in

tabulis respondent 2564.

Ergo AC. ½CB=△ACB=4514178. Sed area circuli 3141590000 (§. 429 *Geom.*): quare si eadem ponatur 360° sive 1296000″; reperietur valor trianguli ACB in istiusmodi scrupulis, hoc est particula exsors 3′ 6″.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC = BZ (§. 257 *Geom.*), △ ALC : △ BLZ = LV : LT & BLZ : BAC = TL : TV (§. 389 *Geom.*). Cum adeo sit BLZ : BLZ − ALC = LT : TV (§. 193 *Arithm.*) & hinc BLZ : BLZ − ALC = BLZ : BAC (§. 167 *Arithm.*); erit BLZ − ALC = BAC (§. 177 *Arithm.*). Est igitur △ BAC particula exsors (§. 845). *Q. e. d.*

PROBLEMA 47.

Tab. IIX. Fig. 75. 851. ***Datis argumento menstruo*** LBP, *scrupulis menstruis & particula exsorte, invenire æquationem menstruam.*

RESOLUTIO.

1. Cum scrupula menstrua sint valor trianguli BNZ in istiusmodi scrupulis, qualium idem in mense pleno est 60, triangula vero BNZ & BLZ sint ut BN ad LT (§. 389 *Geom.*), hoc est, ut sinus totus ad sinum argumenti menstrui (§. 2 *Trigon.*); per regulam trium invenietur triangulum BLZ in istiusmodi scrupulis, qualium maximum in mense pleno est 60.
2. Quare cum maximum juxta *Keplerum* sit 2° 30′ ex valore areæ circuli 360°: fiat ut 60′ ad 2° 30′ ita valor trianguli BLZ modo repertus ad valorem ejus in istiusmodi particulis, qualium area circuli est 360°.
3. Ab hoc tandem valore subtrahatur particula exsors, residuum est triangulum ALC in istiusmodi particulis qualium area circuli est 360° (§. 850); hoc est, æquatio menstrua (§. 844). Quodsi △ BLZ < △ ALC, particula exsors addenda.

E. gr. Sit argumentum menstruum LBP 45° 42′ 24″, scrupula menstrua seu valor △ BNZ 48′ 33″: erit LT 71577 & reperientur scrupula △BLZ debita 2085″. Quodsi ergo fiat ut 60′ ad 2° 30′, h. e. ut 3600″ ad 9000″ seu ut 4 ad 10 ita 2085 ad numerum quartum proportionalem 5212; erit is valor trianguli BLZ: quod adeo est 1° 26′ 52″. Auferatur particula exsors 3′ 6″; relinquetur æquatio menstrua 1° 23′ 46″.

PROBLEMA 48.

852. *Data æquatione menstrua & anomalia media quæ primo coæquatæ respondet, invenire mediam secundo coæquatæ convenientem.*

RESOLUTIO.

Quodsi Luna fuerit in L, Apogæum in D, erit anomalia media area LAD (§. 648), quæ anomaliæ primo coæquatæ, hoc est, angulo LAD (§. 650) respondet. Si ergo in semicirculo HIG, posita nempe HG linea apsidum menstrua æquatio menstrua LAC addatur; prodibit anomalia media, quæ secundo coæquatæ respondet.

Contra si ☽ sit in M, triangulum menstruum CAM ab anomalia media primo coæquatæ respondente HAMGN subducenda, ut relinquatur media, quæ secundo coæquatæ convenit.

SCHOLION.

853. *In hoc Astronomia nova* Kepleri *a veteri differt, quod in nova duplex inveniatur anomalia media, in veteri vero uni anomaliæ mediæ duæ aptentur coæquatæ.*

PROBLEMA 49.

854. *Data æquatione menstrua & anomalia primo æquata, invenire anomaliam secundo æquatam.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur anomalia media anomaliæ secundo coæquatæ respondens (§. 852).
2. Ex anomalia hac media eruatur secundo æquata (§. 686).

Aliter.

Quoniam processus iste valde operosus, *Keplerus* monet (g) posse etiam ad imitationem Astronomiæ veteris anomaliæ primo æquatæ in semicirculo HLG subtrahi, in altero GMH addi æquationem menstruam, ut prodeat æquatio secundo æquata. Vel æquationis menstruæ loco utendum est angulo ALC vel AMC & ut ante procedendum.

OBSERVATIO 61.

855. *Locus Lunæ secunda æquatione adhibita satisfacit in quadris, sed extra eas ab observato differt, maxima quidem differentia in octantibus existente, hoc est, Luna a Sole 45, 135, 225 & 315° elongata. Excrescit autem usque ad 41′ 32″ & periodus eius intra unam lunationem quater absolvitur, estque subtractiva a novilunio usque ad pleni-*

(g) Epitom. Astron. lib. 6. p. 889.

plenilunium, additiva vero a plenilunio usque ad novilunium.

SCHOLION.

856. *Hanc inæqualitatem primus observavit* Tycho.

DEFINITIO 54.

857. *Variatio* seu *Reflexio Luminis* est tertia motus lunaris inæqualitas, qua locus ejus verus a loco bis æquato extra quadras differt. *Æquatio* vero *Luminis* est æquatio ex menstrua æquatione & variatione composita.

PROBLEMA 50.

858. *Invenire variationem maximam.*

RESOLUTIO.

Observetur longitudo Lunæ in octantibus (§. 741) & ad momentum observationis computetur locus Lunæ bis æquatus: differentia inter computatum & observatum est variatio maxima (§. 855. 857).

OBSERVATIO 62.

859. Tycho *variationem maximam observavit* 40′ 30″*;* Keplerus *vero* 51′ *eandem statuit.*

PROBLEMA 51.

860. *Data elongatione Lunæ a Sole* HAL, *invenire variationem.*

RESOLUTIO.

Fiat: ut sinus totus ad sinum duplæ elongationis Lunæ a Sole, ita variatio maxima ad variationem quæsitam.

E. gr. Sit elongatio ☽ a ☉ 42° 55′ 22″: erit ejus duplum 85° 50′ 44″, quod vocetur A, adeoque posita variatione maxima 51′.

Log. Sin. tot.	100000000
Log. Sin. A	99988573
Log. 51	17075702

Log. Variat. 17064275, cui in tabulis respondent 50′, $\frac{86}{100}$ seu 50′ 51″.

SCHOLION.

861. *Hæc proportio ex collatione observationum eruta.*

DEFINITIO 55.

862. *Locus lunæ fictus* est locus ejus primo æquatus: *locus prope verus* est locus bis æquatus: *locus verus* est locus ter æquatus.

PROBLEMA 52.

863. *Ad datum tempus locum Lunæ verum supputare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur locus Lunæ fictus eodem prorsus modo, quo locus Solis verus & planetarum eccentricus in orbita supputatur (§. 720).

720), qui idem erit verus in copulis (§. 822).

2. Ad idem tempus supputetur locus ☉ verus (§. 720), & inde constituatur argumentum tam annuum, quam menstruum longitudinis (§. 846).

3. Quærantur scrupula menstrua longitudinis (§. 848) cum particula exsorte (§. 850) & inde porro æquatio menstrua (§. 851).

4. Ope hujus locus lunæ fictus transmutetur in prope verum (§. 862).

5. Ab eo subtrahatur locus ☉ verus, ut habeatur elongatio ☉ a loco ☽ prope vero.

6. Tandem beneficio huius inveniatur variatio (§. 860), loco ☽ prope vero vel addenda, vel demenda, ut verus obtineatur in orbita (§. 862): qui

7. eodem, quo supra, (§. 786) modo ad eclipticam reducitur.

SCHOLION.

864. *Cum in antecedentibus singula præcepta jam exemplo aliquo fuerint illustrata, si quis ibi repertis uti voluerit, prodibit exemplum calculi loci lunæ veri extra syzygias & quadras quoad inæqualitatem menstruam & variationem sine tabulis computati. Sed ad abbreviandum calculum sane tædiosum* Keplerus *tabulam æquationis luminis condidit, in qua cum distantia ☉ ab Apogæo ☽ & elongatione loci ☽ primo æquati æquatio ex menstrua & variatione composita una excerpitur.*

DEFINITIO 56.

865. ***Latitudo Lunæ simplex*** dicitur, quæ ex argumento latitudinis & angulo, sub quo orbita Lunæ ad planum eclipticæ inclinatur in copulis, ut supra inclinatio planetarum primariorum, supputatur.

SCHOLION.

866. *Coincidit in Luna latitudo cum inclinatione, quia luna circa terram eadem lege movetur, qua primarii circa Solem feruntur.*

DEFINITIO 57.

867. ***Latitudo vera*** est distantia ☽ ab ecliptica, prout e Tellure spectatur.

SCHOLION.

868. *Ideo vera a simplice differt, quia planum orbitæ ad planum eclipticæ libratile (§. 859), ut adeo inclinatio eorundem planorum sit variabilis.*

DEFINITIO 58.

869. ***Latitudo menstrua*** est arcus interceptus inter locum lunæ verum & planum aliquod constante angulo 5 graduum ad planum eclipticæ in linea nodorum inclinatum atque ad istud planum perpendicularis.

DE-

DEFINITIO 59.

870. *Argumentum menstruum latitudinis* est distantia loci veri Lunæ a loco vero Solis.

DEFINITIO 60.

871. *Scrupula latitudinis* sunt sinus complementorum distantiæ ☉ a ☊ ☾ ad unum vel tres quadrantes aut excessuum ejus super unum vel tres quadrantes in istiusmodi scrupulis, qualium Sinus totus est 60 primorum.

DEFINITIO 61.

872. *Inclinatio limitis menstrui* est angulus, quo orbita Lunæ inclinatur ad planum in dato quolibet mense, quod ipsum ad planum eclipticæ constanti angulo 5 graduum super loca nodorum inclinatur. Maximus est juxta *Keplerum* 18′ seu arcus, qui angulum istum metitur. *Limites* enim sunt puncta quadrantis intervallo a Nodis remota.

HYPOTHESIS 3.

Tab. IIX. Fig. 77. 873. *Si ad planum eclipticæ constante angulo 5 graduum in linea per nodorum loca transeunte aliud inclinatum fuerit, in quo designata concipiatur linea copularum* HG *per intersectionem plani per centra* (*Wolfii Math: Tom.* 3.). *Solis ac terræ trascuntis, ad planum eclipticæ recti; super hac linea* HG *ita libratur orbita Lunæ, ut quando limes anomaliæ solutæ in linea* HG, *coincidat cum plano eccentrici* DLFM *inclinationis constantis quando is hæret in quadris, libratio maxima existat, nempe* 18′, *sive in Austrum, sive in Boream, prout fert motus Lunæ; dum vero v. gr. boreus ab oppositione* H *ad quadram* K *tendit, estque v. gr. in* D, *sinus portionis librationis in boream se habeat ad sinum maximæ ut sinus anguli* HAD *ad sinum totum. Nimirum limes solutæ a plano priori versus boream attollitur, donec in quadram* K *incidat & ibidem inclinatio sit maxima; inde rursus descendit ad planum prius, donec in* G *cum eodem coincidat: a quo tempore semicirculus* GIH *eadem lege versus boream attollitur, donec in* I *sit maxima inclinatio; inde vero rursus deprimitur, donec in* H *denuo cum eo coincidat, alter vero ex adverso in austrum vertitur.*

SCHOLION.

874. *Hæc ita a* Keplero (h) *finguntur phænomenis conformiter, ut ea ad calculum revocari possint, more Astronomiæ veteris.*

PROBLEMA 53.

875. *Data distantia Solis a No-* Rr rr *do,*

(h) in Epit. Astron. Copern. lib. 5 p. 817.

do, invenire inclinationem limitis menstrui D.

RESOLUTIO.

Cum HG sit linea copularum
Tab (§. 873), adeoque ⊙ e. gr. in H
IIX. existat, limes vero D a nodo qua-
Fig. drantis intervallo removeatur (§.
75. 872); erit HAD complementum distantiæ ⊙ a Nodo ad quadrantem. Fiat igitur ut sinus totus ad cosinum distantiæ ⊙ a Nodo, ita sinus 18′ ad sinum inclinationis limitis menstrui D (§. 873).

E. gr. Sit distantia ⊙ a Nodo 30°, erit HAD 60°, adeoque

Log. Sin. tot.	100000000
Sin. DAH	99375306
Sin. 18′	77189966

Log. Sin. Incl. Lim. menstr. 176565272, cui in tabulis respondent 15′ 35″.

PROBLEMA 54.

876. *Data distantia Solis a Nodo, invenire Scrupula latitudinis.*

RESOLUTIO.

Fiat: ut sinus totus ad sinum complementi ad unum vel tres quadrantes (a it excessus super unum vel tres quadrantes), ita 60 scrupula prima ad scrupula latitudinis quæsita (§. 871).

E. gr. Sit distantia ⊙ a ☊ 30°, erit complementum ad quadrantem 60° adeoque

Log. Sin. tot.	100000000
Log. Sin. 60	99375306
Log. 60	17781512

Log. Scrup. Lat. 117156818, cui in Canone Logarithmorum numerorum vulgarium respondent $51\frac{96}{100}$.

Sunt adeo Scrupula latitudinis 51′ 57″.

SCHOLION.

877. *Inveniuntur eadem, si fiat ut* 3 *ad* 10 *ita inclinatio limitis menstrui* e. gr. *in nostro casu* 15′ 35″ seu 935″ *ad numerum quartum proportionalem*, 3117″, *quæ valent* 51′ 57″ *ut ante.*

PROBLEMA 55.

878. *Data inclinatione limitis menstrui una cum Scrupulis latitudinis, invenire latitudinem menstruam.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur Scrupula latitudinis per inclinationem limitis menstrui, factum est portio latitudinis menstruæ.

E. gr. Sit limitis menstrui inclinatio 15′ 35″ seu 935″, sint scrupula menstrua 51′ 57″ seu 3117″, factum 2914395 est latitudinis menstruæ portio in Scrupulis quartis (§. 393. 374 *Arithm.*). Est adeo portio latitudinis menstruæ 13′ 29″ 33‴ 15⁗ seu 13′ 30″.

SCHO-

SCHOLION.

879. *Ex circumstantiis singularibus dijudicandum, utrum portio latitudinis menstruæ sit australis an borealis* (§. 873).

PROBLEMA 56.

880. *Ad datum tempus latitudinem Lunæ veram supputare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur latitudo Lunæ simplex, ut supra inclinatio planetarum primariorum (§. 785).
2. Quæratur porro portio latitudinis menstruæ (§. 878).
3. Quodsi utraque fuerit ejusdem nominis v. gr. australis, addantur: si vero fuerint diversi nominis, nempe altera australis, altera borealis, minor e majori subtrahatur. In casu primo erit summa latitudo vera ejusdem nominis cum simplici, in posteriori differentia eadem latitudo erit ejus nominis, quod fuit majoris.

SCHOLION.

881. *Exposuimus hactenus theoriam, qua utitur* Keplerus *ad salvandas inæqualitates motuum lunarium. Cum linea apsidum motu angulari circa Terram moveatur motu inæquabili & motus Lunæ a conjunctione & oppositione ad quadraturas retardetur, a quadraturis ad syzygias acceleretur; orbita ejus continuo mutabilis: quam mutabilitatem ex causis physicis demonstravit* Newtonus. *Constat* Cel. Hallejum *in perficienda theoria Lunæ ex observationibus quoad numeros desudare, ut adeo dubitandum non sit pertinaciam Lunæ tandem victum iri.*

PROBLEMA 57.

882. *Invenire tempora periodica satellitum Jovis atque Saturni.*

RESOLUTIO.

Inveniuntur ex eorum conjunctionibus cum Jove atque Saturno, vel etiam ex eorundem digressionibus maximis a suis primariis.

OBSERVATIO 63.

883. Casſinus *reperit tempus periodicum Satellitis*

♄ I.	d. 1h.	21.	18′	27″
II.	d. 2h.	17.	41.	22
III.	d. 4h.	12.	25.	12
IV.	d. 15h.	22.	41.	14
V.	d. 79h.	7.	48.	0

♃ I.	d. 1h.	18.	28′	36″
II.	d. 3h.	13.	18.	52
III.	d. 7h.	3.	59.	40
IV.	d. 16h.	18.	5.	6

Newtonus (i) *periodos Satellitum Saturni circa primarios retinet, prouti a* Casſino *definitæ, sed periodos Satellitum* ♃ *ita definit.*

(i) in Princip. Phil. nat. mat. lib. 3. p. 390.

I.	1 d.	18 h.	27′	34″
II.	3.	13	13.	42
III.	7.	3.	42.	36
IV.	16.	16.	32.	9

OBSERVATIO 64.

884. *Idem* Casſinus *deprehendit diſtantiam Satellitis primi a Saturno* $1\frac{19}{20}$ *diametri annuli; ſecundi* $2\frac{1}{2}$; *tertii* $3\frac{1}{2}$; *quarti* 8, *quinti* 24 *diametrorum annuli. Eſt vero diameter* ♄ *ad diametrum annuli juxta eundem ut* 5 *ad* 11, *juxta* Hugenium *ut* 4 *ad* 9, *juxta obſervationes in Anglia factas teleſcopio* Hugeniano 123 *pedum ut* 3 *ad* 7: *quo eodem teleſcopio elongatio maxima deprehenſa Satellitis quarti a centro Jovis ſemidiametrorum* $8\frac{7}{19}$ *annuli. Primus Satellitum* ♃ *juxta* Casſinum *a centro* ♃ *diſtat* $5\frac{2}{3}$ *ſemidiametris jovialibus, ſecundus* 9, *tertius* $14\frac{23}{60}$, *quartus* $25\frac{3}{10}$.

THEOREMA 34.

885. *Quadrata temporum periodicorum Satellitum Jovis atque Saturni ſunt in ratione triplicata diſtantiarum a ſuis primariis.*

DEMONSTRATIO.

Non differt a demonſtratione theor. 34 (§. 799), niſi quod numeri ex §. 882 & 883 petendi.

Poteſt vero etiam hoc modo demonſtrari, ut ex temporibus periodicis & diſtantia unius Satellitis a ſuo primario obſervatis per theorema præſens eruantur diſtantiæ ceterorum, quæ cum proxime æquales reperiantur diſtantiis obſervatis, veritas theorematis a poſteriori patet.

SCHOLION.

886. *Poſteriori modo demonſtrandi utitur* Newtonus *tam in primariis, quam in ſecundariis. Quoniam vero non cujusvis eſt calculorum tricis ſeſe implicare, ideo ſubjicimus Tabulam, in qua diſtantiæ computatæ e regione obſervatarum collocantur.*

Nomina Planetarum.	Diſtantiæ obſervatæ a Sole.	Diſtantiæ computatæ.
♄	951000	954006
♃	519650	520096
♂	152350	152369
♁	100000	100000
♀	72400	72333
☿	38806	38710
Satelles.	diſtantiæ a centro Saturni.	
♄ I	$1\frac{19}{20}$	1. 93
II	$2\frac{1}{3}$	2. 47
III	$3\frac{1}{2}$	3. 45
IV	8	8. 00
V	24	23. 35
Satelles.	diſtantiæ a centro Jovis	
♃ I	$5\frac{2}{3}$	5.667
II	9	9.017
III	$14\frac{23}{60}$	14.384
IV	$25\frac{3}{10}$	25.299

Nemo

Nemo desideret consensum in fractionibus decimalibus: etenim non major est consensus in distantiis, quæ diversis Astronomorum observationibus debentur, quemadmodum Newtonus (k) *probat.*

CAPUT VI.

DE

SOLIS ET PLANETARUM PARALLAXIBUS, DISTANTIIS A TERRA ET MAGNITUDINIBUS.

PROBLEMA 58.

887. ***Parallaxin altitudinis Lunæ observare.***

RESOLUTIO.

1. Observetur altitudo Lunæ meridiana summa cum cura (§. 128) noteturque momentum observationis quam accuratissime.
2. Tempore observationis æquato (§. 715) supputetur longitudo & latitudo Lunæ vera (§. 863).
3. Data longitudine & latitudine, quæratur ejus declinatio (§. 260).
4. Ope declinationis & elevationis æquatoris inveniatur altitudo meridiana vera (§. 202.) Quodsi altitudo observata non fuerit meridiana, ad tempus observationis reperietur vera (§. 300).
5. Altitudo observata a refractione liberetur (§. 349) tandemque a vera subtrahatur, residuum est parallaxis altitudinis (§. 367).

E. gr. *Tycho* (l) A. 1583 d. 12 Oct. hor. 5. 19′ observavit altitudinem meridianam limbi superioris, ☽ 13° 38′. Erat adeo

Alt. limbi ☽ super.	13° 38′	Long ☽	15° 40′ ♑
Semidiam. ☽ app.	15	Lat. S.	2. 42
Altitudo centri ☽	13. 23	Decl.	19. 57
Refract. aufer.	8	Alt. æqu.	34. 6
Altitudo ☽ visa	13. 15	Alt. ☽	14. 9
Altitud. Vera	14. 9		
Parallaxis ☽	54		

(k) loc. cit. (l) Progymnasm. lib. 1. c. 6. p. 459.

PROBLEMA 59.

Tab. IV. Fig. 43. 888 *Data altitudine Lunæ* SR *& ejus parallaxi* AST, *invenire ejus a terra distantiam.*

RESOLUTIO.

Ob datam altitudinem ☽ visam datur ejus distantia visa a Zenith, hoc est, angulus ZAS, aut ob veram angulus ATS. Quare cum etiam detur angulus parallacticus S & semidiameter terræ AT sit 1; invenietur distantia Lunæ a Terra TS in semidiametris terrestribus (§. 36 *Trigon.*).

E. gr. Vi observationis præcedentis ZAS 76° 45′ AST 54′. Ergo

Log. Sin. AST	81961010
Log. AT	00000000
Log. Sin. ZAS	99882821
Log. TS	17921801, cui

in tabulis respondent $61_{,\frac{27}{100}}$, hoc est, fere 62.

Fuit ergo vi observationis Tychonis tunc temporis distantia ☽ a Terra TS 62 semid. terrestrium.

COROLLARIUM 1.

889. Cum ex theoria Lunæ detur ratio distantiarum a terra in singulis anomaliæ gradibus (§. 685); distantiæ eædem ope regulæ trium in semidiametris terrestribus inveniuntur & inde porro parallaxis quoque ad singulos anomaliæ gradus (§. 388) reperitur.

COROLLARIUM 2.

890. Cognitis parallaxibus altitudinis, inveniuntur porro parallaxes longitudinis, latitudinis, ascensionis rectæ, declinationis (§. 390. 391).

SCHOLION.

891. *Patet ergo ratio construendi tabulas* parallaxium ☽ horizontalium *ad singulos anomaliæ veræ gradus.*

OBSERVATIO 65.

892. Philippus de la Hire (m) *parallaxin horizontalem maximam statuit* 1° 1′ 25″, *minimam* 54′ 5″.

COROLLARIUM.

893. Ergo distantia ☽ a ♁ in Perigæo est $55_{,\frac{97}{100}}$, hoc est fere 56, in Apogæo $63_{,\frac{57}{100}}$, hoc est, $63\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium.

PROBLEMA 60.

894. *Invenire distantiam Solis a Terra.*

RESOLUTIO.

1. Sex circiter horis ante primam quadram aut sex horis post ultimam ope telescopii exquisiti micrometro instructi observetur Luna.
2. Notetur beneficio horologii oscil-

(m) in Tab. Astron. p. 27.

ſcillatori (§.994 *Mechan.*) ad motum Solis compoſiti (§.127) temporis momentum, quo biſecta apparet ſeu facie dimidiata ſplendet.

3. Illo ipſo momento capiatur diſtantia ope ſextantis vel octantis exactiſſime diviſi a duabus ſtellis fixis notæ longitudinis & latitudinis (§. 225).

4. Inde eruatur longitudo Lunæ (§. 741).

5. Ad idem momentum, poſtquam æquatum fuerit (§. 715), ſupputetur locus Solis verus (§. 720).

Tab. IIX. Fig. 77. 6. Locus Solis auferatur a longitudine Lunæ ante inventa, reſiduum eſt elongatio Lunæ a Sole, ſeu angulus LTS.

7. Ad tempus obſervationis ſupputetur anomalia ☽ vera (§. 863) & inveniatur ejus a terra diſtantia TL (§. 889).

8. Datis adeo in triangulo TLS ad L recto angulo angulo LTS & latere TL invenitur ☉ a ♁ diſtantia TS (§. 36 *Trigon.*).

E. gr. *Wendelinus* (n) per exquiſita teleſcopia dichotomias lunares obſervans tandem deprehendit, angulum LTS eſſe 89° 45′, adeoque TSL 15′. Quodſi diſtantiam Lunæ TL mediocrem aſſumamus 60 ſemidiametrorum terreſtrium (§. 893); erit

Log. Sin. S	76398160
TL	17781512
Sin. Tot.	100000000
Log. TS	41383352, cui

in tabulis reſpondent 13751.

COROLLARIUM 1.

895. Quodſi in triangulo HRT ad H rectangulo diſtantia ☉ TR aſſumatur 13751 ſemidiametrorum terreſtrium; reperietur parallaxis horizontalis diurna (§. 36 *Trigon.*). Eſt nempe Tab. IV. Fig. 44.

Log. Sin. Tot.	100000000
TR	41383352
Log. Sin. HRT	58616648,

cui in tabulis reſpondent 15″, quantam hanc parallaxin æſtimat *Wendelinus*.

COROLLARIUM 2.

896. Quodſi vero cum *Cl. de la Hire* (o) parallaxis horizontalis in diſtantia media aſſumatur nonniſi 6″; reperietur diſtantia ☉ a terra media 34377 (§ 888).

PROBLEMA 61.

897. *Parallaxin planetæ, v. gr. Martis, diurnam obſervare.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 78. 1. Sit ♂ in Meridiano atque in æqua-

(n) Vid. Ricciolus in Almag. lib. 3. c. 7. Tom. 1. f. 109.
(o) in Tab. Aſtron. p. 6.

quatore in H & observator sub æquatore in A constitutus cum cum fixa aliqua observet culminantem.

2. Quodsi in centro Terræ D constitueretur, Martem (quem tantisper in orbita sua immotum statuimus) constanter cum stella in eodem cœli puncto videret, adeoque & una in horizonte seu plano horæ sextæ. Sed cum jam ♂ habeat aliquam parallaxin sensibilem, fixa nullam (§. 384); ♂ videbitur in horizonte, quando est in P plano horizontis sensibilis, stella vero demum, quando in plano veri in R hæret. Notetur adeo tempus, quod intercedit inter transitum Martis & stellæ per planum horæ sextæ.

3. Hoc tempus in scrupula æquatoris convertatur (§. 212): cum enim ita prodeat arcus PM, cui angulus PAM, consequenter AMD (§. 233 *Geom.*), proxime æqualis, erit is parallaxis ♂ horizontalis (§. 371).

4. Quodsi observator fuerit non sub æquatore, sed in parallelo IQ, differentia illa erit arcus minor QM. Quare cum arcus exigui QM & PM sint ut eorum sinus AD & ID (§. 23 *Trigon.*), sitque ADG distantiæ loci ab æquatore, hoc est elevationi poli æqualis, adeoque AD ad ID ut sinus totus ad cosinum elevationis poli (§. 11 *Trigon.*), fiat: ut cosinus elevationis poli ID ad sinum totum AD ita parallaxis in I observata ad parallaxin sub æquatore observandam.

5. Quoniam ♂ & fixa in horizonte non commode observantur; observentur ergo in circulo horæ tertiæ, cumque sit parallaxis ibi observata TO ad horizontalem QM ut IS ad ID, propterea quod IS & ID sunt sinus arcuum TO & QM, adeoque propter arcuum exiguitatem inter se ut arcus, erit ut sinus anguli IDS seu 45° (quia planum DO medium inter meridianum DH & horizontem verum DM) ad sinum totum ita parallaxis TO ad horizontalem QM (§. 38 *Trigon.*).

6. Si etiam ♂ fuerit extra planum æquatoris, parallaxis inventa erit arcus paralleli, qui adeo ad arcum æquatoris reducendus ut supra (§. 547).

7. Denique si ♂ non fuerit stationarius, sed vel directus, vel retrogradus, per aliquot dies observationes iterentur ut con-

stat

stet quantum intervallo 24 horarum ascensio recta ♂ a fixa mutetur.

Hac methodo invenit *Cassinus*, cui egregium hoc inventum debemus, & post eum *Flamstedius*, paraliaxin ♂ horizontalem maximam esse quasi 25 secundorum aut paulo minorem.

COROLLARIUM 1.

898. Quoniam eo tempore, quo *Cassinus* Martis parallaxin scrutatus est, distantia ☉ a terra fuit plus quam altero tanto major distantia Martis, sinus vero angulorum exiguorum sunt ut anguli ipsi (§. 23 *Trigon.*); ideo ☉ parallaxin concludit 10 fere secundorum.

COROLLARIUM 2.

899. Quando parallaxis ☉ est 10'', distantia ejus a terra 22062 semidiametrorum terrestrium.

SCHOLION 1.

900. Cassinus *eadem methodo parallaxin Veneris observavit & inde Martis parallaxin eruit, quam cum ea 25 secundorum optime consentire didicit, ut adeo pro certo haberi possit, parallaxin ♂ non esse 25, Solis non 10 scrupulis majorem. Et ad hanc parallaxin Solis* Cassinianam *prope accedit* Wendeliniana.

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

SCHOLION 2.

901. *Parallaxin Veneris auxilio Reguli eadem methodo scrutatus est* Blanchinius (p). *Reperit autem parallaxin horizontalem* A. 1716 *a die* 1 *Julii usque ad quartam* 24'' 20''' *ac inde distantiam Veneris a terra elicuit* 8000 *semidiametrorum terrestrium, Solis vero distantiam a terra* 13403 *seu numero rotundo* 13400, *& inde porro parallaxin Solis horizontalem* 14'' 18'''. A. 1727 d. 19 *Septembr. cum Venus & Saturnus eundem parallelum describerent, declinatione utriusque existente* 19°, *ope hujus planetæ, sed multo operosius Veneris parallaxin invenit* 22'' 12''', *a priori nonnisi* 8''' *dissidentem: erat autem tunc temporis* ♀ *Telluri paulo proximior, quam in priori observatione, ut paulo major in hac secunda observatione prodire debuisset. Methodo tamen posteriori minus fidendum, quam priori simplicissimæ.*

SCHOLION 3.

902. *Cæterum observatio instituenda est ope telescopii exquisiti, micrometro instructi, in cujus foco extendenda fila quatuor se mutuo ad angulos rectos secantia* ABCD, *& telescopium tamdiu circumagendum, donec stella aliqua Marti proxima per filum aliquod decurrere videatur, ut fila* AB *&* CD *sint æquatori parallela atque adeo* AC *&* BD *repræsentent circulos declinationum. Nimirum ope filorum perpendicularium stellæ fixæ atque Martis situs* Tab. IX. Fig. 79.

(p) in Hespeii & Phosphori novis phænomenis c. 8 f. 72 & seqq.

tus in meridiano & circulo horæ tertiæ determinatur.

PROBLEMA 62.

903. ***Data distantia Solis ad unum anomaliæ gradum invenire eandem in Apogæo & Perigæo & ad quemcunque alium anomaliæ gradum, & distantiam quoque planetæ alterius cujuscunque a terra maximam, mediam & minimam.***

RESOLUTIO.

1. Inveniatur ad datum anomaliæ gradum, ad quem distantia Solis in semidiametris terræ reperta, eadem distantia in partibus, qualium radius eccentrici est 100 000 (§. 645).

2. Cum ipse radius eccentrici 100 000 sit distantia media, maxima vero in Apogæo ob eccentricitatem 1800 (§. 798) 101800, minima 98200; per regulam trium distantia Solis maxima, media & minima in semidiametris terræ inveniri potest.

E. gr. Distantia ☉ à ♁ media ex parallaxi Solis horizontali 6″, quantam statuit *de la Hire*, est 34377 semidiametrorum terrestrium. Quoniam itaque distantia media est ad maximam ut 100000 ad 101800 seu ut 1000 ad 1018, reperietur maxima 34995 semidiametrorum terrestrium. Similiter quia media ad minimam ut 1000 ad 982, invenietur minima 33758. Quodsi vero cum *Cassino* distantia ☉ mediocris assumatur 22000 semidiametrorum terrestrium, reperietur supposita eccentricitate *Kepleriana* distantia maxima 22396, minima 21604 semid. terrest. *Cassinus* 22 maximæ demit minimæ addit, calculo ex sua eccentricitate ducto.

3. Cum in tribus planetis superioribus distantia omnium maxima a terra sit, quando planetæ in Aphelio A, Terra itidem in aphelio suo *a* constituuntur, & aphelia planetarum aphelio ♁ ex Sole S opponuntur; distantia eorum maxima a Terra componitur ex distantia ipsorum maxima a ☉ SA & distantia Telluris maxima ab eodem S*a*. Tab. IX. Fig. 80. Similiter cum distantia Planetæ P a terra *a* minima sit, si planeta fuerit in Perihelio P, terra in Aphelio *a*, & Aphelium planetæ A Aphelio Telluris *a* ex Sole opponitur; distantia planetæ a terra minima P*a* est differentia inter distantiam minimam Planetæ a Sole PS & distantiam maximam Telluris ab eodem *a*S. Tab. IX. Fig. 81. Quoniam itaque distantiarum maximarum, mediarum & minimarum ♄, ♃ & ♂ ratio ad semidiametrum eccentrici Tel-

Telluris seu mediocrem Solis a Terra diſtantiam datur (§.798); reperientur ut ante diſtantiæ planetarum a Sole & inde porro ex ipſorum a Sole & Solis a Tellure diſtantiis tandem diſtantiæ a terra eruuntur.

E. gr. Diſtantia ☉ mediocris a Terra eſt ad diſtantiam minimam ♂ ut 100000 ad 138235. Quare cum ☉ diſtantia mediocris a terra ſit 34377 ſemid. terreſtr. reperietur diſtantia ♂ minima a ☉ PS 47521: unde ſi ſubducatur diſtantia maxima telluris a Sole AS 34995, relinquitur diſtantia minima ♂ a terra Pa 12526. Eodem modo reperitur diſtantia ♂ maxima a Sole 57225 & maxima a terra 92220.

Tab. IX. Fig. 80. 4. Diſtantia ♀ & ☿ a terra nunquam major eſt, quam ſi aphelium terræ A aphelio planetæ *a* opponatur & Terra non minus quam planeta in ſuo aphelio fuerit. Quare ſi ut ante reperiatur diſtantia planetæ inferioris maxima a Sole *a*S & diſtantiæ telluris maximæ AS addatur, prodibit maxima illius a centro hujus diſtantia A*a*. Similiter ſi Terra fuerit in ſuo perihelio P, ♀ vel ☿ in Aphelio *a*: relinquitur ♀ vel ☿ diſtantia a ♁ minima P*a*, ſi illorum diſtantia a Sole maxima *a*S ſubtrahitur a minima diſtantia Telluris a Sole PS.
(Tab. IX. Fig. 81.)

E. gr. Diſtantia mediocris ☉ a terra eſt ad minimam ♀ a ☉ ut 100000 ad 71900 (§ 798), hoc eſt, ut 1000 ad 719. Quare cum diſtantia mediocris Telluris a Sole ſit 34377; reperietur ♀ minima a Sole diſtantia 24717, maxima 25660 ſem. terreſtr. adeoque a terra maxima 60655, minima 8059 ſem. terreſtr.

5. Denique ſi diſtantia a terra maxima addatur minimæ; ſemiſumma erit mediocris (§. 330 *Arithm.*).

E. gr. Diſtantia maxima ♂ 92220 ſ.t.

E. gr. Diſtantia maxima ♂		92220 ſ.t.
	minima	12526
	Summa	104746
	media	52373

COROLLARIUM I.

904. Sunt ergo diſtantiæ planetarum a Sole & a terra in ſemidiametris terreſtribus, ſuppoſitis juxta *Cel. de la Hire* parallaxi horizontali maxima 6″ & dimenſionibus orbitarum *Keplerianis* ſequentes:

Diſt. a ☉	Maxima	Media	Minima
♄	345498	326894	308290
♃	187254	178640	170026
♂	57225	52326	47521
♁	34995	34377	33759
♀	25660	24889	24717
☿	16142	13340	10537

Ss ss 2 Diſt.

Dist. a Terra	Maxima	Media	Minima
♄	380493	326894	273295
♃	222249	178640	135031
♂	92220	52373	12526
☉	34995	34377	33759
♀	60655	34377	8099
☿	51137	34377	17617

SCHOLION 2.

905. *Juxta* Cassinum (q) *distantiæ paulo minores prodeunt, ob majorem parallaxin Solis* (§. 898). *Ecce tibi eas:*

Dist. ☉	Maxima	Media	Minima
♄	244000	210000	176000
♃	143000	115000	87000
♂	59000	33500	8000
☉	22374	22000	21626
♀	38000	22000	6000
☿	33000	22000	11000
☾	61	57	53

SCHOLION 3.

906. *Quoniam rarissime contingit, ut planetæ primarii maximam & minimam consequantur a terra distantiam, quemadmodum ex anterioribus facile colligitur* (903); *ideo præstat ad magnitudinem systematis Solaris ex distantiis planetarum primariorum a Sole & orbitarum magnitudinibus cognoscere, præsertim cum inde nullo negotio elongationes maximæ & minimæ a terra cognoscantur. Lubet igitur distantias planetarum primariorum a Sole & Lunæ a terra hic exhibere, prouti extant in Calendario Astronomico Academiæ Regiæ scientiarum Parisino* (r).

Dist. a ☉	Maxima	Media	Minima
♄	221870	209836	197802
♃	119900	114400	208900
♂	36630	33528	30426
♁	22374	22000	21626
♀	16016	15906	15796
☿	10274	8514	6754
☽ a ♁	62	58	54

Quodsi quis dimensiones orbitarum desideret in particulis, qualium radius eccentrici Telluris est 100000, *ut pateat differentia a Keplerianis supra* (§. 798) *exhibitis; ope regulæ trium numeri tabulæ in quæsitos facile transmutantur; sunt enim dati ad quæsitos ut* 100 *ad* 22.

COROLLARIUM 1.

907. Si distantia a Sole maxima AS Tab.
minimæ PS addatur: summa est se- IX.
midiameter major ellipsis PA. Mi- Fig.
nima vero distantia a Sole est distan- 81.
tia foci a vertice (§. 633), differentia inter distantiam mediam PC & minimam PS eccentricitas seu foci S a centro C distantia. Quia distantia media est radius eccentrici (§. *cit.*); cognita eccentricitate porro invenitur

(q) vid. Ozanam Cours de Mathematique Tom 5. Trait. de Geogr. part. 1. c. 2. p. 63.
(r) Connoissance de Temps pour l'Année 1715. p. 138. 139

tur diameter minor (§. 696). Patet adeo, quomodo dimensiones orbitarum in semidiametris terrestribus inveniantur.

SCHOLION 4.

908. *Ecce tibi diametros orbitarum cum eccentricitatibus, quæ sunt distantiæ focorum a centro* (§. 653) *in semidiametris terrestribus* (§. 906).

	Diamet. orbitarum	Eccentricitas
♄	419672	12034
♃	228800	5500
♂	67056	3102
♁	44000	374
♀	31812	110
☿	17028	1760
☽	116	4

PROBLEMA 63.

909. ***Invenire rationes, quas habent diametri veræ planetarum ad diametrum Solis.***

RESOLUTIO.

Cum ratio distantiæ planetarum a Sole ad distantiam mediam a terra detur (§. 798. 904), una cum semidiametris apparentibus eorum ex terra visorum (§. 557); inveniantur semidiametri apparentes ex ea distantia visorum, qua Sol a terra abest (§. 212 *Optic.*:) erunt enim semidiametri veræ ut apparentes modo repertæ (§. 245 *Optic.* & §. 23 *Trigon.*).

E. gr. Diameter apparens annuli ♄ in minima a terra distantia est 68″ ex observatione *Hugenii* (s): quare cum hæc sit ad distantiam mediocrem Solis quam proxime ut 8 ad 1, diameter annuli ♄ ex ea distantia visi, qua ☉ a terra abest, foret 544″ seu 9′ 4″, consequenter quia ☉ diameter apparens juxta *Keplerum* 30′ 30″ seu 1830″ (§. 553), diameter annuli ♄ vera est ad diametrum ☉ veram ut 544 ad 1830, hoc est, (si utrinque per 49 dividas) fere ut 11 ad 37.

COROLLARIUM 1.

910. Quoniam corpora planetarum sunt ut cubi diametrorum (§. 579 *Geometr.*), superficies eorundem ut diametrorum quadrata (§. 554. 408 *Geom.*); data ratione diametrorum datur quoque ratio superficierum ac soliditatum.

COROLLARIUM 2.

911. Quodsi ergo semidiametri apparentes ex observatione *Hugenii* assumantur (§. 557), reperietur

Ssss 3 Ratio

(s) in Systemate Saturnino p. 77.

	Ratio diametr. ad diametrum ☉	Ratio superficierum ad superficiem ☉	Ratio soliditatum ad soliditatem ☉
Annul.	11 : 37		
♄	5 : 37	1 : 55	1 : 405
♃	2 : 11	1 : 30	1 : 166
♂	1 : 166	1 : 27556	1 : 4574296
♀	1 : 84	1 : 7056	1 : 592704
☿	1 : 290	1 : 84100	1 : 24389000

PROBLEMA 64.

Tab IIX. Fig. 82. 912. ***Data semidiametro apparente*** **AOC** ***& distantia sideris a terra*** **OC**, ***invenire veram*** **AC.**

RESOLUTIO.

Cum in triangulo AOC ad A rectangulo detur angulus O & hypothenusa OC; reperietur AC (§. 36 *Trigon.*).

E gr. Distantia ☽ perigæa est $55\frac{27}{100}$ sem. terrestrium (§. 893) & semidiameter ejus apparens in perigæo juxta *Keplerum* 16′ 22″ (§. 555). Unde

Log. Sin. tot.	1000000000
CO	17479553
Sin. AOC	76776811
	94256364
Log. AC	— 0.5743636,

cui quam proxime respondent $\frac{1000}{3752}$.

Est ergo semidiameter ☽ $\frac{1000}{3752}$ (seu $\frac{266}{1000}$ semid. terrestr.

Aliter.

Cum semidiameter telluris apparens ex Sole vel ☽ visa sit æqualis parallaxi ☉ & ☽ ex terra visorum (§. 371); erunt semidiametri veræ ☉, ☽ & ♁ ut parallaxes ☉ & ☽ atque semidiametri apparentes ☉ & ☽.

E. gr. parallaxis ☽ in distantia minima est 1° 1′ 25″, semidiameter ejus apparens 16′ 21″. Est ergo semidiameter ☽ ad semidiametrum terræ ut 981″ ad 3685″, hoc est, ut 266 ad 1000, seu ut 133 ad 500 prorsus ut ante. Similiter parallaxis ☉ in media distantia est 6″ (§. 896), semidiameter apparens 15′ 15″ (§. 553). Est ergo semidiameter telluris vera ad semidiametrum ☉ veram ut 6 ad 915, hoc est, ut 2 ad 305 seu ut 1 ad 152, vel si mavis, ut 1 ad $152\frac{1}{2}$.

COROLLARIUM 1.

913. Superficies ☽ est ad superficiem terræ ut 17689 ad 250000 hoc est, ut 1 ad 14 (§. 554. 408 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

914. Lumen adeo a terra in ☽ reflexum est ad lumen a ☽ in ♁ reflexum ut 14 ad 1. Non adeo mirum, quod lucula illa circa novilunia in parte ☽ a ☉ aversa nobis sit conspicua.

COROLLARIUM 3.

915. Luna est ad terram quoad soli-

soliditatem ut 23526377 ad 125000000 (§.579 *Geom.*), hoc est, fere ut 1 ad 52.

COROLLARIUM 4.

916. Sol est ad terram quoad superficiem ut 23104 ad 1, quoad soliditatem ut 3511808.

PROBLEMA 65.

Tab. X. Fig. 83. 917. *Data semidiametro Lunæ vera* AC *&* *distantia verticis alicuius montis* B *a limite illuminationis* A, *invenire altitudinem montis* BD.

RESOLUTIO.

1. Addantur quadrata rectarum AC & AB, summa est quadratum BC (§. 417 *Geom.*).
2. Ex ea extrahatur radix quadrata (§. 261 *Arithm.*), quæ erit recta BC.
3. Inde auferatur semidiameter Lunæ CD, relinquitur altitudo montis BD.

E. gr. *Hevelius* (t) in montibus altissimis deprehendit AB $= \frac{1}{26}$ AE $= \frac{1}{13}$ AC. Quare cum AC sit 266 partium, qualium semidiameter telluris est 1000 (§. 912), erit AB $= \frac{266}{13}$. Est adeo AC : AB $= 266 : \frac{266}{13} = 133 : \frac{133}{13} = 1729 : 133$. Ergo

$AC^2 = 2989441$
$AB^2 = 17689$

$BC^2 = 3007130$

$BC = 1734$
$DC = 1729$

$BD = 5$

Est ergo BD $= \frac{5}{1730}$ AC $= \frac{1}{346}$ AC.

Quodsi ex Geographia semidiameter telluris assumatur 860 milliarium Germanicorum; reperietur AC $228\frac{76}{100}$ mill. seu $\frac{457}{2}$ mill. Ergo BD $= \frac{1}{34}$ AC paulo major quam $\frac{1}{2}$ mill. Germ.

SCHOLION.

918. *Cum montium lunarium magnitudinem demetiri liceat; non mirum, quod ab Astronomis singulis sua imposita sint nomina.* Hevelius (u) *eadem a montibus telluris mutuatur:* Ricciolus (x) *eosdem nominibus celebrium Astronomorum insignivit, quem nunc plerique sequuntur. Quoniam nomina montium lunarium in observationibus eclipsium lunarium usurpantur; ideo lunæ faciem cum nominibus præcipuis ex Ephemeridibus Parisinis hic exhibere libet. Est nempe* Tab. XI. Fig. 84.

1. Grimaldus
2. Gallilæus
3. Aristarchus
4. Keplerus
5. Gassendus
6. Schickardus
7. Har-

(t) Selenogr. c. 8. f. 266.
(u) Selenogr. c. 8. f. 225.
(x) in Astron. Reform. lib. 3. c. 11 f. 168.

7. Harpalus
8. Heraclides
9. Lansbergius
10. Reinholdus
11. Copernicus
12. Helicon
13. Capuanus
14. Bullialdus
15. Eratosthenes
16. Timocharis
17. Plato
18. Archimedes
19. Insula sinus medii
20. Pitatus
21. Tycho
22. Eudoxus
23. Aristoteles
24. Manilius
25. Menelaus
26. Hermes
27. Posidonius
28. Dionysius
29. Plinius
30. Catharina, Cyrillus, Theophilus
31. Fracastorius
32. Promontorium acutum.
33. Messala
34. Promontorium Somnii
35. Proclus
36. Cleomedes
37. Snellius & Furnerius
38. Petavius
39. Langrenus
40. Taruntius

A Mare Humorum
B. Mare Nubium
C. Mare Imbrium
D. Mare Nectaris
E. Mare Tranquillitatis
F. Mare serenitatis
G. Mare fœcunditatis
H. Mare Crisium

PROBLEMA 66.

919. ***Invenire semidiametros planetarum primariorum in semidiametris terræ.***

RESOLUTIO.

Cùm semidiameter Solis vera sit 152 semidiametrorum terrestrium (§. 912) & ratio diametrorum planetarum primariorum ad diametrum Solis detur (§. 911); reperientur semidiametri planetarum primariorum in semidiametris terrestribus per regulam trium.

COROLLARIUM 1.

920. Est ergo semidiameter ♄ $20\frac{20}{37}$, annuli $45\frac{7}{37}$, ♃ $27\frac{7}{11}$, ♂ $\frac{76}{81}$, ♀ $1\frac{17}{31}$, ☿ $\frac{76}{145}$.

COROLLARIUM 2.

921. Hinc patet esse rationem quam proximam

Diamet. Terræ ad diam. planetarum.		Superfic. terræ ad superfic. planet.	Solid. terræ ad solid. planetar.
Annuli	1 : 45		
♄	1 : 20	1 : 400	1 : 8000
♃	1 : 28	1 : 784	1 : 21952
☉	1 : 152	1 : 23104	1 : 3511808
♂	12 : 11	6 : 5 s. 1 : $\frac{5}{6}$	13 : 10 s. 1 : $\frac{10}{13}$
♀	4 : 7	1 : 3	3 : 16 s. 1 : $5\frac{1}{3}$
☿	19 : 4	5 : 1 s. 1 : $\frac{1}{5}$	9 : 7 s. 1 : $\frac{7}{9}$

SCHOLION.

922. *In Calendario astronomico Academiæ Regiæ Scientiarum* (y) *magnitudines planetarum in semidiametris terrestribus ita determinantur:*

Dia-

(y) loc. cit.

Diam. planetarum.		Superficies.	Soliditates.
♄	10 −	99	980
♃	10 +	106	1170
♂	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
☉	100	10000	1000000
♁	1	1	1
♀	1	1	1
☿	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
☽	$\frac{1}{4}$ +	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{50}$

Notandum, quod signum + denotet, numerum, cui adjicitur, esse justo paulo minorem; signum vero − indicet, eum esse justo paulo majorem. Plurimum autem differunt numeri hi ab anterioribus, propterea quod ibidem diametrum Solis ob parallaxin ejus admodum exiguam multo majorem assumserimus. Discrepant nimirum adhuc Astronomi in magnitudine Solis definienda.

PROBLEMA 67.

923. *Invenire distantias satellitum ♃ & ♄ a suis primariis.*

RESOLUTIO.

1. Ope tubi micrometro instructi observetur ratio distantiæ satellitum ad suum primarium.

2. Cum diameter ♄ atque ♃ in semidiametris telluris detur (§. 920); reperietur quoque in eadem mensura distantia satellitum a suis primariis.

COROLLARIUM 1.

924. Cum satelles ♃ primus ab eo distet $5\frac{2}{3}$, secundus 9, tertius $14\frac{2}{3}$, quartus $25\frac{1}{3}$ semidiametris ♃ (§. 886); semidiameter vero Jovis sit $27\frac{7}{11}$ semidiametrorum terrestrium (§. 920): erit distantia primi a centro ♃ 157, secundi 249, tertii 398, quarti 700 semidiametrorum terrestrium.

COROLLARIUM 2.

925. Similiter quoniam distantia Satellitis primi a centro Saturni est $1\frac{19}{20}$, secundi $2\frac{1}{2}$, tertii $3\frac{1}{2}$, quarti 8, quinti 204 semidiametrorum ♄; semidiameter vero Saturni $20\frac{1}{3}$, semidiametrorum terrestrium (§. 920); erit distantia primi 40, secundi 48, tertii 72, quarti 163, quinti 488.

CAPUT VII.

DE

ADSPECTIBUS PLANETARUM ET ECLIPSIBUS LUNÆ AC SOLIS.

DEFINITIO 66.

926. *Adspectus* est concursus radiorum luminosorum a duobus planetis in terram demissorum, vel in unam rectam incidentium, vel angulum formantium, qui est vel pars, vel partes aliquotæ quatuor rectorum.

COROLLARIUM.

927. Est adeo conjunctio adspectuum principium (§. 535), oppositio terminus maximus (§. 536).

DEFINITIO 67.

928. Præter hos adspectuum veluti terminos, *Conjunctionem* & *oppositionem*, veteres numerant Trigonum, Tetragonum & Sextilem. *Trigonus* seu *Trinus* est angulus, quem metitur triens AB. *Tetragonus* seu *Quadratus* est angulus quem metitur quadrans AD. *Sextilis* est angulus, quem metitur sextans AG.

Tab. X. Fig. 85.

DEFINITIO 68.

929. Signa sunt conjunctionis ☌, oppositionis ☍, trigoni △, quadrati □, sextilis ✱.

SCHOLION.

930. *Adspectuum doctrina ab Astrologis excogitata in usum prædictionum omni ratione & experientia certa destitutarum atque hinc a recentioribus ex Mathesi profligatarum. Unde* Keplerus (z) *adspectum definit per angulum a radiis planetarum apud terram formatum, efficacem ad stimulandam naturam sublunarem.*

DEFINITIO 69.

931. Recentiores addiderunt *Decilem*, qui decimam circuli partem comprehendit. *Tridecilem*, qui tres decimas & *Biquintilem*, qui 4 decimas seu duas quintas intercipit. *Keplerus* superaddit ex obser-

(z) Epit. Astron, lib. 6. p. 84.

ſervationibus, ut ait, meteorologicis *Semiſextum*, quem duodecima pars circuli; & *Quincuncem*, quem quinque duodecimæ metiuntur. Denique Medicis Aſtrologis debetur *Octilis*, qui unam; & *Trioctilis* ſeu *Seſquadrus*, qui tres octavas comprehendit.

COROLLARIUM.

932. Cedunt adeo conjunctioni gradus 0, ſemiſexto 30, decili 36, octili 45, ſextili 60, quintili 72, quadrato 90, tridecili 108, trino 120, ſeſquadro 135, biquintili 144, quincunci 150, oppoſitioni 180; ſigna vero conjunctioni 0, ſemiſexto 1, ſextili 2, quadrato 3, trino 4, quincunci 5, oppoſitioni 6.

DEFINITIO 70.

933. *Conjunctio magna* eſt conjunctio ♄ & ♃; *conjunctio* vero *maxima* eſt conjunctio eorundem planetarum ſupremorum in principio arietis.

SCHOLION.

934. *Diviſio hæc in Aſtronomia parum habet utilitatis, ſed Aſtrologorum commentis debetur, qui conjunctionibus raro redeuntibus (magnæ enim intervallo 20, maximæ intervallo 800 circiter annorum redeunt) magnam efficaciam tribuunt.*

DEFINITIO 71.

935. *Conjunctio corporalis* eſt, qua ſtella inferior ſuperiorem tegit, eaque *centralis*, ſi centra ſiderum cum centro terræ fuerint in eadem recta; *platica* vero dicitur, quæ cum aliqua latitudine conjuncta.

PROBLEMA 68.

936. ***Datis planetarum duorum longitudine ad meridiem, qui adſpectum præcedit, & motu utriusque diurno, invenire momentum, quo is celebratur.***

RESOLUTIO.

1. E longitudine remotioris ſubtrahantur tot ſigna vel gradus, quot cuilibet adſpectui cedunt (§. 932): nempe in ☍ 6, in △ 4 vel 8, in □ 3 & 9, in ⚹ 2 aut 10 ſigna & ita porro: ut ad eundem fere locum reducatur, in quo vicinior hæret.
2. Locus datus vicinioris & reductus remotioris a ſe invicem ſubtrahatur: quo facto,
3. Fiat: ut differentia motuum diurnorum, ſi planeta uterque vel directus, vel retrogradus; ſeu ut ſumma eorundem motuum, ſi alter directus, alter retrogradus, ad differentiam modo inventam; ita 24 horæ ad intervallum temporis a meridie dato usque ad momentum adſpectus prætterlapſum. Supponitur enim, mo-

tum diurnum in paucarum horarum intervallo esse tempori ad sensum proportionalem.

E. gr. Ex ephemeridibus apparet A. 1711 d. 10. Nov. in ipso meridie juxta Meridianum Parisinum fuisse locum ♄ ♌ 14° 25′, motum ejus diurnum 2′; locum ♂ ♐ 14° 18′ 36″ 7 motum diurnum 44′ 24″. Cum adeo distantia sit 4 fere signorum, patet eo die fuisse △♄♂: quæritur momentum hujus aspectus.

Loc. ♂	8S.14°18′36″	Mot. ♂	44′24″
Subtr.	4	Mot. ♄	2
Loc. ♂ red.	4S.14. 18.36	differ.	42.24
Loc. ♄	4S.14.25		
Different. Long.	6 24		

Est adeo differentia motuum diurnorum ad differentiam longitudinis ut 42′ 24′ ad 6′ 24″, hoc est, fere ut 53 ad 8. Fiat ergo ut 53 ad 8 ita 24 h. ad momentum trini 3 h. 37′ 21″.

DEFINITIO 72.

937. *Eclipsis Lunæ* est privatio luminis in Luna ob interpositionem diametralem Terræ inter Lunam & Solem. *Totalis* est, si Luna tota deficit; *partialis* vero, si tantum aliqua ejus pars deficit. Estque *totalis* vel *cum mora*, si defectus totalis aliquandiu durat; vel *sine mora*, si instantanea.

SCHOLION.

938. *Veritas hujus definitionis patet ex superioribus* (§. 459) *& mox evidentius adhuc patebit.*

PROBLEMA 69.

939. *Ad datum quodcunque tempus invenire longitudinem coni umbrosi terræ.*

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus inveniatur distantia Solis a terra (§. 685).
2. Cum diameter Solis in semidiametris terræ detur (§. 921. 922); venietur axis coni umbrosi (§. 143. *Optic.*).

E. gr. Distantia ☉ maxima a terra est 34996 semidiametrorum terrestrium (§. 904), semidiameter telluris 1, ☉ 152 (§. 921): reperietur longitudo coni umbrosi 231 fere. Similiter quia distantia ☉ minima a terra 33759; in distantia perigæa longitudo coni umbrosi 223 semidiametrorum terrestrium.

COROLLARIUM.

940. Cum distantia Lunæ maxima a terra sit nondum 64 semidiametrorum terrestrium (§. 893); ☽ in oppositione cum Sole prope nodos vel in iisdem constituta in umbram terræ incidit, etiamsi Sol in Perigæo & Luna in Apogæo fuerit. Multo magis itaque in eandem immergitur, si ☉ fuerit Apogæo & Luna perigæo vicinior, quia tum umbra longior (§. 144.

(§. 144 *Optic.*) & Luna basi coni umbrosi propior.

PROBLEMA 70.

941. *Invenire semidiametrum apparentem umbræ terrestris in loco transitus Lunæ ad datum tempus.*

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus inveniantur distantiæ Lunæ ac Solis a terra (§. 889) & inde porro parallaxes horizontales (§. 387).
2. Parallaxes horizontales conjiciantur in unam summam.
3. Inde auferatur semidiameter Solis apparens; quod relinquitur est semidiameter apparens umbræ.

E. gr. Sit Parall. ☽ horizont.	56′	18″
Parall. ☉ horizont.		6
Aggregat.	56	24
semid. ☉ appar.	16	5
erit semid. Umbræ	40′	19″

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 86. Sit AB semidiameter Solis, CF telluris, ED umbræ in transitu Lunæ: erit ACB semidiameter apparens ☉, DCE umbræ; & CBF parallaxis horizontalis ☉, CDF ☽ (§. 371). Est vero GCE = ACB (§. 156 *Geom.*) & GCD = CDF + CBF (§. 239 *Geom.*). Ergo GCD − GCE (= ECD) = CDF + CBF − ACB (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

942. *Cum parallaxis Lunæ sit juxta* Phil. de la Hire, *non major 6 scrupulis secundis, adeoque fere insensibilis, ejus additionem omittit. Sed propter umbram atmosphæræ semidiametrum umbræ apparentem integro scrupulo primo augeri jubet: unde juxta ipsum semidiameter umbræ in nostro exemplo,* 41. 13.

DEFINITIO 73.

943. *Termini eclipsium possibiles* dicuntur, intra quos fieri potest, ut aliquando eclipsis contingat: *necessarii* appellantur, intra quos necessario eclipsis contingit.

PROBLEMA 71.

944. *Terminos eclipsis lunaris cum possibiles, tum necessarios determinare.*

RESOLUTIO.

1. Cum nulla possibilis sit ecclipsis, nisi aggregatum ex semidiametris umbræ ac ☽ sit major latitudine ☽ (alias enim ☽ non incurrit umbram); addantur semidiametri apparentes Lunæ perigææ & umbræ, Sole apogæo, ut habeatur latus MO. Tab. IIX. Fig. 87.
2. Datis in △ sphærico MNO an-

gulo ad nodum, cujus mensura est latitudo ☽ maxima in copulis, recto M & crure MO, inveniatur distantia ☽ a nodo NO (§. 118 *Sphæric.*): qui est terminus, ultra quem eclipsis contingere nequit.

3. Eodem modo si semidiametri apparentes ☽ apogææ & umbræ Sole perigæo addantur ut habeatur LH, in △ NLH invenietur distantia ☽ a ☊ HN (§. 118. *Sphæric.*): qui est terminus, intra quem Luna necessario eclipsin patitur.

E. gr. Juxta *Keplerum* (a) semidiameter umbræ in ☉ apogæo & ☽ perigæa 49′ 40″, semidiameter ☽ apparens in perigæo 16′ 22″. Ergo MO 66′ seu 1° 6′ atque hinc nulla erit eclipsis ☽. si latitudo ejus vera major fuerit 1° 6′. Jam cum angulus N ab eodem *Keplero* (b) supponatur 5° 18′; erit

Log. Sin. N	8965 5337
Sin. MO	8283 2433
Sin. tot.	100000000

Log. Sin. NO 93177096, cui in tabulis respondent 11° 59′ 50″, hoc est, fere 12°.

Si adeo distantia Lunæ a ☊ fuerit major quam 12°, nulla contingere potest eclipsis. Similiter juxta *Keplerum* semidiameter umbræ in ☉ perigæo & ☽ apogæa est 43′ 50″, semidiameter ☽ apogææ 15′, adeoque LH 58′ 50″, atque hinc necessario erit eclipsis, si latitudo ☽ vera non excedat 58′ 50″. In hoc vero casu reperitur ut ante argumentum latitudinis 10° 40″.

DEFINITIO 74.

945. *Arcus inter centra* est arcus AI ex centro umbræ A in orbitam ☽ OB perpendicularis. Tab. IX. Fig. 88.

PROBLEMA 72.

946. *Data Lunæ latitudine vera* AL *ad tempus oppositionis veræ una cum angulo ad nodum* B, *invenire arcum inter centra* AI & *arcum* IL.

RESOLUTIO.

Cum in triangulo sphærico AIL ad I rectangulo detur latus AL, & angulus ALI, nempe ipsius LAI seu B complementum ad rectum; reperietur arcus inter centra AI (§. 118 *Sphæric.*).

E. gr. Sit AL 43′ 25″ ALI 84° 37′; erit

Log. Sin. tot.	100000000
Sin. LA	81013702
Sin. ALI	99980802

Sin. AI 180994504, cui in tabulis respondent 43′ 14″ seu 2594″.

Quo-

(a) Epit. lib. 6. p. 862.
(b) in Rudolph. c. 31 f. 99.

Quoniam angulus LAI ipsi B æqualis, cum uterque cum IAB faciat rectum, & præterea detur latitudo ☽ AL; reperietur arcus LI (§. 118 *Sphær.*).

E. gr. Sit AL 43′ 25″ 7 angulus B seu LAI 5° 23′; erit

Log. Sin. tot.	100000000
Sin. AL	81013702
Sin. LAI	89722894

Sin. LI 170736596, cui in tabulis respondent 4′ 5″ seu 245″.

SCHOLION.

947. *Quoniam latera* LA, AI & LI *exigua sunt, erunt eadem ut eorum sinus, adeoque inveniri quoque potest* AI *inferendo:* ut sinus totus ad sinum anguli LAI ita AL ad LI & ut sinus totus ad sinum anguli ALI ita AL ad AI.

COROLLARIUM.

948. Si summa ex arcu inter centra AI & semidiametro Lunæ apparente sit æqualis semidiametro umbræ; eclipsis est totalis sine mora: si minor, totalis cum mora: si denique major, attamen minor summa ex semidiametris Lunæ & umbræ, partialis (§. 937).

DEFINITIO 75.

Tab. IX. Fig. 88. 949. *Scrupula defectus* sunt pars semidiametri lunaris MK, quæ umbram ingreditur, in istiusmodi scrupulis, quibus exprimitur diameter ☽ apparens HK.

DEFINITIO 76.

950. *Digiti ecliptici* sunt partes duodecimæ diametri Lunaris, quæ obscurantur. Dividuntur singulæ in minuta 60.

PROBLEMA 73.

951. *Datis diametro Lunæ apparente* KH, *semidiametro umbræ* AM *&* arcu inter centra AI, *invenire scrupula defectus* KM *&* *quantitatem eclipsis determinare.* Tab. IX. Fig. 88.

RESOLUTIO.

1. Semidiameter ☽ IK addatur semidiametro umbræ AM, erit AM + IK = AI + IM + IK = AI + MK.
2. Ex hac igitur summa subtrahatur arcus inter centra AI, relinquentur scrupula defectus MK.
3. Hinc fiat: ut diameter ☽ KH ad scrupula defectus MK, ita 12 ad digitos eclipticos.

E. gr. Sit KH 30′ 44″, adeoque IK 15′ 22″, AM 41′ 13″, AI 43′ 14″: erit

Semi-

Semidiameter ☽	15′	22
umbræ	41	13
Summa	56	35
Arcus inter centra	43	14
Scrupula defectus	13	21 ∫. 801″

Fiat ergo: 1844 : 801 = 12
h. e. 461 3 3

2403 } $5\frac{98}{461}$ dig.
2305 } f. 5. dig. 13′

98

Calculus facilior, si logarithmis utaris.

DEFINITIO 77.

Tab. IX. Fig. 88. 952. *Scrupula durationis dimidiæ* sunt arcus orbitæ lunaris, quem centrum Lunæ describit ab initio eclipsis usque ad medium, vel a medio usque ad finem NI vel IO.

DEFINITIO 78.

Tab. IX. Fig. 89. 953. *Scrupula dimidiæ moræ* sunt arcus orbitæ lunaris, SI vel IT: quem centrum Lunæ describit intra dimidiam moram obscurationis totalis.

DEFINITIO 79.

Tab. IX. Fig. 89. 954. *Scrupula incidentiæ* seu *casus* sunt arcus orbitæ lunaris SN, quem centrum Lunæ describit ab initio eclipsis usque ad momentum, quo tota in umbram incidit.

DEFINITIO 80.

955. *Scrupula emersionis* sunt arcus orbitæ IR, quem centrum Lunæ percurrit ab eo momento, quo ☾ ex umbra telluris emergit usque ad finem eclipsis.

PROBLEMA 74.

656. *Datis arcu inter centra* AI *& semidiametris umbræ* AP, *atque Lunæ* PN, *invenire scrupula dimidiæ durationis* IN. Tab. IX. Fig. 88.

RESOLUTIO.

1. Semidiametri umbræ AP & Lunæ PN conjiciantur in unam summam, ut prodeat AN.
2. A quadrato AN subtrahatur quadratum AI, residuum est quadratum IN (∫. 417. *Geom.*).
3. Ex hoc adeo residuo extrahatur radix, quæ erit arcus IN quæsitus.

Aliter.

Quodsi logarithmis uti volueris.

1. Addantur AN & IA, ut habeatur summa AN + IA, iidemque arcus a se invicem subtrahantur, ut habeatur residuum AN − IA.
2. Logarithmi AN + IA atque AN − IA conjiciantur in unam summam.
3. Summa hæc dividatur bifariam:

-am: ita prodibit logarithmus scrupulorum durationis dimidiæ IN.

E. gr. Sit AP 41′ 13″ seu 2473″, PN 15′ 22″ seu 922″ adeoque AP + PN = AN = 3395″. Sit porro arcus inter centra AI 2594″: erit

AN	3395	AN	3395
AI	2594	AI	2594
AN + AI	5989	AN − AI	801
Log. AN + AI	37773543		
AN − AI	29036325		
Summa	66809868		

Log. IN 33404934, cui in tabulis respondent 2190″.

DEMONSTRATIO.

Rectangulum ex AN + AI in AN − AI est æquale differentiæ quadratorum ex AN & ex AI (§. 86 *Analys. finit.*), hoc est, quadrato IN (§. 417 *Geom.*). Ergo summa logarithmorum AN + AI & AN − AI est logarithmus quadrati IN (§. 337 *Arithm.*). consequenter ejus dimidium est logarithmus ipsius IN (§. 341 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 75.

Tab. IX. Fig. 89. 957. *Iisdem datis, invenire in eclipsi totali cum mora scrupula dimidiæ moræ IS.*

RESOLUTIO.

1. Semidiameter ☽ SV subducatur ex semidiametro umbræ AV, ut relinquatur AS.
2. Datis adeo in triangulo, AIS ad I rectangulo, arcu AS modo invento & arcu inter centra AI, invenitur IS ut in problemate præcedenti (§. 956).

COROLLARIUM

958. Quodsi ex scrupulis durationis dimidiæ IN subtrahantur scrupula moræ dimidiæ IS, relinquuntur scrupula incidentiæ SN, quibus scrupula emersionis TR æqualia.

PROBLEMA 76.

959. *Ad datum quodcunque tempus invenire ætatem ☽ mediam & novilunium atque plenilunium medium pro dato mense.*

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus supputentur locus Solis & locus Lunæ medius (§. 672. 827).
2. Locus Solis a loco Lunæ auferatur (aucto, si opus fuerit, integro circulo); residuum est elongatio ☽ media a Sole.
3. Elongatio ☽ a ☉ media inventa dividatur per elongationem diurnam mediam a ☉ (quæ est differentia inter motum medium diurnum ☉ & motum medium diurnum ☽); quotus est media ☽ ætas, hoc est, tempus a novilunio proximo præterlapsum.

4. Quodsi hoc tempus ex tempore dato subducas, relinquitur tempus novilunii medii proxime præterlapsi medium.

5. Et si ulterius addas semissem mensis synodici, summa erit tempus plenilunii medii medium; integrum si addas, tempus medium novilunii proxime futuri.

E. gr. Quæritur ætas ☽ media d. 15 Sept. A. 1708. & tempus medium cum novilunii, tum plenilunii medii ejusdem mensis. Erit per Tabulas Cel. *de la Hire*

Loc. ☉ med.	5 S. 24° 29′ 7″
Æquat. tempor. subtr.	23
9′ 14″	
Loc. ☉ med. temp. med.	5 S. 24. 28. 44
Loc. ☽ med.	6 S. 1. 49. 30
Elong. ☽ a ☉	0 S. 7. 20. 46 seu 26446″
Mot. ☽ diurn.	13. 10. 35
Mot. ☉ diurn.	59. 8
Mot. ☽ a ☉	12. 11. 27 seu 43887″.

Inferatur: ut 43887″ ad 86400 scrupula horaria (hoc est, 24 horas) ita 26446 ad ætatem ☽ mediam 52064″ seu 14 h. 27′ 44″.

Ergo A. 1708. d. 14. Sept. 23. h. 50′ 46″		
Ætas ☽ med.	14. h. 27	44
Novil. med. d. 14. Sept.	9 h. 23	2
Semiss. mens. 14 d.	18 h. 22	2
Synod.		
Plenilun. med. d. 29 Sept.	3 h. 45	4

post meridiem in Meridiano Parisino, tempore medio.

COROLLARIUM I.

960. Quodsi eodem modo quæsiveris ætatem ☽ mediam tempore medio diei primæ Januarii A. 1700. styli novi, aut alterius cujuscunque; prodibit epocha noviluniorum mediorum, quales exhibent Tabularum conditores.

COROLLARIUM 2.

961. Quodsi ab epocha novilunii subtrahas semissem mensis synodici, relinquitur epocha pleniluniorum ad idem tempus, seu tempus medium a plenilunio medio proxime præcedente elapsum.

E. gr. A. 1700 stylo novo fuit

Epoch. Novilun.	21 d.	13 h.	5′	34″
Semiss. mens.	14 d.	18	22	1
Epoch. Plenilun.	6 d.	18 h.	43	33

SCHOLION.

962. *Ut novilunia & plenilunia media facilius inveniantur, conditores Tabularum construere solent Tabulas epactarum eo, qui sequitur, modo.*

DEFINITIO 81.

963. *Epactæ* sunt excessus mensis solaris supra mensem synodicum & anni solaris super 12. menses synodicos, vel etiam plurium mensium solarium super totidem synodicos & plurium annorum super totidem menses synodicos duodecies sumtos.

SCHO-

SCHOLION.

964. *In præsenti negotio assumimus menses Julianos, qualibus in Calendariis nostris utimur, & annos itidem Julianos 365 dierum: quia ad tales annos & menses constructæ sunt tabulæ Astronomicæ.*

PROBLEMA 77.

965. ***Invenire epactam cujuslibet mensis per annum integrum & unius duorum, trium &c. pluriumve annorum, data quantitate mensis synodici.***

RESOLUTIO.

1. Quantitas mensis synodici sibi ipsi addatur, & aggregato eadem denuo adjiciatur, atque ita porro, ut constet quantitas, duorum, trium, pluriumve mensium synodicorum.

2. A quantitate mensis Januarii seu 31 diebus subtrahatur mensis synodicus unus, relinquetur epacta Januarii (§. 963). Et generaliter a diebus ab initio anni elapsis subtrahantur integri menses synodici interea elapsi *vi num.* 1. quod relinquitur est epacta ejus mensis.

3. Cum epacta duodecim mensium sit epacta unius anni, si eidem addas numerum dierum unius, duorum, trium &c. annorum & inde auferas ut ante integros menses synodicos, qui in aggregato continentur; residua fient epactæ duorum, trium, pluriumve annorum.

E. gr. Januarius	d. 30	h. 23.	59'	60''
Mens. Synod.	d. 29	h. 12.	44	3
Epacta Januarii	d. 1	h. 11.	15	57
Annus Julian.	d. 364	h. 23.	59	60
12. Mens. Synod.	d. 354	h. 8.	48	38
Epacta Anni 1.	d. 10	h. 15.	11	22

COROLLARIUM 1.

966. Quodsi radici noviluniorum addantur epactæ annorum & mensium datorum una cum diebus ac horis atque scrupulis horariis datis & a summa subducantur menses synodici integri; relinquitur ætas media ☽ ad tempus datum. E. gr. quæratur ætas media ☽ A. 1708 d. 14 Sept. h. 23. 50' 46' tempore medio: erit

Radix 1700	21 d.	13 h.	5'	34'
A 7.	16	8	51	31
Aug. complet.	6	18	7	35
Tempus datum	14	23	50	46
Summa	59	15	55	26
2 Mens. synod.	59	1	28	6
ætas ☽ media		14 h	27	20

COROLLARIUM 2.

967. Cum ex ætate Lunæ media tempus novilunii medii dato mense erui possit (§. 959); ratio per epactas inveniendi novilunia & plenilunia media manifesta est.

PROBLEMA 78.

968. *Invenire motum Lunæ & Solis horarium verum ad tempus datum.*

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus medium & diem proxime præcedentem supputentur loca Solis atque Lunæ (§ 720. 863).
2. Loca Solis, itemque Lunæ, a se invicem subtrahantur.
3. Residua per 24 dividantur: quoti erunt motus horarius Solis atque Lunæ.

Aliter.

1. Ad datum tempus quæratur æquatio Solis, una cum æquatione, quæ anomaliæ uno gradu majori respondet.
2. Fiat: ut 60 ad motum horarium medium 2′ 28″ seu incrementum horarium anomaliæ Solis, hoc est, ut 900 ad 37, ita differentia æquationum modo repertarum ad differentiam motus horarii & medii Solis.
3. Quodsi ergo hæc differentia a motu horario medio ⊙ subtrahatur, quamdiu anomalia 93° minor est, eidem vero addatur, si hæc major 93° fuerit; prodibit motus horarius Solis verus.

E. gr. Si anomalia ⊙ fuerit 30°, æquatio 56′ 31″; si 31′, æquatio 58′ 14″, adeoque differentia 1′ 43″ seu 103″. Fiat ut 900 ad 37 ita 103″ ad 4″, quæ ex 2′ 28″ subducta relinquunt motum Solis horarium verum 2′ 24″.

Similiter quia anomalia vera a media differt una hora ante vel post copulam mediam, per motum horarium medium & æquationem centri, hoc est, per 41′ 49″. si loco rationis 60′ ad 2′ 28″, assumatur ratio 60′ ad 41′ 49″, reperietur ut ante differentia inter motum Lunæ horarium medium & verum, subtrahenda e motu medio horario Lunæ 32′ 56″, si anomalia minor 95°, addenda, si major.

Quodsi differentia æquationum compositarum utaris, eodem modo reperitur horarius Lunæ verus extra copulas.

SCHOLION.

969. *Per hanc regulam a* Regiomontano (c) *traditam construi solent ad singulos anomaliæ veræ gradus* tabulæ motuum horariorum verorum Solis & Lunæ.

PROBLEMA 79.

970. *Dato tempore novilunii vel plenilunii medii invenire tempus veri.*

RE-

(c) in Epit. Almag. lib. 6, prop. 4.

RESOLUTIO.

1. Ad tempus novilunii medii ſupputetur locus Solis verus & locus ☽ verus in copulis, una cum utriusque anomalia vera (§. 720. 863).
2. Quærantur porro motus horarii veri Solis atque Lunæ ad idem tempus (§. 968).
3. Locus Lunæ a loco Solis vel contra (minor nempe à majore) auferatur, ut relinquatur diſtantia Lunæ a copula.
4. Motus horarius verus Solis ab horario Lunæ vero ſubducatur, ut relinquatur horarius verus Lunæ a Sole.
5. Fiat: ut horarius Lunæ a Sole verus ad horam unam ſeu 3600″ ita diſtantia Lunæ a copula ad differentiam temporis copulæ mediæ a tempore copulæ veræ.
6. Differentia hæc addatur tempori copulæ mediæ, ſi locus Lunæ minor loco Solis; dematur, ſi major fuerit: ita prodibit tempus ſyzygiæ veræ, raro tamen exactum.
7. Quærantur adeo denuo ad hoc tempus locus Solis verus & locus Lunæ verus (§. 720. 863) cum motibus horariis veris utriusque luminaris (§. 968) & ſi loca Lunæ ac Solis differunt, differentia temporis antea reperti a tempore exacto ſyzygiæ veræ reperiatur ut ante.
8. Hæc operatio tamdiu repetenda, donec differentia temporis inventa non exceſſerit 5″: tum enim locus Solis repertus erit locus utriusque luminaris in copula.
9. Dato loco Solis ad tempus ſyzygiæ veræ inveniatur æquatio temporis (§. 715), quæ ei addita vel demta producet tempus verum ſyzygiæ veræ.

E. gr. A. 1708 plenilunium medium contigit d. 29. Sept. 3 h. 45′ 4″ poſt meridiem: quæritur tempus veri.

Per tabulas *Cel. de la Hire* tum erat

Loc. ☉ verus	6S. 6° 30′ 38″
Loc. ☽ ad eclipt. reductus	0S. 3 50 9
Diſt. ☽ ab ☍ ☉	2 40 29 ſ. 9629″
Hor. ☽	32 17
Hor. ☉	2 28
Differ.	29 49
Reduct. ſubtr.	8
Hor. ☽ a ☉	29 41 ſ. 1781″

Fiat: ut 1781″ ad 3600″ ita 9629″ ad 19463″ ſeu 5 h. 24′ 23″

Plen. med.	3 h. 45 4
Plen. ver.	9 h. 9′ 27

Erat tum per easdem tabulas

Loc.☉ verus 6S.6° 43′ 57″

Loc.☽ in Ecl. oS.6 43 52

Dist. ☽ ab ☍☉ 5

Hor. ☽ a ☉ 25′ 30″ f. 1770″.

Fiat: ut 1770″ ad 3600 ita 5″ ad 10″.

Ergo tempus plenilunii veri 9 h. 9′ 37″. Ad hoc tempus reperitur

Loc. ☉ verus 6S. 6° 43′ 57″

Loc. ☽ in eclipt. oS. 6 43 55

Dist. ☽ ab ☍☉ 2,

unde ut ante elicitur tempus a copula deficiens 4″. Est itaque

Temp. plenilunii veri	9h.	9′	39″
Æquat. temp. add.		14	10
Tempus appar. plen. veri	9h.	23	49″

Celebrata igitur est copula vera ☉ & ☽ A. 1708 d. 29 Sept. 9 h. 23′ 49″ post meridiem in meridiano Parisino tempore apparente.

PROBLEMA 80.

Tab. IX. Fig. 88. 971. *Datis scrupulis dimidiæ durationis* IN, *una cum tempore apparente plenilunii veri & horario* ☽ *a* ☉ *arcuque* LI; *invenire medium, initium ac finem eclipsis lunaris & durationem ejus definire.*

RESOLUTIO.

1. Fiat: ut Horarius Lunæ a Sole verus ad 3600 scrupula secunda horaria, ita scrupula arcus LI ad scrupula horaria eidem æquivalentia.

2. Hæc scrupula in primo & tertio quadrante anomaliæ a tempore plenilunii veri subtrahantur, in secundo & quarto addantur, ut prodeat tempus eclipsis mediæ.

3. Fiat; ut motus horarius Lunæ a Sole verus ad scrupula horaria secunda 3600 ita scrupula dimidiæ durationis IN ad tempus durationis dimidiæ: cujus adeo duplum integram durationem definit.

4. Tempus dimidiæ durationis a tempore eclipsis mediæ subtrahatur, residuum erit eclipsis initium: idem eidem addatur, aggregatum erit finis ejus.

E. gr. LI = 4′ 5″ = 245″, IN 2190″, tempus plenilunii veri h. 9. 23′ 49″, horarius Lunæ a Sole verus 30′. 12″ seu 1812″: erit

Log. Hor. ☽ a ☉	3 2 5 8 1 5 8 1
Log. 3600	3 5 5 6 3 0 2 5
Log. LI	2 3 8 9 1 6 6 0
	5 9 4 5 4 6 8 5

Log. temp. quæs. 2 6 8 7 3 1 0 4, cui in tabulis quam proxime respondent 486″ seu 8′ 6″

Temp. plenil. veri	h. 9	23′	49″
Tempus eclipf. mediæ	h. 9	15	43

Log.

Log. Hor. ☽ a ☉	32581581
Log. 3600	35563025
Log. IN	33404934
	68967959

Log. dur. dimid. 36386378,
cui in tabulis respondent 4551''
f. 1 h. 12' 31''

Duratio eclipsis	2 h.	25	2
Tempus eclips. med.	h. 9	15'	43''
Duratio dimid. subtr.	h. 1	12	31
Initium eclips.	h. 8	3	12
Tempus eclips. med.	h. 9	15	43
Durat. dimid. add.	h. 1	12	31
Finis eclipsis	h. 10	28	14

PROBLEMA 81.

972. *Datis semidiametris Lunæ atque Solis apparentibus in apogæo, invenire easdem in quocunque alio anomaliæ gradu.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur ratio distantiæ in dato anomaliæ gradu ad distantiam apogæam (§. 685).
2. Cum semidiametri apparentes sint ut distantiæ reciproce (§. 212 *Optic.*); reperientur eædem ope regulæ trium (§. 102 *Arithm.*).

SCHOLION.

973. *Hoc modo conduntur* Tabulæ semidiametrorum apparentium Solis & Lunæ *ad quinos anomaliæ gradus.*

PROBLEMA 82.

974. *Eclipsin Lunæ supputare.*

RESOLUTIO.

1. Ad tempus plenilunii medii (§. 959) datum supputetur distantia a Nodo, ut constet, utrum illud sit eclipticum, nec ne (§. 944).
2. Supputetur ulterius tempus plenilunii veri cum loco Solis vero & Lunæ ad eclipticam reducto (§. 970).
3. Ad momentum plenilunii veri supputetur latitudo Lunæ vera (§. 880) & utriusque luminaris a terra distantia (§. 889) cum parallaxibus horizontalibus (§. 387) & semidiametris apparentibus (§. 972).
4. Ad idem momentum inveniatur horarius Lunæ verus & horarius Solis verus (§. 968).
5. Hinc porro investigetur semidiameter umbræ apparens AP (§. 941) & Tab. IX. Fig. 88.
6. Arcus inter centra AI cum arcu LI (§. 946).
7. Supputentur scrupula dimidiæ durationis IN (§. 956) & inde.

8. Du-

8. Duratio, initium, medium ac finis eclipſis definiatur (§. 971).
9. Quærantur tandem ſcrupula defectus & inde quantitas eclipſis determinetur (§. 951).

E. gr. A. 1708 plenilunium medium contigit d. 29 Sept. 3 h. 45′ 4″ poſt meridiem. Erat tum diſtantia ☽ a ☊ 0 S. 5° 22′ 36″ juxta Tabulas *Cel. de la Hire.* Eſt ergo plenilunium eclipticum (§. 944). Ad illud vero tempus reperimus

Plenilunium verum	h. 9	23′	49″
Locum ☉ verum	6S. 6°	43′	47″
Loc. ☽ in ecliptica	6S. 6	43	47
Latit. ☽ veram bor.		43	25
Parallaxin horizont. ☉			6
☽		56	18
Semid. apparent. ☉		16	5
☽		15	22
Horar. verum ☽ a ☉		30	12
Semid. umbræ		41	13
Arcum inter centra		43	14
LI		4	5
Scrupula dimidiæ durationis		36	39
Scrupula defectus		13	21
Durationem eclipſis	2 h.	25	2
Initium	8	3	12
Medium	9	15	43
Finem	10	28	14
Quantitatem	5 dig.	13′	

SCHOLION.

975. *Ad calculum eclipſium abſolvendum utendum eſt tabulis, quarum conſtructio ex antecedentibus manifeſta: ubi autem tabulæ deficiunt, ſupputatio fit per problemata a nobis expoſita. Moleſtiſſima in toto calculo eſt plenilunii veri inventio, unde tamen reliqua omnia pendent. Illo dato reliqua nihil tædii habent.*

PROBLEMA 83.

976. *Datis ſemidiametris Lunæ & umbræ terræ, una cum latitudine ad initium & finem eclipſis, typum eclipſis lunaris in plano deſcribere.* Tab. IX. Fig. 90.

RESOLUTIO.

1. Deſignet CD eclipticam, ſitque in A centrum umbræ: per quod agatur recta GQ ad DC perpendicularis. Supponatur in D oriens, in C occidens, in Q meridies, in G ſeptentrio.
2. Ex A intervallo aggregati AN ex ſemidiametro umbræ AP & ſemidiametro Lunæ PN deſcribatur circulus DGCQ & intervallo ſemidiametri umbræ ſolius AP alius concentricus EMFR, qui ſectionem umbræ in tranſitu Lunæ exhibebit.
3. Fiat AL æqualis latitudini Lunæ ad initium eclipſis & in L erigatur perpendicularis LN occurrens peripheriæ majori in N verſus occidentem: erit ergo in N centrum Lunæ initio eclipſis.

4. Si-

4. Similiter fiat AS æqualis latitudini Lunæ ad finem eclipsis & in S erigatur perpendicularis OS, quæ cum ipsi DC parallela (§. 256 *Geom.*) distantiam ab ea non mutet (§. 81 *Geom.*), erit in O centrum Lunæ in fine eclipsis.

5. Connectantur puncta O & N recta: erit ON arcus orbitæ, quem centrum Lunæ durante obscuratione percurrit.

6. Ex O & N intervallo semidiametri Lunaris describantur circuli PV & TX, quæ Lunam in initio ac fine eclipsis exhibebunt.

7. Denique ex A demittatur ad ON perpendicularis AI; erit in I centrum Lunæ in media obscuratione. Quare si

8. Ex I intervallo semidiametri lunaris circulus HK describatur, repræsentabit is Lunam in obscuratione maxima & quantitatem eclipsis definiet.

PROBLEMA 84.

977. *Eclipsin Lunæ observare.*

RESOLUTIO.

1. Horologium oscillatorium ad motum Solis componatur (§. 125) aut ejus motus ex observatis stellarum altitudinibus aut altitudine Solis diurna rectificetur (§. 299).

2. Tubus micrometro exquisito (*Wolfii Math. Tom. 3.*) instructus convertatur in Lunam & notetur ope horologii oscillatorii tempus, quo peripheria lunaris rotunditatem amittere incipit, umbra instar ungulæ limbum ☽ orientalem delibante: ut constet initium obscurationis.

3. Notentur similiter tempora, quibus sectio umbræ transit per maculas lunares ex selenographia cognitas (§. 918).

4. Eodem modo notetur tempus, quo umbra lunam deserit, ut constet finis eclipsis: a quo si subtrahatur initium, relinquetur duratio integra, ejusque dimidium exhibebit tempus mediæ obscurationis.

5. Ope micrometri definiatur quantitas diametri obscurata (§. 547).

SCHOLION.

978. *Placet hic exhibere ex literis admodum* R. P. Heinrich *in Academia Leopoldina Theologiæ moralis & Mathematum Professoris die 15 Febr. A. 1712 ad me datis peculiare micrometri genus, quod ad observandos digitos lunæ obscuratæ felicissime invenit & ad usum transtulit. Ita autem ille:* „Pro discernenda obscurationis „magnitudine adhibui, *inquit*, mi„crometrum extemporaneum & fa„cillime parabile. Describsi in te„nui folio vitri Moscowitici acus

 „cuspi-

„ cuspide tredecim parallelas ad æ„ qualia duodecim intervalla in „ charta suppolita accurate prius de„ signata, quæ omnia simul sum„ ta diametrum Lunæ non adæ„ quabant, quemadmodum in te„ lescopio exploravi per aliud simi„ le folium eidem, ut mos est, in„ sertum. Pro justa autem diame„ tri lunaris mensura obtinenda per „ folium parallelis distinctum & te„ lescopio rescissis superfluis inser„ tum extendi capillum transver„ sum, utrinque limbo fistulæ tele„ scopii affixum ejusque longitudi„ nem a parallelis interceptam sæ„ pius cum luna contuli & una cum „ obliquitate eo usque mutavi, do„ nec diametrum lunarem perfecte „ adæquaret. Quo casu simul ex„ hibuit desideratam in 12 digitos „ divisionem, juxta quam lunæ ap„ plicatam de partis inumbratæ „ quantitate judicium tuli, quan„ tum in ejusmodi eclipsibus aliquo „ usque dubia, ut semper esse so„ lent, lucis & umbræ confinia pati„ untur. Dicta obliquitatis & longi„ tudinis interceptæ mutatio reddi „ facilior potest, & primo statim a„ spectu continuato justa quam citis„ sime obtineri, si duplicata fistula „ adhibeatur, unique foliolum pa„ rallelogrammi, alteri capillus affi„ gatur: sic enim seorsim poterunt „ moveri, donec lunæ congruant. „ Insuper ut constet, quænam obli„ quitas ac longitudo in aliqua ob„ servatione adhibita fuerit eadem„ que alio tempore repeti, vel cum „ alia comparari, vel etiam pro ex„ ploranda siderum distantia adhi„ beri queat, poterit exterius in su„ perficie fistularum earundem situs „ notari per certa signa, etiam facta, „ si placuerit, regulari totius circuli „ divisione. Quæ omnia & plura „ alia commoda per experientiam „ deinceps deprehendenda, nec fi„ stularum in telescopio perforatio„ ne, nec laminarum artificiosa con„ nexione, nec difficillime per ad„ amantem practicabili circulorum „ adeo parvulorum descriptione in„ digent, ut facile patet conside„ ranti.

PROBLEMA 85.

979. *Initio vel fine eclipseos lunaris aut iisdem phasibus quibuscunque in diversis locis terræ observatis invenire differentiam horariam meridianorum.*

RESOLUTIO.

Cum in singulis observationum locis horæ earumque scrupula numerentur ab appulsu centri *Solis* ad meridianum, Sol vero ad meridianum occidentaliorem tardius appellat prætereaque eædem phases eclipsium lunarium eodem articulo temporis physico ubique terrarum contingant (§. 937); non alia re opus est quam ut tempora, quibus eædem ejusdem eclipsis phases diversis in locis observatæ,

a se

a se invicem subtrahantur, residuum enim est differentia meridianorum quæsita indicatque horarum numerus major locum orientaliorem.

E. gr. A. 1701 d. 22 Febr. initium eclipsis observatum est Parisiis h. 10. 15′ 23″, Berolini h. 10. 59′ 36″. Est ergo differentia meridianorum 44′ 13″, hoc est, Berolini 44′ 13″ citius Sol meridianum attingit quam Parisiis.

SCHOLION.

980. *Hoc artificio constructæ sunt* Tabulæ differentiarum horariarum meridianorum: *nostro tamen tempore utuntur etiam eclipsibus satellitum Jovis, ob earum præsertim frequentiam.*

COROLLARIUM.

981. Quodsi eclipsis initium, medium ac finis ad meridianum tabularum fuerint computata; differentia meridianorum addita, vel subducta, eadem momenta definientur in aliis meridianis orientalioribus & occidentalioribus. E. gr. in nostro casu in meridiano observatorii regii Parisini initium eclipsis fuit h. 8. 3′ 12″, medium h. 9. 15′ 43″, finis h. 10. 28′ 14″ (§. 972); fuit ergo Berolini initium h. 8. 47′ 25″, medium h. 9. 59′ 56″, finis h. 11. 12′ 38″.

DEFINITIO 81.

982. *Eclipsis Solis* est occultatio Solis facta per interpositionem diametralem Lunæ inter Solem ac terram. Distinguitur æque ac lunaris (§. 937) in *totalem* & *partialem*.

SCHOLION.

983. *Veritas definitionis patet ex superioribus* (§. 452) *& mox adhuc evidentius patebit.*

COROLLARIUM 1.

984. Quia Luna parallaxin altitudinis (§. 887), adeoque & latitudinis (§. 372. 377) sensibilem habet; eclipsis solaris accidit, quando latitudo Lunæ ex terris visa minor est aggregato semidiametrorum apparentium Solis ac Lunæ.

COROLLARIUM 2.

985. Eclipsis adeo contingit, Luna Soli vel in nodis, vel prope nodos juncta (§. 765).

COROLLARIUM 3.

986. Unde eclipsis Solis, quæ Christo patiente accidit in ipso plenilunio, præternaturalis fuit, quippe in oppositione facta.

DEFINITIO 82.

987. *Latitudo Lunæ visa* est, qualis ex terra ob parallaxin spectatur; seu distantia loci visi ab ecliptica.

COROLLARIUM.

988. Invenitur adeo, si ex latitudine boreali parallaxis latitudinis subtrahatur; australi vero addatur (§. 372).

DEFINITIO 83.

989. ***Longitudo Lunæ visa*** est, qualis ex terra ob parallaxin spectatur, seu arcus eclipticæ inter locum opticum visum & o ♈ interceptus.

COROLLARIUM.

990. Invenitur adeo, si longitudini veræ parallaxis longitudinis in parte cœli orientali addatur, in occidentali demátur (§. 372.).

DEFINITIO 84.

991. ***Parallaxis Lunæ a Sole*** est excessus parallaxeos Lunæ supra parallaxin Solis.

COROLLARIUM.

992. Cum parallaxis Solis diurna juxta *Cl. de la Hire* sit fere insensibilis (§. 869); parallaxis Lunæ a Sole vix differt a parallaxi Lunæ.

SCHOLION.

993. *Juxta aliorum tamen hypotheses parallaxis Solis sensibilis, qui eam e. gr. cum* Keplero *integro scrupulo primo æqualem constituunt.*

DEFINITIO 85.

994. ***Horarius Lunæ a Sole visus*** est arcus eclipticæ, quo locus Lunæ visus intervallo unius horæ a loco Solis removetur.

PROBLEMA 86.

995. ***Terminos eclipseos solaris determinare.***

RESOLUTIO.

Si lunæ parallaxis esset insensibilis, termini eclipseos solaris eodem modo determinarentur, quo supra lunares constituuntur (§. 944) sed quia parallaxis sensibilis est, paulo aliter procedendum. Nimirum

1. Colligantur in unam summam semidiametri apparentes luminarium tum apogææ, quam perigææ.
2. Quia parallaxis minuit latitudinem borealem (§. 372); aggregato priori addatur parallaxis latitudinis maxima, quæ esse potest; quia vero eadem latitudinem australem auget (§. *cit.*) eidem aggregato posteriori dematur parallaxis latitudinis maxima, ita in utroque casu prodibit latitudo vera, ultra quam eclipses contingere nequeunt.
3. Data hac latitudine invenietur distantia Lunæ a Nodo, ultra quam eclipses accidere nequeunt, ut supra (§. 944).

SCHOLION.

996. *Quoniam diversi autores diversas de diametris apparentibus luminarium & parallaxi latitudinis maxima hypotheses sequuntur, ideo non eosdem definiunt terminos eclipsium solarium. Sane* Ptolemæo *terminus possibilis est distan-*

distantia a nodo 19° 25′, Copernico 19° 12′, Tychoni 18° 25′, Keplero 17° 16′. Ricciolo 18° 49′: *sed necessarius alicubi* Ptolomæo *distantia a nodo* 16° 42′, Copernico 16° 25′, Tychoni 17° 9′, Keplero 15° 55′, Ricciolo 15° 58′.

PROBLEMA 87.

997. *Data longitudine & latitudine Lunæ vera una cum loco Solis vero, invenire longitudinem & latitudinem visam ad tempus datum in loco dato.*

RESOLUTIO.

1. Ex data longitudine & latitudine Lunæ quæratur ejus declinatio & ascensio recta (§. 260).
2. Inde porro eruatur ipsius altitudo sub elevatione loci dati (§. 300).
3. Quæratur ad tempus idem distantia ejus a terra (§. 903) & parallaxi horizontalis (§. 387).
4. Hinc invenietur parallaxis altitudinis modo repertæ (§. 381).
5. Ex dato loco Solis vero supputetur sub elevatione poli data ad tempus datum punctum eclipticæ oriens & nonagesimus eclipticæ atque angulus orientis seu altitudo nonagesimi (§. 218).
6. His cognitis reperietur parallaxis longitudinis & latitudinis (§. 391), tandemque
7. longitudo ac latitudo Lunæ visa (§. 372).

Aliter.

Quoniam inventio parallaxeos altitudinis perquam molestum calculum reddit, ideo *Keplerus* calculum non parum abbreviare docuit, regula tradita, qua sine parallaxeos altitudinis inventione, parallaxes longitudinis & latitudinis eruuntur ex datis parallaxi Lunæ horizontali a Sole, distantia Solis a nonagesimo & angulo orientis. Quæratur ergo

1. ut ante angulus orientis, parallaxis horizontalis & nonagesimus: a quo si subducatur locus Solis datus, prodibit distantia ejus a nonagesimo.
2. Addantur in unam summam logarithmi sinuum anguli orientis & distantiæ Solis a nonagesimo atque logarithmus parallaxeos horizontalis Lunæ a Sole.
3. A summa subtrahatur duplum sinus totius: quod relinquitur, est logarithmus parallaxeos longitudinis.
4. Similiter si logarithmus sinus anguli orientis seu altitudinis nonagesimi & logarithmus parallaxeos horizontalis Lunæ a Sole colligantur in unam summam & ab ea subducatur logarithmus

finus totius: qui relinquitur, eft logarithmus parallaxeos latitudinis.

5. Datis autem parallaxibus longitudinis & latitudinis, longitudines & latitudines vifæ reperientur ut ante (§. 372).

E. gr. Juxta *Wingium* (d) conjunctio luminarium Londini contigit A. 1661 d. 19 Martii h. 21. 41′ 3″ tempore apparente, fuitque verus locus Solis & Lunæ ♈ 10° 13′ 48″, parallaxis horizontalis ☽ a ☉ 58′ 6″, latitudo vera borealis defcendens 34′ 49″ altitudo denique æquatoris 38° 28′. Quare

Log. Cof. Obl. Eclipt.	199624527
Cotang. Long. ☉	107435973
Tang. Afc. rect. ☉	92188554,

cui in canone refpondent 9° 23′ 55″

Tab. XI. Fig. 91.

Temp. app. ☌	h. 21	41	3 fubtr.
	h. 24 f. 23	59	60
Temp. ad mer. ref.	2	18	57.
	h. 2	30°	
	18′	4	30′
	57″	14	15″
AD	34	44	15
AO	89	59	60
DO	55	15	45
Afc. recta ☉ GD	9	23	55
Afc. obl. Or. GD	64	39	40

Log. Cofin. GO	96314147
Cotang. O	100999134
Cotang. NGO	95315013,

cui in canone refpondent 18° 46′ 44″

Ergo NGO	71	13	16	
MGO	23	29		(§. 168)
MGN	94	42	16	

Log. Cof. MGN	89138975
Cot. GO	96753461
Summa	185892436
Cof. NGO	95077436
Cotang. GM	90815000,

cui in Canone refpondent 6° 52 42

Eft ergo GM	96	52	44	(§. 133
Subtr.	90			*Sphær.*).
Nonag. Eclipt.	6	52	44	
Loc. ver. ☉.	10	13	48	
Dift. ☉ a Non.	3	21	4	verfus ortum

Log. Cofin. GM	90783518
Cotang. NGM	89153631
Cotang. NMG	101629887,

cui in Canone refpondent 55° 30′ 37″.

Ergo angulus orientis NMG feu altitudo nonagefimi 34° 29′ 23″.

Log.

(d) Aftron. Britan. lib. 5. præc. 36. f. 237.

Log.Sin. dist.☉a Nonag.	87668186
Sin. ang. Orient.	97530146
Parall horiz. ☽ a ☉	35423273

Log. Parall.Long. ☽ a ☉ 220621605, cui in tabulis respondent 115 seu 1' 55''.

Log. Cosin. ang. Orient.	99160472
Parall. hor. ☽ a ☉	35423273

Log. Parall. Latit. 34583745, cui in tabulis respondent 2873'' seu 47' 53''.

Loc. Lunæ verus	♈	10°	13'	48''
Parall. Long. add.			1	55
Log. ☽ visus	♈	10	15	43
Lat. Lunæ vera bor.			34	49
Parall. Latit.			47	53
Lat. ☽ visa merid.			13	4

PROBLEMA 88.

998. *Invenire motum Lunæ a Sole visum in tempore proposito.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad initium & finem temporis propositi parallaxis longitudinis Lunæ ut in problemate præcedente.

2. Si toto illo tempore Luna fuerit in quadrante orientali & parallaxis longitudinis major fuerit in fine, quam in principio temporis, differentia parallaxium addatur motui Lunæ a Sole vero ad illud tempus; in casu contrario (si nempe parallaxis decrescit) subtrahatur, ut prodeat motus Lunæ a Sole visus (§. 361).

3. Si ☽ fuerit toto tempore in quadrante occidentali, contraria ratione operandum, in casu nempe priori differentia parallaxium subtrahenda, in posteriori addenda (*§. cit.*).

4. Denique si ☽ initio fuerit in quadrante orientali, in fine vero in occidentali: differentia parallaxium subtrahenda (*§. cit.*).

E. gr. Quæratur motus ☽ a ☉ visus ad quadrantem horæ in ☌ ☽ ☉, quæ A. 1661 d. 19 Mart. hor. 21. 41' 3'' accidit. Investigetur ut in probl. præc. parallaxis longitudinis ad quadrantem horæ antecedentem, hoc est, ad h. 21. 26' 3''

Fuit tum Loc. ☉ verus	♈	10°	13'	11''	Tab. XI. Fig. 91.
Ascensio recta ☉		9	23	20	
AD		38	29	15	
GO		60	54	5	
Nonag. eclipt.	♈	3°	38'	10''	
Loc. ☉ ver.	♈	10	13	11	
Dist. ☉ a Nonag.		6	35		versus ortum
Parallaxis Longit.		3	38		
Sed eadem in ☌ erat		1	55		
Ergo differentia		1	43		
Mot. ☽ a ☉ vis. in qu. h.		8	46		
Mot. ☽ a ☉ vis. in qu. h.		7	3		

PROBLEMA 89.

999. *Dato momento conjunctionis*

nis veræ luminarium invenire momentum visæ.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur ad momentum conjunctionis veræ parallaxis longitudinis Lunæ a Sole (§. 997).
2. Quæratur quoque ad illud tempus motus Lunæ a Sole visus in quadrante horæ (§. 998).
3. Inferatur: ut motus Lunæ a Sole visus in quadrante unius horæ ad 900 scrupula secunda, seu horæ quadrantem, ita parallaxis longitudinis ad intervallum synodi veræ atque visæ.
4. In quadrante orientali intervallum a momento veræ synodi subtrahatur, ut relinquatur momentum visæ: in occidentali vero eundem in finem addatur (§. 372).

E. gr. in nostro casu tempus synodi veræ est hor. 21. 41′ 3″, & illo tempore parallexis longitudinis 1′ 55″, seu 115″, motus ☽ a ☉ visus in quadrante horæ 7′ 3″ seu 423″.

Log. Quadr. hor.	29542425
Parall. Long.	20606978
Summa	50149403
Log. Mot. ☽ a ☉ vis.	26263403
Interval. ☌ ver. & vis.	23886000,

cui in tabulis respondent 244″ seu 4′ 4″

Tempus synodi veræ	h. 21. 41. 3
Tempus synodi visæ	h. 21. 36.59

PROBLEMA 90.

1000. *Ad datum tempus synodi visæ invenire latitudinem visam.*

RESOLUTIO.

1. Inferatur: ut intervallum unius horæ seu scrupula secunda 3600 ad motum horarium ☽ a ☉ verum, ita intervallum synodi veræ ac visæ ad motum ☽ intervallo congruentem.
2. Quodsi synodus vera præcedat visam motus Lunæ repertus loco ejus in ☌ vero ad datur; si illa sequatur, dematur: ita obtinetur locus Lunæ verus tempore synodi visæ.
3. Dato loco Lunæ vero invenitur more vulgari latitudo Lunæ vera eidem respondens; seu ut declinatio Solis (§. 198).
4. Et hinc tandem latitudo visa (§. 997).

E. gr. in nostro casu intervallum synodi veræ & visæ est 4′ 4″ seu 244″ & horarius ☽ a ☉ verus 35′ 3″ seu 2103″. Quare

Log.

Tab. IX. Fig. 91.

Log. Hor. veri ☽ a ☉	33228392
Intervalli ☌ ver. & vis.	23886000
Summa	57114392
Log. 3600	35563025
Log. mot. ☽ interv. resp.	21551367,

cui in tabulis respondent 143″ seu 2′ 23″

Loc. ☽ verus in ☌ vera ♈	10°	13′	48″
Scrupul. subtr.		2	23
Loc. ☽ verus in ☌ visa ♈	10	11	25
cui resp. Lat. vera septr. desc.		34	49
Sed tum Asc. recta ☉	9	29	17
AD	35	45	15
DO	54	14	45
reperitur adeoque GO	63	44	2
NGO	70	37	44
& ob MGO	23	29	
NGM	94	6	44
hinc Nonag. eclipt. ♈	6	5	24
Angul. Orientis GNM	34	8	34
Unde Parallaxis Latitudinis		48	9
Latit. ☽ vera septr. desc.		34	49
Latit. visa merid.		13	20

PROBLEMA 91.

1001. ***Data latitudine Lunæ visa ad tempus synodi visæ una cum semidiametris apparentibus Luminarium, invenire scrupula defectus & digitos eclipticos.***

RESOLUTIO.

1. Semidiametri apparentes luminarium conjiciantur in unam summam.

2. Ab ea auferatur latitudo Lunæ visa; relinquuntur scrupula defectus.

3. Fiat ut semidiameter ☉ ad scrupula defectus, ita 6 digiti in scrupula redacti seu 360 ad digitos eclipticos in similibus scrupulis.

E. gr. in nostro casu

Semidiameter ☉	16′	19″ s. 979″
☽	16	40
Aggregatum	32	59
Lat. ☽ visa	13	20
Scrupula defectus	19	39 s. 1179″

Log. scrup. 6 dig.	25563025
scrup. defect.	30715138
Summa	56278163
Log. semid. ☉	29907826
Log. dig. eclipt.	26370337,

cui in tabulis respondent 434′.

Est ergo quantitas eclipseos 7 dig. 14′.

SCHOLION.

1002. *Qui scrupulosius quantitatem eclipseos definire intendunt, non latitudinem visam, sed arcum inter centra subtrahunt, quo superius in eclipsi lunari usi sumus* (§. 951).

PROBLEMA 92.

1003. ***Datis semidiametris apparentibus luminarium*** AP & PN ***una*** Tab. IX. Fig. 88.

una cum latitudine visa AI (*aut, si mavis arcu inter centra* AL) *invenire scrupula dimidiæ durationis seu lineam incidentiæ* IN.

RESOLUTIO.

Eadem est, quæ problematis 74 (§. 956).

E. gr. in nostro casu AP 16′ 19″ s. 979″, PN 16′ 40″ seu 1000″ AI 13′ 20″ seu 800″: erit

AN	1979	AN	1979
AI	800	AI	800
AN+AI	2779	AN−AI	1179

Log. AN + AI	34438885
AN − AI	30715138
Summa	65154023

Log. IN 32577011, cui in tabulis respondent 1811″.

Sunt adeo scrupula dimidiæ durationis 30′ 11.

PROBLEMA 93.

1004. *Datis scrupulis dimidiæ durationis, tempus incidentiæ ac repletionis definire totamque eclipseos solaris durationem determinare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur horarius Lunæ a Sole visus pro hora una ante synodum visam & pro hora una post eandem (§. 998).

2. Inferatur: ut motus horarius prior ad scrupula secunda unius horæ, ita scrupula dimidiæ durationis ad tempus incidentiæ & ut motus horarius posterior ad eadem scrupula horaria, ita eadem scrupula dimidiæ durationis ad tempus repletionis.

3. Tempus incidentiæ addatur tempori repletionis: aggregatum est duratio totalis.

E. gr. in nostro casu reperitur motus horarius Lunæ a Sole visus hora una ante synodum visam 28′ 55″, & hora una post eandem 27′ 31″; scrupula durationis dimidiæ sunt 30′ 11″. Ergo

Logar. scrup. hor. 3600	35563025
Scrup. dur. dim.	32577011
Summa	68140036
Log. horar. vis. ante ☌	32392994
Log. temp. incid.	35747042,

cui in tabulis respondent 3756″ seu 1 h. 2′ 36″.

Logar. scrup. hor. 3600	35563025
Scrup. dur. dim.	32577011
Summa	68140036
Log. hor. vis. post ☌	32177470
Log. temp. replet.	35962566,

cui in tabulis respondent 3947″ seu 1 h. 5′ 47″.

Tem-

Tempus incidentiæ	1 h.	2′	36″
repletionis	1	5	47
Duratio tota	2 h.	8	23

PROBLEMA 94.

Tab. IX. Fig. 88. 1005. *Eclipseos solaris medium, initium ac finem determinare.*

RESOLUTIO.

1. Ex latitudine ☽ visa ad tempus synodi visæ investigetur arcus IL seu distantia maximæ obscurationis a ☌ visa (§. 946).
2. Fiat: ut horarius Lunæ a Sole visus ante synodum visam ad 3600 scrupula horaria, ita distantia maximæ obscurationis a ☌ visa ad intervallum temporis inter maximam obscurationem & synodum visam.
3. Hoc intervallum in primo & tertio quadrante anomaliæ a tempore synodi visæ subtrahatur, in reliquis eidem addatur, ut prodeat tempus maximæ obscurationis.
4. Denique tempori maximæ obscurationis dematur tempus incidentiæ, addatur tempus repletionis; erit illic differentia initium, hic summa finis eclipseos.

Enimvero quia intervallum inter synodum visam & maximam obscurationem valde exiguum & admodum dubium; vix operæ pretium videtur, tanta accuratione uti: unde plerique tempore synodi visæ utuntur tanquam tempore maximæ obscurationis.

E. gr. In nostro casu

Tempus synodi visæ	h. 21	36′	59″
Tempus incidentiæ	1	2	36
Initium eclipseos	hor. 20	34	23
seu	h. 8 mat.	34	23
Tempus synodi visæ	h. 21	36	59
Tempus repletionis	1	5	47
Finis eclipseos	h. 22	42	46
seu	h. 10 mat.	42	46

Quodsi scrupulosius ea definire volueris, duo circiter minuta ob distantiam synodi visæ a maxima obscuratione deprehendentur subtrahenda.

PROBLEMA 95.

1006. *Invenire latitudinem Lunæ visam initio & fine eclipseos solaris.*

RESOLUTIO.

1. Argumento latitudinis ad tempus synodi visæ computatæ demantur scrupula dimidiæ durationis una cum motu Solis tempori incidentiæ conveniente: quod relinquitur est argumentum latitudinis inito eclipseos.
2. Eidem addantur eadem scrupu-

la una cum motu Solis tempori repletionis respondente: aggregatum est argumentum latitudinis in fine eclipseos.

3. Dato argumento latitudinis invenitur more vulgari latitudo Lunæ vera (§. 880) & hinc tandem visa (§. 1000).

PROBLEMA 96.

1007. ***Data latitudine Lunæ visa initio & fine eclipseos solaris typum ejus formare.***

RESOLUTIO.

Non differt a resolutione problematis 83 (§. 976).

PROBLEMA 97.

1008. ***Eclipsin Solis supputare.***

RESOLUTIO.

1. Supputetur novilunium medium (§. 959) & hinc porro verum (§. 970) una cum loco luminarium ad tempus apparens veri.
2. Ad tempus apparens novilunii veri supputetur tempus apparens visi (§. 999).
3. Ad tempus apparens visi supputetur latitudo visa (§. 1000) &
4. inde digiti ecliptici determinentur (§. 1001).
5. Quæratur tempus maximæ obscurationis, incidentiæ ac repletionis (§. 1004) &
6. inde initium ac finis eclipseos eruantur (§. 1005).

SCHOLION.

1009. *Ad problemata præcedentia attendentibus satis liquet, omnia calculi tædia a parallaxibus longitudinis & latitudinis procreari; quæ si abessent, calculus eclipsium solarium non differret a lunarium calculo. Quoniam vero parallaxes longitudinis & latitudinis a parallaxi altitudinis* (§. 391) *hæc vero ab horizonte pendet* (§. 73); *calculus eclipsium solarium non universalis est; sed tantummodo particularis pro dato loco* (§. 59. 67). Keplerus (e) *eclipses solares tanquam terræ eclipses considerare cœpit: ita enim calculus universalis instituti & calculus partialis a parallaxium tricis liberari potest, quemadmodum ex sequentibus patet.*

PROBLEMA 98.

1010. ***Observare eclipsin solarem.***

RESOLUTIO.

1. Species Solis in cameram obscuram intromittatur ut supra (§. 427) & discus per 6 circulos con-

(e) in Epitome Astron. Copern. lib. 6. p. 173.

concentricos in 12 digitos dividatur.

2. Ope horologii oscillatorii notetur tempus, quo eclipsis incipit ac desinit, & quo unusquisque digitus integer obscuratus cernitur ut supra (§. 977).

CAPUT VIII.

DE

ECLIPSI TERRÆ ET MOTU VERTIGINIS LUNÆ.

DEFINITIO 86.

1011. *Eclipsis terræ* est privatio luminis solaris vel totius, vel alicujus partis propter interpositionem diametralem Lunæ inter Solem atque Terram facta in disco Telluris, qualis oculo in Luna posito apparet.

SCHOLION.

1012. *Convenit eclipsis Terræ cum eclipsi lunari, si Lunæ ac Telluris loca invicem permutes. Nimirum in eclipsi lunari Luna privatur vel lumine Solis toto, vel aliqua ejus parte ob Terram inter ipsam & Solem interpositam; in eclipsi terrestri Terra ob Lunæ interpositionem similem luminis solaris patitur defectum.*

DEFINITIO 87.

1013. *Discus Terræ* est circulus, in quem projicitur hemisphærium *Terræ luminosum, quantum ex aliquo puncto in Luna mota apparet.*

THEOREMA 35.

1014. *Hemisphærium Terræ oppositum Lunæ in eadem instar disci apparere debet & quidem luminosi, quando a Sole illuminatur.*

DEMONSTRATIO.

Luna ob distantiam, ex qua videtur (§. 277 *Optic.*), instar disci plani apparet, & quidem luminosi, quando hemisphærium a Sole illuminatum nobis obvertit (§. 456). Quamobrem cum per ea, quæ in Geographia independenter a propositione præsente demonstrabuntur, Terra figuram habeat propemodum sphæricam & in Luna ex

eadem diſtantia videatur, ex qua Luna in Tellure conſpicitur; illa quoq; in Luna inſtar diſci plani apparere debet. Cumque lumen ſolare, quod a Terra in Lunam reflectitur, ſit ad lumen a Luna in Terram reflexum ut 14 ad 1 (§. 914); diſcus Terræ ex Luna viſus luminoſus apparere debet, quando a Sole illuminatur. *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

1015. *Semidiameter apparens Telluris in Sole vel Luna eſt æqualis paralloxi horizontali Solis vel Lunæ in Terra; & in genere ſemidiameter Terræ in quavis ſtella tanta videtur, quanta eſt parallaxis ejus horizontalis in Terra.*

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 44. Sit Sol in S, HI horizon ſenſibilis & ſpectator in I, centrum Telluris in T; erit angulus SIT parallaxis Solis horizontalis (§. 371). Quoniam vero ex S ſemidiameter Telluris TI videtur ſub eodem angulo IST; erit idem ſemidiameter apparens Terræ in Sole (§. 207. 208 *Optic.*). Eſt igitur ſemidiameter apparens Telluris in Sole æqualis parallaxi horizontali Solis in Terra. Et quia in puncto S loco Solis Lunam vel quamcunque ſtellam aliam ſupponere licet, ceteris omnibus manentibus & conſequentibus iisdem; in genere patet, magnitudinem Terræ in ſtella qualibet tantam apparere, quanta ejus in Tellure percipitur parallaxis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

1016. Quoniam parallaxis Solis horizontalis nonniſi 6 (§. 896) vel 10 ſcrupulorum ſecundorum (§. 898); ſemidiameter Telluris ex Sole viſæ apparens eſt nonniſi 6 vel 10 ſcrupulorum ſecundorum.

COROLLARIUM 2.

1017. Similiter quia parallaxis Lunæ horizontalis maxima, quam ſcilicet habet in minima a Terra diſtantia (§. 379), eſt 1° 1′ 25″; minima vero, quam in maxima diſtantia habet, 54′ 5″ (§. 892); ſemidiameter Terræ apparens maxima in Luna eſt 1° 1′ 25″; minima 54′ 5″.

COROLLARIUM 3.

1118. Diameter apparens Terræ in Sole inſenſibilis (§. 1016).

THEOREMA 37.

1019. *Diameter apparens Lunæ in Sole inſenſibilis.*

DEMONSTRATIO.

Si diſtantia Solis a Terra fuerit 34377 ſemid. terreſtr. parallaxis horizontalis 6 ſcrupulorum ſecundorum (§. 896); ſi vero 22062 ſemi-

femid. terreftr. eadem evadit 10″ (§.899), confequenter fi Terra propius admoveatur Soli intervallo 12315 femidiametrorum terreftrium, parallaxis nonnifi 4 fcrupulis fecundis augetur. Quamobrem fi ponamus eandem propius ad folem accedere non nifi intervallo 62 femidiametrorum terreftrium, qualis maxima Lunæ a Terra diftantia esfe poteft (§ 906); parallaxis Solis horizontalis vix unico fcrupulo tertio augebitur, confequenter diameter Terræ apparens in Sole eadem adhuc erit, quæ erat in diftantia remotiori. Jam cum diameter Lunæ vera fit quarta circiter pars diametri terreftris (§. 922) & diametri apparentes Terræ atque Lunæ in Sole in eadem diftantia fint ut veræ (§. 212. *Optic.*); erit diameter Lunæ inter Solem atque Tellurem interpofitæ in Sole vix major $1\frac{1}{2}$, aut $2\frac{1}{2}$ fcrupulorum fecundorum (§.1016). Eft igitur multo magis infenfibilis, quam diameter apparens Terræ in Sole. *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

Tab. XI. Fig. 89. 1020. *Semiangulus coni umbrofi* AHB *eft ad fenfum æqualis femidiametro apparenti Solis ex Terra fpectati, fi ad eam refertur conus umbrofus, vel ex Luna vifi, fi conus umbrofus fuerit lunaris.*

DEMONSTRATIO.

Si in C fit centrum Terræ, erit ACB femidiameter apparens Solis ex Terra vifi & CBF femidiameter apparens Terræ ex Sole fpectatæ (§. 207. 208 *Optic.*). Eft igitur femidiameter apparens Solis ACB æqualis femidiametro apparenti Terræ CBF ex Sole vifæ & angulo dimidio coni umbrofi terreftris CHF (§. 239 *Geom.*). Enimvero diameter apparens Terræ ex Sole vifæ infenfibilis (§.1018), paucorum fcilicet fcrupulorum fecundorum (§. 1016). Quare femiangulus coni umbrofi terreftris CHF diametro Solis apparenti propemodum æqualis. *Quod erat unum.*

Quodfi ponamus in C esfe centrum Lunæ; erit ACB diameter apparens Solis ex Luna vifi & CBF diameter apparens Lunæ ex Sole fpectatæ. Quamobrem cum diameter apparens Lunæ in Sole fit infenfibilis (§. 1019); eodem, quo ante, modo patet femiangulum coni umbrofi lunaris esfe diametro apparenti Solis ex Luna fpectati æqualem. *Quod erat alterum.*

COROL

COROLLARIUM.

1021. Eadem igitur manente semidiametro apparente Solis, sectiones triangulares coni umbrosi CHF sunt sibi mutuo æquiangulæ (§. 239 *Geom.*), consequenter axis CH ad semidiametrum CF eandem rationem habet (§. 267 *Geom.*), adeoque coni ipsi sibi mutuo similes sunt (§. 570 *Geom.*).

SCHOLION.

1022. *Non modo diameter Solis apparens eadem est in Terra in eadem Solis distantia ab Apogæo vel Telluris a Perihelio, ac pro eadem habetur toto illo tempore, quo nonnisi paucis scrupulis secundis mutatur; verum etiam pro eadem eodem tempore in Luna & Sole habetur: quemadmodum in theoremate sequente demonstrare lubet.*

THEOREMA 39.

1023. ***Diameter apparens Solis in Luna eodem tempore ad sensum non differt a diametro apparente ejusdem in Terra.***

DEMONSTRATIO.

Differentia semidiametri apparentis in maxima & minima a Sole distantia non differt nisi 1′ 55″ seu 65″ (§. 553). Est vero juxta *Cassinum* differentia distantiæ maximæ & minimæ Solis a Terra 748 semidiametrorum terrestrium (§. 905). Quamobrem si Terra propius admoveatur Soli intervallo 748 semidiametrorum terrestrium, diameter apparens nonnisi 65 scrupulis secundis augetur. Enimvero maxima Lunæ a Terra distantia nunquam 62 semidiametros terrestres excedit (§. 906): quæ cum sit vix decima pars illius intervalli, si Luna in maxima a Terra distantia inter Terram & Solem interponitur, semidiameter apparens Solis in Luna a semidiametro apparente ejusdem in Terra vix 6 scrupulis secundis differre potest. Est igitur eodem tempore in Luna & Terra ad sensum eadem. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

1024. Coni igitur umbrosi Terræ & Lunæ eodem tempore similes (§. 1021).

PROBLEMA 99.

1025. ***Data semidiametro Lunæ vera & semidiametro apparente Solis invenire longitudinem axis coni umbrosi lunaris.*** Tab. XI. Fig. 86.

RESOL. & DEMONST.

1. Si in C fuerit Terra, in △ CHF ad F rectangulo præter semidiametrum Terræ CF = 1 datur semiangulus coni umbrosi CHF, utpote semidiametro apparenti Solis

Solis æqualis (§. 1020). Inveniri igitur potest longitudo axis coni umbrosi CH (§. 36 *Trigon.*), qui etiam ex distantia Solis a Terra & ejus diametro vera reperiri poterat, ut supra (§. 939).

2. Quoniam eodem tempore conus umbrosus lunaris similis cono umbroso terrestri (§. 1024), adeoque Lunæ semidiameter ad illius axem eandem rationem habet, quam habet semidiameter Terræ ad axem coni umbrosi terrestris (§. 570 *Geom.*), consequenter semidiameter Terræ ad semidiametrum Lunæ est ut axis coni umbrosi terrestris ad axem coni umbrosi lunaris (§. 173 *Arithm.*): hic per regulam trium porro invenitur.

E. gr. Semidiameter Solis apparens in media distantia 16′ fere (§. 553). Quare cum semidiameter terræ sit 1; erit

Log. Sin. CHE	76678445
CE	00000000
Sin. tot.	100000000

HC 2.3321555, cui in tabulis quam proxime respondent $214\frac{8}{10}$. Est igitur longitudo axis coni umbrosi terrestris $214\frac{4}{5}$, hoc est, fere 215 semidiametrorum terrestrium. Jam Lunæ semidiameter propemodum pars quarta semidiametri terrestris (§. 922). Est adeo longitudo axis coni umbrosi lunaris fere $53\frac{3}{5}$ semidiametrorum terrestrium.

Similiter in maxima distantia Terræ a Sole semidiameter Solis apparens 15′ 49″ (§. 553). Quamobrem ut ante

Log. Sin. CHE	76632969
Sin. tot.	100000000

HC 2.3367031, cui in tabulis quam proxime respondent 217. Est igitur in distantia maxima Telluris a Sole axis coni umbrosi terrestris 217 semidiametrorum terrestrium. Quodsi ergo Lunæ diameter ponatur quarta pars diametri terrestris; erit axis coni umbrosi $54\frac{1}{4}$ semidiametrorum terrestrium. Quodsi diametrum Terræ ad diametrum Lunæ ponas ut 1000 ad 266 (§. 912), reperietur axis coni umbrosi lunaris in casu priori $57\frac{1}{10}$ semidiametrorum terrestrium; in posteriori $57\frac{7}{10}$.

COROLLARIUM 1.

1026. Quoniam axis coni umbrosi major esse nequit 58 semidiametris terrestribus, Lunæ autem a Terra distantia media 58 semidiametrorum terrestrium est (§. 906), vel juxta *Cassinum* 57 (§. 905); si distantia Lunæ a Terra fuerit major distantia media, Terra in umbram Lunæ incurrere nequit.

COROLLARIUM 2.

1027. Quoniam vero distantia Lunæ minima a Terra est 54 (§. 906) vel 53 semidiametrorum terrestrium (§. 905) longitudo vero coni umbrosi minor esse nequit 53 semidiametrorum terrestrium (§. 1025); si distantia Lunæ a Terra fuerit minor distantia media, Terra in umbram Lunæ incurrere potest.

SCHOLION.

1028. *Non tamen ideo actu incurrit, necesse enim est ut Luna sit nodo vicina vel in ipso nodo, ubi id fieri debet* (§. 985).

DEFINITIO 88.

1029. *Umbra Lunæ* appellatur circulus in disco Terræ, qui a Luna obumbratur, seu in quem Luna umbram projicit. Diameter hujus circuli dicitur *Diameter umbræ*, & quidem vera. Ast angulus, sub quo semidiameter umbræ in Luna videtur, *semidiameter umbræ lunaris apparens* appellatur.

PROBLEMA 100.

1030. *Invenire semidiametrum apparentem umbræ lunaris.*

RESOLUTIO.

1. Ad datum tempus inveniatur intervallum Solis atque Lunæ (§. 645) indeque porro diameter apparens utriusque luminaris (§. 212 *Optic.*).
2. A semidiametro apparente Lunæ subtrahatur semidiameter apparens umbræ: Quod relinquitur est semidiameter apparens umbræ lunaris.

DEMONSTRATIO.

Ponamus in C esse lunam, DE semidiametrum umbræ lunaris, CHE semiangulum coni umbrosi: erit CDE semidiameter apparens Lunæ, ECD semidiameter apparens umbræ (§. 1029). Est vero semidiameter apparens Lunæ CDE æqualis semidiametro apparenti umbræ ECD & semiangulo coni umbrosi lunaris CHE (§. 239 *Geom.*). Quamobrem cum semiangulus coni umbrosi CHE æqualis sit semidiametro apparenti Solis (§. 1021. 1023); si a semidiametro apparente Lunæ CDE subtrahitur semidiameter apparens Solis seu angulus CHE, relinquitur semidiameter apparens umbræ. *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 86.

COROLLARIUM.

1031. Quodsi ergo semidiameter Lunæ æqualis vel minor fuerit semidiametro Solis, nulla quoque umbra Lunæ in discum Terræ cadit.

SCHO-

SCHOLION 1.

1032. *Monet* Keplerus (f) *diametrum umbræ lunaris hoc pacto inventam esse prope veram. Quoniam enim parallaxin Solis horizontalem adhuc sensibilem statuit; semiangulus coni umbrosi semidiametro apparenti Solis non prorsus æqualis haberi potest.*

SCHOLION 2.

1033. *Ad facilitandum calculum constructæ sunt Tabulæ semidiametrorum apparentium, parallaxium horizontalium & distantiarum a Terra pro Sole & Luna ad singulos quinos anomaliæ coæquatæ gradus* (g).

PROBLEMA 101.

Tab. X. Fig. 86. 1034. ***Data semidiametro umbræ lunaris apparente* ECD *& distantia Lunæ a Terræ disco* CE, *invenire veram* ED.**

RESOLUTIO.

Quoniam in Triangulo CED ad E rectangulo datur anglus ECD & latus EC, invenietur latus ED (§. 36 *Trigon.*).

COROLLARIUM.

1035. Quia diameter vera umbræ ED minor diametro vera Lunæ CF, Lunæ vero diameter multo minor diametro Telluris (§. 912); umbra Lunæ nunquam integrum discum Terræ obtegere potest; sed nonnisi partem aliquam tegit.

PROBLEMA 102.

1036. ***Datis axe coni umbrosi* LH *per centrum Telluris* C *transeuntis & distantia Lunæ a centro Terræ* LC *una cum semiangulo coni umbrosi* EHD; *determinare spatium disci, quod occupat umbra Lunæ.*** Tab. XIV. Fig. 109.

RESOLUTIO.

1. Quoniam in triangulo CDH præter semiangulum coni umbrosi lunaris H dantur semidiameter Terræ = 1 & excessus longitudinis coni umbrosi supra distantiam Lunæ a Terræ centro CH inveniri potest angulus CDH (§. 38 *Trigon.*).
2. Addatur huic angulo semiangulus coni umbrosi H; aggregatum erit angulus ECD (§. 239 *Geom.*), cujus mensura est arcus ED.
3. Duplum hujus arcus si convertatur in milliaria Germanica, quemadmodum in Geographia docebitur; prodibit longitudo spatii, quod dato momento umbra Lunæ occupat.

(f) in Epit. Astron. Copern. lib. 6. p. 875.
(g) De la Hire in Tab. Astron. p. 20. 27.

COROLLARIUM.

1037. Quia Luna continuo movetur ab occasu versus ortum & Terra vertigine cietur; umbra quoque Lunæ ab occasu in ortum continuo movetur in disco Terræ, consequenter Selenitis instar maculæ per discum Terræ trajicientis apparet (§. 1035).

SCHOLION.

1038. *Obtinet casus problematis in conjunctione centrali* (§. 935). *Quodsi enim platica fuerit conjunctio, axis ad discum Terræ obliquus est, adeoque conum umbrosum oblique secat, consequenter sectio ellipsis est. Cum vero rarius Luna in ipso nodo est, quando Terram obumbrat; figura quoque umbræ plerumque elliptica est.*

DEFINITIO 89.

Tab. XIII. Fig. 107. 1039. ***Penumbra*** est spatium disci Terræ, quod aliqua luminis solaris parte illo momento privatur. E. gr. Sit Sol in S, Luna in L, Terra in T. Ducatur ex H recta BH tangens Lunam in E & Solem in B. Ducatur itidem recta AG tangens Lunam in E & Solem in A. Erit in GH penumbra. Idem intelligitur ex altera parte inter radios ID & DF.

DEFINITIO 90.

1040. ***Conus penumbrosus*** dicitur is, qui describi concipitur, si radius CK circa punctum fixum C ita moveri in gyrum concipiatur, ut continuo contingat Lunam: Punctum C, in quo radii Lunam contingentes BD & AE se mutuo intersecant, dicitur ***vertex coni penumbrosi.***

SCHOLION.

1041. *In natura rerum formatur conus umbrosus per radios, qui ex singulis limbi Solis punctis per punctum C transeunt & Lunam contingunt, antequam ulterius progrediantur.*

COROLLARIUM 1.

1042. Quoniam radius CK in infinitum protenditur, conus penumbrosus in infinitum exporrigitur.

COROLLARIUM 2.

1043. Conus umbrosus DFE totus intra penumbrosum ICK continetur.

COROLLARIUM 3.

1044. Quia conus DCE totus toto lumine solari illustratur; conus penumbrosus proprie loquendo est conus truncatus DIEK.

THEOREMA 40.

1045. ***Semiangulus coni penumbrosi*** ECL ***est semidiametro apparenti Solis æqualis.***

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EN per punctum E ad centrum Solis tendens; erit angulus AEN semidiametro apparenti Solis æqualis (§. 207. 208 Opt.) & recta EN ipsi LS ex centro Solis Tab. XIII. Fig. 107.

Solis eductæ ad sensum parallela (§. 93. *Optic.*). Quoniam itaque angulus AEN ipsi LCE æqualis (§. 233 *Geom.*); semi angulus coni penumbrosi semidiametro apparenti Solis æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

1046. Quoniam etiam semiangulus coni umbrosi LFE semidiametro apparenti Solis æqualis (§. 1020); conus umbrosus lunaris & penumbrosus sunt sibi mutuo similes eodem tempore (§. 1021).

COROLLARIUM 2.

1047. Et quia conus umbrosus Telluris cono umbroso lunari similis (§. 1024); etiam conus penumbrosus lunaris cono umbroso Telluris eodem tempore similis esse debet.

COROLLARIUM 3.

1048. Quoniam pars Sectionis coni umbrosi FLE & penumbrosi inter Solem & Lunam interjacentis LCE communem basin & angulos ad eandem æquales habent (§. 246 *Geom.*); æquales sunt (§. 251 *Geom.*), consequenter conus umbrosus lunaris & penumbrosi pars ea, quæ inter Lunam & Solem interjacet, æquales sunt (§. 467 *Geom.*).

COROLLARIUM 4.

1049. Eodem igitur modo invenitur axis ejus partis coni penumbrosi, quæ inter Lunam & Solem interjacet, quo axis coni umbrosi lunaris reperitur (§. 1025).

DEFINITIO 91.

1050. Si conus umbrosus ICG, ubi Terram contingit, secetur plano ad axem CF recto, diameter hujus circuli dicitur *Diameter Penumbræ*, & ejus pars dimidia HG *Semidiameter Penumbræ*. Tab. XIII. Fig. 108.

COROLLARIUM.

1051. Semidiametri igitur penumbræ HG pars est semidiameter umbræ, si qua datur; centrum vero H penumbræ idem est cum centro umbræ, si qua datur.

SCHOLION.

1052. *Studio dico, si qua datur: constat enim ex superioribus (§. 1026), umbram Lunæ non semper attingere Terræ superficiem, etsi penumbra involvatur.*

DEFINITIO 92.

1053. Differentiam umbræ a penumbra, si qua umbra datur, dicemus *Latitudinem umbræ*.

E. gr. Si HG fuerit semidiameter penumbræ, HO semidiameter umbræ, erit OG latitudo penumbræ.

SCHOLION.

1054. *Nimirum quando umbra Lunæ incidit in superficiem Terræ, penumbra mera in disco Terræ annulum occupat, cujus latitudo est differentia inter semidiametrum penumbræ & umbræ plenariæ.*

DEFINITIO 93.

1055. *Semidiameter apparens penum-*

Tab. XIV. Fig. 108. numbræ est angulus HLG, sub quo semidiameter penumbræ ex Luna videtur. *Latitudo penumbræ apparens* est angulus OEG, sub quo latitudo penumbræ ex Sole videtur.

PROBLEMA 103.

1056. *Invenire ad datum tempus semidiametrum apparentem penumbræ, una cum latitudine apparente ejusdem.*

RESOLUTIO.

1. Inveniantur ad datum tempus semidiametri apparentes Solis atque Lunæ, ut supra (§. 130).
2. Semidiametri luminarium ad se invicem addantur, erit aggregatum semidiameter penumbræ apparens.
3. Semidiameter Solis apparens multiplicetur per binarium; erit factum latitudo penumbræ apparens.

DEMONSTRATIO.

Sit in L centrum Lunæ, ducaturque LG; erit HLG semidiameter apparens penumbræ (§. 1055); angulus vero LGE semidiameter apparens Lunæ in Terra visæ. Quoniam angulus HLG æqualis angulis LCG & LGC (§. 239 *Geom.*), semiangulus vero coni umbrosi semidiametro Solis apparenti æqualis (§. 1020); evidens est, semidiametrum apparentem penumbræ esse aggregatum ex semidiametris apparentibus Solis atque Lunæ. *Quod erat unum.*

Sit jam porro in F vertex coni umbrosi, erit semiangulus ejusdem semidiametro apparenti Solis (§. 1020), quemadmodum semiangulus coni penumbrosi ECH æqualis (§. 1045). Quamobrem cum angulus GEO sit duobus semiangulis conorum ECF & CFE æqualis (§. 239 *Geom.*); erit latitudo apparens penumbræ DEG duplæ semidiametro Solis apparenti æqualis. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

1057. *Cum* Keplerus *in semiangulo coni umbrosi definiendo, cui semiangulum coni penumbrosi æqualem esse constat* (§. 1048), *parallaxeos Solis, quam sensibilem statuit, rationem habeat; ideo quoque in definienda diametro apparente penumbræ eandem non negligit.*

PROBLEMA 104.

1058. *Determinare longitudinem spatii in superficie Terræ, quam penumbra Lunæ occupat dato tempore.*

RESOLUTIO.

Ponamus ut supra (§. 1036); axem

axem coni penumbrosi CD transire per centrum Terræ T.

1. Investigetur longitudo axis coni umbrosi (§. 1025), cui æqualis est longitudo partis penumbrosi LC inter Solem & Lunam interjacentis (§. 1048).

2. Investigetur porro ad datum tempus distantia Lunæ a Terra TL (§. 903), eique

3. addatur pars axis coni penumbrosi LC, modo inventa (*n.* 1), ut habeatur TC.

4. Quoniam itaque præter latera TC & TG, distantiam verticis coni penumbrosi a centro Terræ & Terræ semidiametrum, in Δ TCG datur semiangulus coni penumbrosi TCG (§. 1045); reperietur angulus CGK (§. 38 *Trig.*), consequenter angulus CTG innotescit (§ 245 *Geom.*) quem metitur arcus HG (§. 57 *Geom.*).

5. Quodsi tandem duplum arcus HG, arcum scilicet IG, per ea, quæ in Geographia independenter ab his traduntur, in milliaria Germanica convertas; prodibit longitudo spatii, quod penumbra dato momento occupat, in milliaribus Germanicis.

E. gr. Ponamus Terram esse in Perihelio, in quo cum Solis semidiameter apparens maxima sit, erit semiangulus coni penumbrosi TCG maximus, qui esse potest (§. 1045), nimirum 16′ 22″½ sive 16′ 23″ (§. 552).

Log. sin. tot.	100000000
semid. app. ☉	76781220

Log. axis coni umbrosi ♁ 2.3218780, cui in Tabulis, quam proxime respondent $209\frac{3}{10}$. Est igitur axis coni umbrosi terrestris in Perihelio $209\frac{3}{5}$ semidiametrorum terrestrium.

Jam cum semidiameter Telluris sit ad semidiametrum Lunæ ut 1000 ad 266, (§. 912) reperietur axis coni umbrosi lunaris $55\frac{8}{10}$ sive 56 semidiametrorum terrestrium (§. 1025), cui LC æqualis (1048).

Ponamus jam porro Lunam esse in Apogæo suo, erit TL 62 semidiametrorum terrestrium (§. 906), adeoque TC = 118 semid. terrestr. Quamobrem

Log. sin. TCG	76781220
TC	20718820

Log. Sin. TGK 97500040, cui in Tabulis respondent

	°	′	″
	34	13	10
TCG		16	23
arc. HG	33	56	47
IG	67	53	34

Est

Est igitur IG fere 68°. Quoniam itaque uni gradui respondent 15 milliaria Germanica; erit longitudo spatii, quod occupat penumbra 1020 milliarium Germanicorum.

Patet vero intra spatium, quod per problema præsens determinatur, contineri quoque in meditullio spatium, ab umbra plenaria occupatum, si quod datur, cujus longitudo per probl. 102. (§. 1036) invenitur.

DEFINITIO 94.

1059. ***Ecliptica in disco Terræ*** est linea recta, quæ repræsentat intersectionem plani eclipticæ & disci Terræ.

COROLLARIUM.

1060. Cum ecliptica sit circulus sphæræ maximus (§. 171); idem cum centro sphæræ mundanæ (§. 15 *Sphæric.*), consequenter Terræ centrum habet (§. 10), ac ideo per centrum disci Terræ transit (§. 1013).

DEFINITIO 95.

1061. ***Via penumbræ*** est recta, quam centrum penumbræ in disco Terræ describit. Dici etiam solet ***via Lunæ a Sole.***

COROLLARIUM.

1062. Quoniam centrum umbræ idem est cum centro penumbræ, si qua datur umbra; via penumbræ est etiam via umbræ.

SCHOLION.

1063. *Si Sol aut potius Terra quiesceret, nec una cum Luna secundum eclipticam, etsi motu multo tardiore, progrederetur versus eandem plagam, nimirum ab occidente versus orientem; via penumbræ eadem foret cum orbita Lunæ. Enimvero ob motum Solis seu Terræ proprium in ecliptica accidit, ut sit diversa: id quod sequente theoremate demonstratur.*

THEOREMA 41.

1064. ***Via penumbræ diversa est ab orbita Lunæ & sub majore angulo, quam orbita Lunæ, ad eandem inclinatur, angulo tamen constante.*** Tab. XIV. Fig. 110.

DEMONSTRATIO.

Ponamus NM esse eclipticam, NO orbitam Lunæ, in N nodum ascendentem & angulum adeo ONM inclinationem orbitæ lunaris ad eclipticam. Ponamus porro Solem & Lunam in ipso nodo N conjungi & interea, dum Luna in orbita sua pervenit ad L, Solem ex N progredi in S; Luna a Sole recedere videtur per rectam SL. Jam cum motus Lunæ a Sole idem sit, sive Sol una cum Luna versus eandem plagam progrediatur, sive Sol quiescat & Luna differentia celeritatum progrediatur; ponamus Solem in Nodo quiescere & Lunam differentia celeritatum secundum eclipticam moveri. Ducatur itaque per centrum Lunæ L recta PH ecli-

eclipticæ NM parallela & in nodo N erigatur perpendicularis NP. Demittatur etiam ex L ad NM perpendicularis NI. Erit NI=PL (§. 226 *Geom.*), consequenter cum NI designet motum Lunæ secundum eclipticum (§. 237. 241), etiam PL eundem designabit. Fiat LK æqualis ipsi NS motui Solis secundum eclipticam; erit PK differentia motuum Solis & Lunæ secundum eclipticam, & KL parallela ipsi NS (§. 257 *Geom.*), consequenter Luna a Sole in nodo S quiescente recedere videbitur per rectam NK. Quamobrem recta NK=SL (§. 257 *Geom.*) erit via penumbræ, quam adeo diversam esse ab orbita Lunæ NO patet. *Quod erat unum.*

Jam angulus LSI æqualis est angulis LNS & NLS simul sumtis (§. 239 *Geom.*), consequenter major est inclinatione orbitæ Lunaris ad eclipticam LNS. Quare cum angulus KNS sit ipsi LSI æqualis (§. 233 *Geom.*); erit etiam KNS inclinatio viæ penumbræ ad eclipticam major inclinatione orbitæ lunaris ad eandem. *Quod erat alterum.*

DEFINITIO 96.

Tab. XIV. Fig. 110. 1065. *Inclinatio viæ penumbræ* est angulus KNM, quem via penumbræ KN cum ecliptica NM in nodo N efficit.

(*Wolfii Math: Tom. 3.*).

PROBLEMA 105.

1066. *Invenire inclinationem viæ penumbræ.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur motus Solis & motus Lunæ horarius ad datum tempus secundum eclipticam (§. 968).
2. Inferatur: ut motus Lunæ secundum eclipticam ad differentiam motuum Lunæ ac Solis secundum eandem; ita inclinatio orbitæ lunaris ad inclinationem viæ penumbræ.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente (§. 1064): erit PL motus Lunæ secundum eclipticam, PK differentia motuum Solis ac Lunæ secundum eandem. Jam anguli PKN & PLN sunt anguli, sub quibus in distantiis PL & PK spectatur PN, adeoque magnitudines apparentes ejusdem objecti in diversis distantiis (§. 207. 208 *Optic.*). Quamobrem cum anguli isti sint valde exigui; erit angulus PLN ad angulum PKN uti PK ad PL (§§. 212 *Optic.*). Constat ex demonstratione theo-

rematis præcedentis, rectas PL & NI esse parallelas. Est igitur angulus PKN ipsi KNM, hoc est, inclinationi viæ penumbræ (§.1065), & PLN ipsi LNI, hoc est, inclinationi orbitæ lunaris æqualis (§. 233 *Geom.*). Quamobrem inclinatio orbitæ lunaris LNM est ad inclinationem viæ penumbræ KMN ut motuum Lunæ ac Solis secundum eclipticam differentia PK ad motum Lunæ secundum eandem PL. *Q.e.d.*

PROBLEMA 106.

Tab. XIV. Fig. 111. 1067. *Invenire angulum, quem circulus latitudinis in dato Eclipticæ puncto efficit cum via penumbræ.*

RESOLUTIO.

Sit NI ecliptica, NK via penumbræ, quæ licet arcus circuli sit, in disco tamen Lunæ perinde ac ecliptica instar lineæ rectæ repræsentatur, & KNI inclinatio viæ penumbræ. Cum arcus KI tanquam pars circuli latitudinis cum ecliptica NI efficiat rectum ad I (§. 237), præter angulum rectum dantur in Δ KNI angulus KNI & latus NI. Invenitur itaque angulus NKI, quem efficit circulus latitudinis cum via penumbræ, (§. 121 *Sphær.*).

DEFINITIO 97.

1068. In eclipsi terrestri *motus horarius* est pars viæ penumbræ, quam centro penumbræ intra unius horæ spatium Luna conficit.

DEFINITIO 98.

1069. Recta ex centro disci T in viam penumbræ NM perpendiculariter ducta dicitur *Arcus latitudinarius*, cum ex adverso recta TO in centro disci ad eclipticam EL perpendicularis designet ipsam latitudinem Lunæ in O tempore veræ copulæ seu conjunctionis Lunæ cum Sole. Tab. XIV. Fig. 112.

COROLLARIUM 1.

1070. Arcus adeo latitudinarius respondet arcui inter centra, quo supra in eclipsibus lunaribus & solaribus fuimus usi (§.945).

COROLLARIUM 2.

1071. Quando centrum penumbræ pervenit in O, conjunctio vera accidit; quando vero in C constituitur, obscuratio maxima est.

COROLLARIUM 3.

1072. Si arcus latitudinarius TC fuerit æqualis summæ semidiametrorum disci Terræ atque penumbræ vel hoc aggregato major; nulla datur eclipsis Terræ. In utroque enim casu penumbra Lunæ Terram minime ferit, adeoque nullus datur in hemisphærio Terræ illuminato locus, quod

quod liqua luminis parte privetur, consequenter nulla est eclipsis Terræ (§. 1011).

COROLLARIUM 4.

1073. Si arcus latitudinarius TC fuerit minor aggregato ex semidiametro disci Terræ & semidiametro penumbræ; penumbra Terræ superficiem ferit, adeoque aliqua superficiei pars lumine solari privatur, consequenter Terra alicubi eclipsatur.

COROLLARIUM 5.

1074. Si denique arcus latitudinarius TC fuerit minor aggregato ex semidiametro disci & semidiametro umbræ; umbra per discum Terræ movetur, adeoque idem alicubi plene obscuratur.

THEOREMA 42.

1075. *Qui in umbra Lunæ constituuntur, eclipsin Solis vident totalem; qui vero in penumbra constituuntur, nonnisi partialem, tanto tamen majorem, quo centro penumbræ propiores sunt.*

DEMONSTRATIO.

Qui enim in umbra Lunæ constituuntur, ad eos nulli prorsus radii Solis directi pertingere possunt. Nihil igitur Solis vident (§. 42 Optic.), sed Sol ipsis totus tegitur (§. 122 Optic.). Sol igitur totus iisdem obscuratus videtur, consequenter eclipsin Solis vident totalem (§. 982). *Quod erat primum.*

Enimvero qui in penumbra constituuntur, ad eos ex aliqua tantummodo disci solaris parte radii nulli pertingere possunt, cum tamen ex reliqua ad eos propagentur. Aliquam igitur tantummodo Solis partem non vident, vident vero reliquam (§. 42 Optic.), consequenter Luna ipsis tantummodo aliquam disci solaris partem occultat, ac ideo eclipsin vident Solis nonnisi partialem. *Quod erat secundum.*

Quodsi vero schema delineare volueris, facile constabit, quo quis umbræ, consequenter centro penumbræ fuerit propior, eo majorem Solis partem a Luna eidem occultari. Atque adeo eclipsis partialis tanto videbitur major, quo quis centro penumbræ fuerit propior. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

1076. Quando igitur Selenitæ vident eclipsin Terræ, alicubi locorum in Terra videtur eclipsis solis.

COROLLARIUM 2.

1077. Quamobrem si arcus latitudinarius TC fuerit æqualis aggregato ex semidiametro disci Terræ & semidiametro penumbræ, vel eodem major; nullus datur in Terra locus-

cus, ubi aliqua videtur eclipsis Solis (§. 1072).

COROLLARIUM 3.

1078. Quando arcus latitudinarius TC fuerit minor aggregato ex semidiametro disci Terræ & semidiametro penumbræ; alicubi Terrarum videtur eclipsis Solis (§. 1073).

COROLLARIUM 4.

1079. Quando arcus latitudinarius fuerit minor aggregato ex semidiametro umbræ; alicubi Terrarum videtur eclipsis Solis totalis (§. 1074).

COROLLARIUM 5.

1080. Quando denique arcus latitudinarius fuerit major aggregato ex semidiametro disci & semidiametro umbræ, vel eidem æqualis, minor tamen aggregato ex semidiametro disci atque penumbræ; nullibi Terrarum eclipsis Solis totalis est (§. 1074), sed alicubi Terrarum nonnisi partialis (§. 1078).

COROLLARIUM.

1081. Quoniam tam umbra, quam penumbra per superficiem terræ ob occasu in ortum movetur; in omnibus illis locis, per quæ umbra incedit, eclipsis Solis totalis est, in ceteris, per quæ penumbra serpit, partialis est. Sed quia umbræ & penumbræ non omnia loca, quæ in alterutram incidunt, eodem tempore involvuntur; eclipsis quoque non omnibus in locis, in quibus videtur, eodem temporis momento incipit ac definit, nec totalis, ubi datur, obscuratio eodem momento accidit.

PROBLEMA 107.

1082. *Terminos eclipsium terrestrium definire.* Tab. XIV. Fig. 112.

RESOLUTIO.

Eadem est quæ superius in Sole & Luna (§. 995), nisi quod hic arcus latitudinarius inter centra TC sumitur sequalis semidiametris apparentibus disci atque penumbræ, cum ultra distantiam a nodo, quæ eidem respondet, nulla eclipsis alicubi Terrarum videri possit.

PROBLEMA 108.

1083. *Invenire arcum latitudinarium* TC *una cum arcu* CO *ad momentum copulæ.*

RESOLUTIO.

Cum in momento copulæ centrum penumbræ sit in O ex datis in △ TCO ad O rectangulo, quod ob arcus exiguos TC & TO pro rectilineo haberi potest, detur latitudo Lunæ TO in copula & angulus TOC (§. 1067); reperientur latera TC & CO (§. 36 *Trigon.*).

PROBLEMA 109.

1084. *Dato arcu* CO *distantia maximæ obscurationis in* C *a copula*

pula in O, invenire tempus obscurationis maximæ.

RESOLUTIO.

1. Quoniam in momento, quo copula contingit, centrum penumbræ est in O, quando vero obscuratio maxima, in C; ex motu Lunæ a Sole horario invento (§. 968), quæratur tempus, quo centrum penumbræ arcum CO percurrit.
2. Hoc tempus a momento copulæ subducatur, vel eidem addatur ut supra (§. 971): ita prodibit tempus obscurationis maximæ.

PROBLEMA 110.

1085. *Dato arcu latitudinario* TC *& semidiametris apparentibus disci* TI *atque penumbræ* HI, *invenire tempus dimidiæ obscurationis una cum initio ac fine eclipsis universalis.*

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo TCH ad C rectangulo hypothenusa TH, æqualis aggregato ex semidiametris apparentibus penumbræ & disci, atque arcu latitudinario TC, invenitur portio viæ penumbræ CH, quam centrum penumbræ a momento dimidiæ obscurationis usque ad finem eclipseos describit (§. 36 *Trig.*).
2. Ex motu Lunæ a Sole horario inveniatur tempus, quo centrum penumbræ rectam CH percurrit: quod erit tempus dimidiæ durationis.
3. Hoc tempus ad momentum conjunctionis addatur, ita prodit eclipsis initium, hoc est, momentum, quo alicubi terrarum Sol videtur eclipsari (§. 1075).
4. Idem a momento conjunctionis subtrahatur, ita relinquitur finis eclipsis, hoc est, momentum, quo nullus amplius in Terra locus est, ubi Sol eclipsari videtur (§. *cit.*).

THEOREMA 43.

1086. *Elevatio poli super disco Terræ est æqualis declinationi Solis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim Sol imminet centro disci Telluris T, per quod transit planum eclipticæ, eundem secans in EL; arcus inter Solem & horizontem interceptus est quadrans seu 90°. Est vero etiam arcus inter polum & æquatorem interceptus quadrans (§. 49). Quamobrem si utrinque auferas arcum inter Solem & polum interceptum; relinquentur utrinque arcus æqua- Tab. XV. Fig. 113.

 les

les (§. 91 *Arithm.*). Enimvero qui inter Solem & æquatorem intercipitur arcus, declinatio Solis est (§. 76); qui vero inter polum & horizontem interjacet; elevatio poli (§. 99. 71). Patet itaque elevationem poli super disco Terræ esse declinationi Solis æqualem. *Q. e. d.*

DEFINITIO 96.

Tab. XV. Fig. 113. 1087. *Meridianus universalis* TQ appellatur, qui transit per Solem centro T imminentem seu Zenith ipsius disci & polum P (§. 72).

COROLLARIUM.

1088. Quoniam discus Terræ respectu Telluris tanquam immotus spectatur, Terra vero motu vertiginis convertitur ab occasu versus ortum, alia aliaque continuo loca ad Meridianum universalem deferuntur, & in iis locis dato momento meridies est, qui sub eodem constituuntur; in eo autem Sol verticalis est, qui in centro disci ex Luna apparet.

PROBLEMA III.

1089. *Data distantia polorum eclipticæ & declinatione Solis invenire positionem Meridiani universalis* TQ *super disco Terræ.*

RESOLUTIO.

Ex centro disci Terræ erigatur perpendicularis TR; erit in R polus eclipticæ (§. 25. *Sphær.*). Sit polus æquatoris seu mundi in P; erit RP distantia polorum eclipticæ & æquatoris, quæ per observationes datur (§. 179) & angulus ad P rectus quia RP distantia. Et quia elevatio poli PQ est declinationi Solis æqualis (§ 1086) quæ datur *per hypoth.* ideo in triangulo RPQ invenitur ex datis cruribus RP & PQ hypothenusa RQ (§. 120 *Sphær.*): quæ cum sit mensura anguli RTQ; hoc ipso positio Meridiani universalis TQ super disco Terræ innotescit.

PROBLEMA 112.

1090. *Determinare locum, cui Sol dato momento est verticalis.*

RESOLUTIO.

Ostendemus in Geographia loca Telluris per longitudinem & latitudinem determinari, quarum illa est distantia a quodam Meridiano tanquam primo assumto versus occasum secundum æquatorem; hæc vero declinationi stellarum in Astronomicis respondet. Itaque

1. quæratur ad datum tempus locus Solis (§. 720) & ejus declinatio (§. 198), quæ erit latitudini loci æqualis.
2. Tempus a meridie convertatur in gradus æquatoris (§. 212), ita

ita prodibit arcus æquatoris inter Meridianum datum, in quo tempus numeratur, & Meridianum loci, cui Sol isto momento verticalis est, interceptus. Atque ita patet, cuinam Terræ loco momento isto Sol fit verticalis.

COROLLARIUM.

1091. Quoniam Solis centrum toto eclipseos tempore centro disci T imminere supponitur; patet quomodo determinentur loca, quæ ab initio eclipseos Terræ usque ad finem ejusdem a centro disci repræsentantur.

PROBLEMA 113.

Tab. XV. Fig. 113. 1092. *Determinare loca Terræ, quibus Sol oritur & occidit in principio ac fine eclipseos terrestris.*

RESOLUTIO.

Quoniam Sol oritur in aliquo loco, quando vertigine Telluris in peripheriam disci Terræ defertur (§.1013), eclipsis vero Terræ incipit, quando peripheria penumbræ peripheriam disci primum contingit (§.1075); in principio eclipseos terrestris Sol oritur eo in loco, qui est in contactu I penumbræ atque disci Terræ. Quamobrem per ea, quæ ad problema præcedens dicta sunt, non alia re opus est, quam ut loci I longitudo & latitudo determinetur.

1. Demittatur ex T ad viam penumbræ HM perpendicularis TC in △ TCH ad C rectangulo datur arcus latitudinarius TC (§.1083) & recta TH composita ex semidiametro disci TI & semidiametro penumbræ HI (§. 1015. 1056): invenitur angulus HTC (§. 38 *Trig.*), cui si addatur angulus CTP (in alio casu subtrahendus, quod pro re nata perse patet), prodibit angulus ITQ, consequenter arcus IQ innotescit.
2. In △ IQP in superficie sphærica Telluris sphærico & ad Q rectangulo dantur, latera QP (§. 1086) & IQ *vi num.* 1. adeoque reperitur IP complementum latitudinis loci I ad quadrantem (§. 119 *Sphæric.*), quæ adeo innotescit, si arcum IP ex 90° subducas.
3. In eodem △ IQP ex iisdem datis reperitur angulus IPQ (§. 117 *Sphær.*), cujus complementum ad duos rectos IPT est mensura distantiæ meridianorum loci I & alterius, ubi Sol verticalis est.
4. Quæratur igitur locus cui Sol verticalis est (§. 1090): cujus adeo longitudine cognita, innotescet

tescet quoque longitudo loci I, consequenter cum jam longitudo & latitudo ejusdem nota sit, in superficie Terræ sphærica determinatus est.

5. Quodsi jam assumas punctum contactus penumbræ ac disci in fine eclipseos terrestris, eodem prorsus modo determinatur locus, cui Sol in fine eclipseos occidit.

PROBLEMA 114.

Tab. XV. Fig. 113. 1093. *Determinare locum Terræ, ubi Sol totus eclipsatus oritur, vel occidit.*

RESOLUTIO.

Quodsi in I fuerit contactus umbræ & disci Terræ; evidens est, in I esse locum, ubi Sol totus eclipsatus oritur. Et similiter si in O fuerit contactus umbræ & disci Terræ; patet in O esse locum, ubi Sol totus eclipsatus occidit. Quamobrem cum cetera omnia eadem maneant, quemadmodum in problemate præcedente, nisi quod HI hic sit semidiameter umbræ, quæ ibidem erat semidiameter penumbræ, problema præsens eodem prorsus modo resolvitur, quo præcedens.

PROBLEMA 115.

1094. *Determinare locum Terræ, ad quem dato quolibet momento ante vel post eclipseos medium centrum penumbræ pervenit.* Tab. XV. Fig. 113.

RESOLUTIO.

1. Dato motu Lunæ horario a Sole investigetur pars viæ penumbræ GC, quam centrum penumbræ tempore a medio eclipseos dato describit. Ita enim dabitur punctum G, cujus longitudo & latitudo investiganda, ut constet, quinam sit ille locus Terræ, in quo tunc centrum penumbræ & umbræ, si qua datur, hæret.

2. Datis itaque arcu latitudinario TC (§. 1083) & portione viæ penumbræ GC in △ rectilineo ad C rectangulo invenitur GTC (§. 38 *Trigon.*) & latus TG (§. 36 *Trigon.*).

3. Addatur (vel si res ita ferat, dematur) angulus CTP ex superioribus notus (§. 1083. 1089) modo invento GTC, ut prodeat angulus GTP.

4. Quodsi semidiameter disci Terræ sumatur pro sinu toto, erit GT sinus circuli verticalis, qui transit per Solem centri T imminentem & per Zenith loci G. Quamobrem si inferatur: ut semidiameter disci TE ad rectam,

TG

TG, ita sinus totus, ad sinum distantiæ Solis a vertice. Ita enim hæc ipsa distantia reperitur.

5. Jam in triangulo sphærico in superficie Terræ GTP datur PF distantia Solis a polo, quæ complemento declinationis ejusdem æqualis, TG distantia ejusdem a vertice loci dati G modo inventa & angulus GTP paulo ante repertus. Invenietur itaque angulus GPT & GP distantia loci a polo P (§.165.163. *Sphær.*).

6. Quodsi ergo GC ex quadrante auferas, relinquitur distantia loci G ab æquatore, seu latitudo ejusdem.

7. Et quia angulus GPT est differentia meridianorum loci G, ad quod pervenit centrum umbræ, & loci, ubi Sol verticalis est; longitudo autem loci, ubi Sol verticalis est, inveniri potest (§. 1090); igitur dato angulo GPT datur etiam loci G longitudo.

PROBLEMA 115.

1095. *Viam umbræ atque penumbræ in superficie globi terrestris, vel mappa quadam geographica delineare.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur plura loca, ad quæ ante vel post medium eclipseos (*Wolfii Math. Tom.* 3.) pervenit centrum umbræ vel penumbræ (§.1094), una cum locis ubi eclipsis incipit & finitur (§. 1092.1093): ita enim via, quam in superficie Terræ, centrum umbræ percurrit designari poterit.

2. Quodsi jam in distantia semidiametrorum umbræ atque penumbræ ducantur eidem utrinque parallelæ; totum prodibit superficiei terrestris spatium, quod tam umbræ, quam penumbræ successive involvitur.

THEOREMA 44.

1096. *Pars diametri Solis loco intra penumbram dato a Luna tecta est ad diametrum Solis integram ut distantia loci a margine penumbræ ad latitudinem penumbræ.* Tab. XV. Fig. 114.

DEMONSTRATIO.

Sit latitudo penumbræ GH, locus intra penumbram datus M; erit ejus a margine distantia MG. Ducatur ex M recta MN, quæ Lunam contingat & diametro Solis in N occurrat. Patet, in M partem diametri solaris AN tegi. Quoniam NM Lunam tangit non procul a puncto E, ubi radii AG & BH eandem contingunt; punctum contactus E pro eodem haberi pot-

eft. Erunt itaque anguli HEG & AEB, itemque AEN & MEG inter se æquales (§. 156 *Geom.*), cumque latitudo penumbræ HG sit diametro Solis AB parallela, etiam HGE = EAB (§. 233 *Geom.*). Eft itaque EG : EA = GH : AB = GM : AN §.267 *Geom.* & 167 *Arithm.*). Quamobrem GH : GM = AB : AN (§. 173 *Arithm.*) vel invertendo AN : AB = GM : GH (§. 169 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

1097. Data ratione partis rectæ AN ad integram diametrum AB, si diameter concipiatur in 12 digitos divisa, tanquam as in suas partes; inveniri jam porro poterit, quot digitis dato in loco M Sol obscuretur (§. 302 *Arithm.*).

SCHOLION.

1098. *Hactenus dicta sufficiunt, ut intelligatur, quomodo eclipsium terrestrium calculus institui possit, qui eclipsium solarium calculus universalis est. Ut vero porro intelligatur, quomodo inde calculus specialis pro loco quodum dato deducatur, sequentia addere lubet.*

PROBLEMA 116.

1099. ***Ad datum tempus invenire distantiam loci dati* M *a centro penumbræ* K.**

RESOLUTIO.

Sit EL ecliptica, NQ via penumbræ. Erigatur ex centro disci T recta TR ad eclipticam perpendicularis; erit in O centrum penumbræ in momento veræ copulæ & TO latitudo Lunæ vera eodem momento & KO distantia centri penumbræ a vera copula. Sit denique in P polus. Itaque Tab. XV. Fig. 115.

1. in triangulo rectilineo TKO cum dentur latera KO & TO ac præterea angulus TON, quem circulus latitudinis cum via penumbræ efficit (§. 1089), reperietur angulus OTK (§. 40. *Trigon.*) & inde porro latus TK (§. 36 *Trig.*).
2. Porro in triangulo, quod in superficie Terræ sphæricum PTM dantur latera PT complementum declinationis Solis & PM complementum latitudinis loci & angulus TPM, quem circulus horarius efficit cum Meridiano. Invenitur ergo distantia Solis a vertice arcus TM (§. 165 *Trigon. Sphær.*), cujus sinus æqualis eft rectæ TM, sumta semidiametro disci TR pro sinu toto, atq; angulus PTM (§ 165 *Sphær.*).
3. Jam cum angulus PTR ex positione Meridiani universalis in disco notus sit (§. 1089), si in præsente

sente casu ab angulo PTM subtrahatur PTO, relinquetur angulus OTM, qui angulo KTO *n.* 1. invento additus prodit angulum KTM.

4. Datis jam in triangulo rectilineo KTM lateribus KT (*num.* 1) & TM (*num.* 2), una cum angulo intercepto KTM (*num.* 3), reperitur tandem KM distantia loci dati M a centro penumbræ K dato tempore (§.40. 36 *Trig.*).

COROLLARIUM.

1100. Quodsi a distantia loci dati M a centro penumbræ K semidiametrum penumbræ subtrahas, relinquetur distantia marginis penumbræ a dato loco tempore dato.

PROBLEMA 117.

1101. *Invenire initium & finem eclipseos in dato loco.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad duo tempora, quæ horæ intervallo a se invicem dissident, distantia centri penumbræ a loco dato (§. 1099) & inde porro distantia marginis penumbræ a dato loco.

2. Quoniam in utroque casu margo penumbræ est loco occidentalior; differentia distantiarum modo repertarum erit accessus marginis penumbræ intra horam unam.

3. Quamobrem si fiat: ut accessus horarius marginis penumbræ ad distantiam hujus marginis a loco dato tempore primo, ita scrupula secunda unius horæ ad intervallum temporis inter tempus primum assumtum & initium eclipseos intercedens.

4. Quodsi tempus modo inventum addas tempori primo, quo distantia marginis penumbræ a loco dato fuit computata; prodibit tempus, quo eclipsis Solis in dato loco incipit.

5. Non absimili modo finem eclipseos reperire licet.

SCHOLION.

1102. *Plura de calculo speciali jam non addimus, cum in superioribus jam communem methodum computandi eclipses pro dato loco tradiderimus.* Cel. de la Hire *in Tabulis methodum istam explicat* & Cl. Bosius (h) *exemplo luculento eandem quoad singulas partes illustrat. Si locum datum in discum Terræ projicere velis absque calculi molestia, ope scalæ eum in finem paratæ eclipseos quantitatem, initium, finem & tempus maximæ obscurationis definire licet, quemadmodum docet* Johannes Keil (i).

(h) in Commentatione in Eclipsin Terræ 1733 d. 13 Maji.
(i) in Introduct. ad veram Astronom. lect. 14. p. 163 & seqq.

OBSERVATIO 66.

1103. *Luna fere semper eandem sui faciem nobis ostendit, nisi quod partes quædam in limbo occidentali quodam temporis intervallo nunc in conspectum veniant, nunc eidem sese subducant.*

DEFINITIO 97.

1104. Motus iste Lunæ, quo in limbo occidentali nunc partes quædam antea visæ occultantur, nunc aliæ, quæ occultatæ fuerunt, iterum reteguntur, *Motus librationis* dici solet.

SCHOLION.

1105. *Phænomena hujus motus multo studio observavit* Hevelius *& prolixam de eodem epistolam ad* R. P. Ricciolum *perscripsit, quam Astronomiæ suæ Reformatæ* (k) *totam inseruit.*

THEOREMA 45.

Tab. XV. Fig. 116. 1106. *Si Luna interea temporis, dum orbitam suam peragrat, motu æquabili circa axem convolvitur, motu libratorio cieri videtur, cujus duæ periodi intra unam Lunæ revolutionem seu mensem periodicum absolvuntur.*

DEMONSTRATIO.

Sit DLP orbita Lunæ elliptica, cujus centrum in C, focus, in quo Terra hæret, in T, Apogæum in A, Perigæum in P. Patet, si Luna fuerit in suo Apogæo, meridianum ED per centrum Terræ T transire & Lunam faciem FEG Terræ obvertere. Quodsi motus vertiginis esset nullus & Luna in orbita sua motu æquabili incederet; cum diameter ED sibi continuo maneat parallela, ubi quadrantem AL absolvit, erit punctum D in F & E in G, adeoque diameter in FG ipsi lineæ apsidum AP parallela. Movetur autem diameter ED ob motum vertiginis Lunæ motu angulari circa centrum & ob motum huncce æquabilem quarta parte mensis periodici angulum rectum emetitur. Quare si in orbita sua motu æquabili incederet, punctum E jam esset in I & D in K, adeoque eadem Meridiani diameter ad centrum C tenderet, consequenter Luna spectatori in centro C constituto eandem semper sui faciem obverteret. Enimvero quando Luna pervenit in L, tempus, quo ex Apogæo H ad punctum L pervenit, est ut area ellipseos LTD (§. 822.633), quæ quarta ellipseos parte LAC major, adeoque majus quarta parte mensis periodici. Punctum igitur E ultra I promotum, quod

(k) lib. 3. c. 12. f. 169 & seqq.

quod, ipsi I in Apogæo respondebat. Quamobrem in F jam in conspectum veniunt partes, quæ Luna in Apogæo versante inconspicuæ erant. Dum vero Luna in Perigæum pervenit, si nullus esset motus vertiginis, punctum D jam foret in O & E in R, consequenter Telluri in T partem sui aversam jam obverteret. Sed quia motu vertiginis æquabili circumvertitur & dimidio mensis periodici spatio orbita dimidia describitur (§.§. *cit.*), diameter Meridiani ED integrum semicirculum absolvit, atque adeo in O denuo constituitur punctum E & in R punctum D, quemadmodum in Apogæo, sicque partes, quæ in F in conspectum productæ fuerant, eidem rursus eripiuntur & Luna eandem sui faciem Telluri in T obvertit, quæ in Apogæo eidem obvertebatur. Patet itaque si Luna motu vertiginis convertitur menstruo spatio, quo orbitam suam ellipticam percurrit, eam motu librationis cieri debere (§. 1103). *Quod erat unum.*

Jam vero non minus liquet, quæ de Luna ab Apogæo usque ad Perigæum mota ostensa fuere, eadem quoque ad eandem applicari posse, dum a Perigæo ad Apogæum restituitur. Librationis igitur periodi duæ, intervallo unius mensis periodici absolvuntur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

1107. Quoniam de Sole (§.422) & plerisque planetis primariis constat (§. 496), quod motu vertiginis gaudeant; naturæ ordini conveniens videbatur, Lunam quoque circa axem suum converti. Quamobrem cum experientia constet, eidem motum librationis convenire (1103. 1104), motus vero librationis oriatur ex motu revolutionis inæquabili in orbita & motu æquabili vertiginis mensis periodici intervallo absoluto (§. 1106); quin Luna motu vertiginis moveatur & motus hic æqualis sit motui revolutionis in orbita dubitandum non est.

SCHOLION.

1108. *Nostrum jam non est pluribus edocere, quomodo phænomena librationis particularia per motum vertiginis Lunæ motui revolutionis æqualem demonstrentur. Discussio enim prolixior est, quam ut eandem ferat præsens institutum.*

CAPUT IX.

DE

STELLIS FIXIS ET NOVIS ATQUE COMETIS.

THEOREMA 46.

Tab. XI. Fig. 92. 1109. *Stellæ fixæ sunt terra nostra majores.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ ſtellæ C & D, quarum una videatur in horizonte ortivo, altera in occiduo; C autem ipſi D diametraliter oppoſita. Quam primum ſtella D pervenit in C, ſtella C apparet in D. Sed cum eadem celeritate utraque moveatur, dum ſtella C arcum CHD deſcribit, ſtella D per arcum ipſi CDH æqualem incedens erit in F. Quare ſi ſtellæ C & D ſunt terra minores, nondum videbitur in horizonte ortivo ſtella D, dum altera C ad occiduum pervenit; quod cum experientiæ repugnet, neceſſe eſt ſtellas in L & S conſtitutas & a ſpectatoribus A & B una integras viſas, eſſe terra AB majores. *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

1110. *Fixæ ultra Saturni ſphæram a Tellure diſtant.*

DEMONSTRATIO.

Fixæ a Saturno terricolis tegi posſunt (§. 542): eſt ergo Saturnus terricolis propior fixis, adeoque fixæ ultra Saturni ſphæram a Tellure diſtant. *Q. e. d.*

OBSERVATIO 67.

1111. *Stellæ fixæ, primæ licet magnitudinis, etiam per teleſcopia exquiſita ſpectatæ, veluti puncta lucentia ſine omni viſibili magnitudine refulgent, ipſo* Hugenio (l) *obſervante.*

SCHOLION.

1112. *Deficiunt adeo data ad magnitudinem fixarum accurate æſtimandam.*

OBSERVATIO 68.

1113. *Per teleſcopia ſtellæ longe plures quam nudo oculo conſpiciuntur.*

(l) in Coſmotheoro lib. 2. p. 717 & ſeqq. Oper. Var. Tom. 2.

tur. *Ita* Gallilæus (m) *in plejadibus* 36 *stellas nudo oculo inconspicuas notavit, in ense & cingulo Orionis* 80, *in nebulosa capitis Orionis* 21, *in nebulosa præsepis* 36 *numeravit.* Rheita (n) *in sidere Orionis* 2000 *detexit, in plejadibus ultra* 188. *Quemadmodum autem stellæ nebulosæ non sunt nisi stellarum minutarum conglomeratio; ita similiter integra via lactea innumerarum stellularum congeries deprehenditur. Cum* Hugenius A. 1656 *stellam mediam in ense Orionis per tubum inspiceret; pro una* 12 *sese ipsi obtulerunt. Ex his tres pene inter se contiguæ una cum* 4 *aliis velut trans nebulam lucebant, ita ut spatium circa ipsas multo illustrius appareret reliquo omni cælo: quod cum apprime serenum esset ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam esset prospectus. Et mirum sane hoc phænomenon constans in cælo deprehendit* (o).

COROLLARIUM 1.

1114. Non adeo credibile est, fixas omnes eidem superficiei inhærere.

COROLLARIUM 2.

1115. Unde porro probabile fit, fixas alias aliis minores apparere, quia longius a terra distant, non quod revera minores sint.

PROBLEMA 118.

1116. *Invenire distantiam fixarum a terra.*

RESOLUTIO.

Quodsi parallaxis fixarum duorum ad summum scrupulorum secundorum (§. 608) omni dubio careret, haud difficulter earum a Terra distantia definiretur. Sit enim AD semidiameter orbis annui, Sirius in R, Tellus in A; erit angulus parallacticus ARD unius circiter scrupuli secundi, adeoque AD ad AR ut sinus unius secundi ad sinum totum (§. 2 *Trigon.*), hoc est, per Canonem *Pitisci* ut 48481 ad 10000000000 seu fere ut 1 ad 206262. Quare cum AD sit 22000 (§. 906), reperietur AR = 4537764000. Tanta nimirum est distantia fixarum propiorum, admissa parallaxi Solis *Cassiniana* & parallaxi fixarum duorum scrupulorum secundorum. Tab. X. Fig. 93.

Aliter.

Christianus Hugenius, pro summa

(m) in Nuncio sidero p. 31 32.
(n) in Oculo Enochi atque Eliæ lib. 4. c. 1. membro 7. f. 177.
(o) in Systema Saturn. p. 8.

ma, qua pollebat, ingenii vi, methodum conjecturalem excogitavit (p) rationem distantiæ fixarum ad distantias Solis investigandi: Nimirum

1. Tubi vacui 12 circiter pedes longi aperturam alteram occlusit lamella tenuissima, in cujus medio tam exiguum erat foramen, ut lineæ partem duodecimam non superaret, & oculo alteri aperturæ admoto particula Solis cerneretur, cujus diameter ad totius diametrum erat ut 1 ad 182.
2. Cum ea particula multo clarior adhuc appareret, quam noctu Sirius, foramini globulum vitreum ejusdem cum ipso diametri objecit & contecto undique capite per tubum in Solem intuens non minorem ejus claritatem quam Sirii deprehendit.
3. Quoniam itaque tum diametrum Solis $\frac{1}{152}$ ejus particulæ centesimæ octogesimæ secundæ, quam per foramen exiguum prius conspexerat, deprehendebat (§. 256 *Dioptr.*); ductis in se $\frac{1}{152}$ in $\frac{1}{182}$ diametrum Solis reperit $\frac{1}{27664}$ ejus, quam nudo oculo in cœlo contuemur.
4. Quia hinc constabat, Solem appariturum instar Sirii, si eousque contrahatur ejus diameter, ut nonnisi $\frac{1}{27664}$ ejus amplius videatur; evidens erat distantiam Solis a Terra tum fore ad præsentem ut 27664 ad 1 (§. 212 *Optic.*), & diameter apparens, quam nunc intuemur, divisa per 27664 prodebat diametrum Solis in tanta distantia 4. scrupulis tertiis paulo majorem.
5. Cum denique mox ostensuri simus, probabile esse, quod Sirius Sole non minor existat; Sirii quoque distantia a terra ad distantiam Solis ab eadem concluditur ut 27664 ad 1 & diameter apparens 4 circiter scrupulorum tertiorum.
6. Quodsi ergo distantia Solis a terra fuerit 34377 semidiametrorum terrestrium (§. 904); erit distantia fixarum 951005328 semidiametrorum terrestrium. Si vero eam cum *Cassino ponas* 22000 semidiametrorum terrestrium (§. 905); erit distantia proxima fixarum 608608000 semidiametrorum terrestrium.

COROLLARIUM.

1117. Cum distantia media Saturni a terra sit 326894 semidiametrorum terrestrium (§. 904); si distantia

(p) in Cosmotheoro lib. 2. p. 717 & seqq. Oper. var. Vol. 2.

tia priori 4537554000 utaris, spatium inter Saturnum & fixas erit 446012894; sin posterior magis arriserit, idem deprehendetur 950678434 semidiametrorum terrestrium: quod posterius spatium nimis forsan enorme videri poterat. Quodsi distantiam mediam Saturni cum *Cassino* facias 210000 semidiametrorum terrestrium; erit in casu primo spatium inter Saturnum & fixas 4537554000, in posteriori 6083934377 semidiametrorum terrestrium.

SCHOLION.

1118. *Quamvis autem desint principia satis firma, unde distantia fixarum a terra satis tuto concludi possit; illud tamen dubio caret, quod vastum admodum spatium inter Saturnum & fixas intercedat: alias enim parallaxis orbis annui foret sensibilis admodum, quæ tamen aut nulla, aut certe valde exigua deprehenditur. Facile id experieris, si distantiam fixarum* AR *in triangulo* ARD *non multo majorem distantia Saturni assumas & inde angulum* ARD *investiges.*

Tab. X. Fig. 93.

THEOREMA 48.

1119. ***Fixæ fulgent proprio lumine.***

DEMONSTRATIO.

Longius enim a Sole distant Saturno (§. 1110) ipsoque minores multo apparent (§. 113). Cum (*Wolfii Math: Tom. 3.*). tamen hoc non obstante multo clarius fulgeant Saturno, ita ut ipsorum lumen non imminuatur, quemadmodum planetarum, ubi per telescopia conspiciuntur; a Sole lumen mutuari nequeunt. Quoniam itaque præter Solem non aliud in cœlo comparet corpus lucidum, unde lumen ipsorum derivari possit; necesse est ut proprio lumine fulgeant. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

1120. Sunt adeo fixæ totidem Soles.

COROLLARIUM 2.

1121. Sole igitur nostro non minores esse probabile existit.

COROLLARIUM 3.

1122. Unde porro colligitur, circa quamlibet fixam moveri perinde ac circa Solem nostrum planetas sive tellures, hoc est, corpora opaca, quæ lumine ipsarum illustrantur, calefiunt & fœcundantur.

SCHOLION.

1123. *En vastitatem universi, quæ omnes imaginandi vires longe excedit. Utrum vero infinitum sit, nec ne; ego non definivero.* Keplerus *equidem* (q) *negat, circa quamlibet fixam dari systema planetarium nostro simile (quod asseruerat* Jordanus Brunus*), quia duplo aut triplo longius distantes duplo aut triplo minores apparere deberent, positis*

(q) in Epit. Astron. lib. I. p. 35 & seqq.

tis earum magnitudinibus æqualibus, atque ita stellæ paucissimæ & in maxima magnitudinum differentia viderentur. Enimvero non modo Hugenius *jam notavit* (r) *ignes & flammas ex iis distantiis videri, unde alia corpora sub æque exiguis angulis comprehensa evanescunt, propter luminis scilicet intensitatem; verum etiam mihi videtur theorema opticum de diametris objectorum apparentibus earum ab oculo distantiis reciproce proportionatis tantum locum habere, quamdiu diameter objecti ad ejus distantiam rationem non nimis magnam habet. Notandum præterea etiam in vicinia objecta minuta videri sub iis angulis, si fuerint luminosa vel fortiter illuminata, sub quibus obscuriora evanescunt.*

OBSERVATIO 69.

1124. *Inter fixas quædam comparent, quæ certas apparitionis & disparitionis periodos amant. Pertinet huc stella in collo Ceti, quam* Miram *appellat* Hevelius, *a* Bayero *pro stella semper apparente habita*, sed a Johanne Phocylide Holwardo A. 1638 *pro nova agnita &* A. 1640 *peculiari libello descripta. Evanescentem is observavit* A. 1639 *circa æstatem, & septima Decembris eodem præcise loco ac situ, quo ante annum conspecta fuerat, redeuntem* A. 1641 d. 23 Sept. *post alteram disparitionem reversam vidit* Fullenius, *annis subsequentibus* 1647 & 1648 *eandem stellam observavit* Jungius, *ab anno* 1648 *litteris* Jungii *ad* Eichstadium *datis excitatus* Hevelius (s). *Aliam ipsi similem in collo Cygni detexit* Kirchius (t) *a* Bayero *littera* χ *notata & inter stellas apparitionis constantis relata, quæ periodum admodum regularem* $404\frac{1}{2}$ *dierum observat. Illud autem notatu dignum est, stellarum illarum magnitudinem sub initium apparitionis crescere, sub finem vero decrescere, & per tubos adhuc videri, quando nudis oculis non amplius apparent. Alias ejusmodi stellarum observationes reperire licet in Transactionibus Anglicanis* (u).

COROLLARIUM.

1125. Has stellas esse e numero planetarum, qui circa fixas tanquam Soles suos periodos suas absolvunt, probabile foret (*§.* 1122), modo concipi posset, quo modo corpora lumine mutuatitio splendescentia in tanta distantia videri possint.

SCHOLION.

1126. *Vir acumine singulari præditus* Cel. de Maupertuis (x) *demonstravit,*

(r) in Cosmoth. lib. 2 p. m. 110.
(s) Vid. Historiola Stellæ Miræ, quam Mercurio in Sole viso subjunxit Hevelius.
(t) Miscell Berolin. p. 205. & seqq.
(u) Vide J. Lowthorp. in Epit. Transact. Vol. 1. p. 247 & seqq.
(x) Discours sur les differentes figures des Astres p. 77 & seqq.

vit, vi motus vertiginis astrorum fieri posse, ut induant figuram disceam, ac inde rationem reddit, cur nunc appareant, nunc iterum dispareant.

OBSERVATIO 70.

1127 *Observantur quoque nonnunquam stellæ temporaneæ, quæ, ubi disparuerunt, non amplius redire videntur. Talem circa* A. 125 *ante Christum natum observavit* Hipparchus, *ansam inde arripiens loca fixarum determinandi, ut posteris constaret, an stellæ abirent nascerenturve* (y). *Eminet inter illas stella nova, quæ ab* A. 1572 *usque ad* A. 1574 *in cathedra Cassiopeæ effulsit eidem toto apparitionis tempore loco veluti affixa. Figura erat prorsus rotunda, qualis reliquas stellas ornat: magnitudo initio major, postea successive decrescebat. Mense nimirum Novembri* A. 1572, *quo primum conspecta, Venerem perigæam, per Decembrem Jovem acronychium æmulabatur interdiu conspicua. Mense Januario anni sequentis stellis fixis primæ magnitudinis paulo major cernebatur, ad quam mense Februario & Martio accedebat. Aprili & Majo ad fixas secundi honoris accedebat, successive ita decrescens per Junium, ut in Julio & Augusto stellis tertiæ magnitudinis par esset. Per Septembrem magis magisque extenuata Octobri & Novembri quartas in ordine repræsentabat; in fine vero anni ejusdem & Januario sequentis quintas; in Februario sextas: donec tandem mense Martio ob exilitatem suam conspectui se prorsus eriperet. Color non minus variabilis erat, quam magnitudo. Ab initio enim albicanti, claro splendentique lumine, gratoque & jucundo vultu Veneri atque Jovi assimilabatur: circa initium verni temporis nitens jubar in Martiam quandam rutilantiam degenerabat, ita ut instar Aldebaran (seu oculi Tauri) rubesceret. Mense Majo albedinem quandam sublividam induebat, qualis Saturni esse solet: quam usque ad finem apparitionis retinuit, successive tamen obtusiorem factam. Ad ultimum usque evanescentiæ terminum scintillabat* (z).

SCHOLION.

1128. *De natura stellarum novarum nihil asserere audeo: quamvis enim suspicer, eas in Cometarum numerum referendas esse, qui in systematibus planetarum superioribus circa Soles suos,* hoc

(y) Vid. Plinius lib. 2. c. 26. hist. natur.
(z) Vid. Tycho de Brahe Progymnas. lib. 1. c. 3. p. m. 300 & seqq.

hoc est fixas, feruntur, nondum tamen adsunt rationes ad idem persuadendum sufficientes.

OBSERVATIO 71.

1129. *Notatu digniores sunt observationes* Montanarii *atque* Cassini (a) *quorum ille disparuisse notavit fixas constantis alias apparitionis; hic novas similes ante in cœlo non visas detexit.*

SCHOLION.

1130. *Optandum sane foret, ut, qui observationibus rerum cœlestium incumbunt, ad istiusmodi mutationes diligentius attenderent, ut tandem certo constaret corporum mundi totalium ortus & interitus.*

DEFINITIO 98.

1131. *Cometæ* sunt stellæ plerumque caudatæ, subito in cœlo exortæ & per aliquod tempus apparentes, postea rursus disparentes, toto autem apparitionis tempore Planetarum instar in propriis orbitis dietim certo intervallo promoveri solitæ.

PROBLEMA 119.

1132. *Cometæ in cœlo apparentis longitudinem & latitudinem determinare.*

RESOLUTIO.

1. Observetur distantia cometæ a duabus stellis fixis notæ longitudinis & latitudinis (§. 215).
2. Inde per calculum trigonometricum eruatur Cometæ longitudo & latitudo, prout ostendimus supra probl. 27 (§. 740).

Aliter.

Quodsi sine instrumentorum apparatu locum Cometæ admodum accurate determinare voluerimus, utendum est methodo ingeniosa per *extensionem filarem a Longomontano* (b) adhibita. Nimirum

1. Filum extensum aut regula oculo ita objiciatur, ut Cometa (aut quodcunque aliud phænomenon cœleste) K cum duabus stellis fixis notæ longitudinis ac latitudinis E & G in eadem recta appareat. Tab. X. Fig. 94.
2. Situs regulæ vel fili ita mutetur, ut idem cometa K cum duabus fixis aliis H & F in eadem recta appareat, quarum itidem longitudo ac latitudo ex fixarum catalogo (§. 244) nota est.
3. Sint jam A & C poli eclipticæ,

BO

(a) in Transact. Anglic. n. 73. p. 2201. 2202.

(b) Sphæric. lib. 2. probl. 5. f. 117. Astron. Dan.

BO ecliptica, erit AE complementum latitudinis BE stellæ E (§.236.240), AG aggregatum ex quadrante AD & latitudine DG stellæ G (§.cit.) & BD mensura anguli BAD (§. 25.31 *Sphæric.*) longitudinum stellarum B & G differentia (§. 241). Datis adeo in triangulo EAG duobus lateribus AE & AG cum angulo intercepto A invenitur latus EG (§.163 *Sphæric.*) & angulus EGA (§.165 *Sphær.*).

4. Porro cum angulus ad D sit rectus (§. 237) & angulus LGD modo repertus, DG vero latitudo stellæ G, reperietur in triangulo LGD angulus GLD (§. 121 *Sphær.*) & latus DL (§.124 *Sphær.*).

5. Similiter in triangulo FHC erit FC complementum latitudinis FM stellæ F (§.236.240), HC aggregatum ex quadrante CI & latitudine HI stellæ H (§. *cit.*), MI vero mensura anguli FCH (§. 25. 31 *Sphæric.*) differentia longitudinum stellarum F & H (§. 241). Datis adeo in triangulo FCH duobus lateribus FC & CH cum angulo comprehenso FCH invenitur latus FH (§.163 *Sphær.*) & angulus HFC (§ 165 *Sphæric.*): quo dato, datur etiam HFA (§. 43 *Sphæric.*).

6. Porro, cum angulus ad M sit rectus (§.237), angulus MFN seu HFA modo repertus, FM vero latitudo stellæ F (§.236.240); reperietur in triangulo FMN angulus MNF (§. 121 *Sphær.*) & latus MN (§. 124 *Sphær.*).

7. Addantur latera DL & MN ante inventa & aggregatum subtrahatur ex DM differentia longitudinum stellarum F & G (§. 241) ut relinquatur NL.

8. Datis jam in triangulo NKL latere NL & angulis adjacentibus N & L, suis quippe verticalibus MNF & GLD ante repertis æqualibus (§. 43 *Sphæric.*), reperietur latus NK (§. 161 *Sphær.*).

9. Denique datis in triangulo KNP ad P rectangulo latere KN & angulo N, invenitur latus KP (§. 116 *Sphær.*), quod est Cometæ latitudo (§.236) & latus NP (§. 127 *Sphæric.*), quod ipsi MN supra invento additum, efficit arcum MP ulterius longitudini stellæ F addendum, ut prodeat longitudo Cometæ P.

Exemplum *Longomontanus* exhibet in ♂, quem A. 1610 d. 10 Decembris hor. 9 vespertina observavit in recta cum lucida arietis H & poste-

riore in dorso Ceti F, itemque in alia recta cum extrema alæ Pegasi E & ea, quæ est in cuspide narium Ceti G. Prima stella apud *Bayerum* littera α, secunda littera ι, tertia littera γ, quarta denique littera λ notatur. Fuit tum

	Longitudo	Latitudo
Stellæ α	2° 14′ ♉	9° 57′ B.
ι	6 20 ♈	16 55 A.
γ	3 46 ♈	12 35 B.
λ	9 39 ♉	7 50 A.

Calculò rite instituto reperitur longitudo ☄ ad tempus observationis 23° 59′ ♈, Latitudo vero ejus borealis 1° 12′.

SCHOLION.

1133. *Non absimili modo calculus instituitur, si stellæ omnes fuerint boreales, vel australes, nisi quod schema paulo aliter sit describendum. Exemplum dedit* Mœstlinus *in demonstratione Astronomica loci stellæ novæ in Cassiopæa* (c).

COROLLARIUM.

1134. Cognita longitudine ac latitudine Cometæ reperitur ejus ascensio recta & declinatio (§. 260).

PROBLEMA 120

1135. *Data Cometæ longitudine & latitudine una cum longitudine Solis, invenire eius a Sole distantiam.*

RESOLUTIO.

Cum in triangulo CIS ad I rectangulo (§. 237) detur latitudo Tab.
Cometæ CI & differentia longitu- X.
dinum IS Solis S & Cometæ C; in- Fig.
venietur distantia Cometæ a Sole 95.
CS (§. 120 *Sphær.*).

E. gr. *Hevelius* (d) A. 1652 d. 20 Dec. hor. 7 vespertina reperit longitudinem Cometæ tunc fulgentis 68° 24′ 24″, Latitudinem 30° 49′ 1″. Sed longitudo Solis ex ejus calculo tunc erat 269° 39′ 12″, quæ ex illa integro circulo aucta subducta relinquit IS 158° 45′ 12″. Est itaque

Log. Cosin.	IS	99694293
	IC	99338961

Log. Cosin. CS +99033254, cui in tabulis respondent 53° 10′ 18″.
Est ergo CS 143° 10′ 18″.

PROBLEMA 121.

1136. *Datis longitudinibus* H *&* I *atque latitudinibus* CH *&* KI *Cometæ ad duos dies se invicem immediate sequentes, invenire arcum* KC, *quem Cometa motu diurno proprio descripsit.*

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo KMC da- Tab.
tur angulus cognominis, quem X.
nempe metitur arcus IH longitu- Fig.
dinum differentia (§. 31 *Sphæric.*), 96.
una cum lateribus KM & CM, quæ latitudinum KI & CH complementa

(c) p. 31. Legitur etiam apud Tychonem Progymnasm. lib. 1. p. 545.
(d) Cometogr. lib. 1. Sect. 8. f. 80.

ta existunt; reperietur arcus KC (*§*. 163 *Sphær.*).

E. gr. *Hevelius* observavit A. 1653 d. 2 Jan. h. 6 vesp. 27′ 50″ longitudinem H Cometæ tunc temporis fulgentis 20° 28′ ♉, latitudinem borealem CH 27° 9′; sed d. 3 Jan. h. 6 vesp. 47′ 30″ longitudinem I 20° 10′ 41″ ♉, latitudinem IK 29° 2′ 40″; erit IH 17′ 19″, KM 60° 57′ 20″, CM 62° 50′. Demisso itaque perpendiculo KF erit

Log. Cos. M	199999945		
Cot. MK	97445460		
Tang. MF	102554485, cui in		
tabulis respondent	60°	57′	18″
Sed MC	62	49	60
Ergo FC	1	52	42

Quare porro

Log. Cos. MK	96861784
Log. FC	99997665
	196859449
Log. Cos. MF	96861860
Log. Cos. CK	99997589, cui in
tabulis respondent	88° 5′ 10″.
Est ergo CK	1° 54′ 50″.

Quodsi latitudo altera fuerit australis CH, altera borealis GN, latus GM est aggregatum ex latitudine GN & quadrante NM; arcus vero GC reperitur prorsus ut ante.

SCHOLION.

1137. *Præstat observationes pluribus diebus a se invicem distantes assumere, & motum iis competentem indagare, siquidem Cometæ motum distinctius cognoscere libuerit.*

PROBLEMA 122.

1138. ***Datis duabus Cometæ longitudinibus*** H & I ***una cum latitudinibus respondentibus*** KI & CH, ***invenire nodum*** O ***orbitæ Cometæ*** C ***& angulum ad nodum*** COH. Tab. X. Fig. 96.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo MCK lateribus MC & MK una cum angulo intercepto M, quem nempe metitur longitudinum datarum differentia HI (*§*. 31 *Sphæric.*), inveniatur angulus MKC (§. 165 *Sphæric.*), qui ex 180° subductus relinquit angulum OKI (§. 43 *Sphæric.*).
2. Datis adeo porro in triangulo OKI ad I rectangulo (§. 137) latitudine IK & angulo OKI modo invento, reperitur angulus IOK (§ 121 *Sphær.*) & arcus OI (§. 124 *Sphær.*) quo longitudini I addito, habetur nodi O distantia a o ♈.

SCHOLION.

1139. *Non absimili modo ex datis duabus ascensionibus rectis & declinationibus motus Cometæ proprius, inclinatio orbitæ ejus ad æquatorem & punctum, in quo ea æquatorem intersecat, invenitur.*

PRO-

PROBLEMA 123.

Tab. X. Fig. 96. 1140. *Investigare tempus, quo Cometa per eclipticam trajecit, dato ejus motu ad singulos dies apparitionis una cum latitudine* IK *ad tempus primæ apparitionis, ejus longitudine* I *ad idem tempus & distantia Nodi* O a o ♈.

RESOLUTIO.

1. A loco nodi O subtrahatur longitudo Cometæ I, ut relinquatur arcus OI.
2. Datis adeo in triangulo KOI ad I rectangulo (§. 237) lateribus KI & OI invenitur arcus KO (§. 120 *Sphæric.*), quem a primo apparitionis die usque ad eclipticam emetiri debuit Cometa.
3. Arcus KO inventus conferatur cum arcubus ab initio apparitionis ad datum usque aliquod momentum singulorum dierum, descriptis, qui per problema 119 (§. 1136) jam supputati supponuntur: ita enim innotescit tempus quæsitum, adhibita, si quidem opus fuerit, uti in Astronomia moris est, parte proportionali.

SCHOLION.

1141. *Non absimili modo investigatur tempus, quo Cometa per æquatorem transiit.*

PROBLEMA 124.

1142. *Viam Cometæ in globo designare.* Tab. XV. Fig. 117.

RESOLUTIO.

1. Observetur per extensionem filarem Cometa A cum fixis C & B, itemque cum duabus aliis D & E in eadem recta, quemadmodum supra præcepimus (§. 1132).
2. In superficie globi cœlestis, quo stellæ quatuor B,C,D,E depictæ sunt, a stella B usque ad alteram C, & a stella D usque ad stellam E extendatur aliquod filum: ubi enim bina hæc fila sese mutuo intersecant, ibi erit ad tempus datum locus Cometæ.
3. Quodsi ad plures dies loca Cometæ hoc pacto determinentur, via ejusdem in superficie globi cœlestis delineabitur.

COROLLARIUM 1.

1142. Quodsi loca stellarum in superficie globi accurate fuerint designata & in locis Cometæ designandis omnem adhibueris diligentiam, filum duobus locis applicatum transibit etiam per cetera omnia, sicque innotescit ea esse in peripheria circuli maximi, consequenter Cometam ex Terra in peripheria circuli maximi moveri videri.

COROLLARIUM 2.

1143. Quodsi adeo filum per duo loca

loca transiens extendatur, donec eclipticam & æquatorem intersecet; patebit locus Nodi & inclinatio orbitæ cometæ, simulque punctum æquatoris, per quod transiit aut transiturus est.

SCHOLION.

1144. *Nemo non videt, per extensionem filarem etiam locum planetæ ad datum tempus in superficie globi delineari posse.*

PROBLEMA 125.

1145. ***Datis ascensione recta Solis & ejus a meridiano elongatione atque declinatione & ascensione recta Cometæ veris, invenire parallaxin altitudinis Cometæ.***

RESOLUTIO.

1. Observetur altitudo Cometæ quadrante exactissime diviso summa, qua fieri potest, cum cura.
2. Ad idem tempus ex datis supputetur altitudo vera (§. 300).
3. Altitudo visa a vera subtrahatur: quod relinquitur, est parallaxis quæsita (§. 367).

E. gr. D. 24 Decemb. h. 1. 44′ 15″ mat. *Hevelius* Dantisci observavit altitudinem Cometæ A. 1652 30° 53′. Juxta eundem tum erat Ascensio recta Solis 273° 16′ 42″, ejus elongatio a meridiano 206° 3′ 45″, ascensio recta Cometæ 56° 49′ 44″, declinatio ejus 19° 0′ 4″. Reperitur adeo altitudo vera 31° 15″ 11″, unde subducta visa 30° 53′, relinquitur parallaxis 22′ 11″.

(*Wolfii Math. Tom.* 3.)

SCHOLION.

1146. *Operosius multo* Tycho de Brahe *ex distantiis eruit parallaxin* (c). *Enimvero methodis hisce nihil efficitur, nisi parallaxis fuerit scrupulo primo major. Si subtilius exquirenda, utendum est methodo* Cassiniana *superius exposita* (§. 897).

COROLLARIUM.

1147. Data altitudine Cometæ & ejus parallaxi invenitur distantia a terra in semidiametris terrestribus (§. 888).

PROBLEMA 126.

1148. ***Invenire utrum Cometa habeat parallaxin sensibilem nec ne.***

RESOLUTIO.

1. Quoniam motus Cometæ circa finem apparitionis fit adeo tardus, ut intra aliquot horarum intervallum pro immoto haberi possit; per extensionem filarem exploretur cum quibusnam fixis vertici proximus sit in eadem recta.
2. Ubi horizonti occiduo appropinquat, exploretur denuo per ex-

(c) Progymnasm. lib. 2. p. 106. & seqq.

extensionem filarem, num adhuc cum iisdem stellis in eadem recta deprehendatur. Quodsi enim eundem habeat ad fixas easdem situm prope horizontem, quem tenet in loco altiori; parallaxis sensibilis in Cometa, perinde ac in fixis (§. 384), nulla erit.

Patet Cometam quoque cum fixis in eadem recta observari posse prope horizontem ortivum & prope verticem, prout occasio tulerit.

SCHOLION.

1149. *Hoc pacto etiam exploratur, num planetæ habeant parallaxin sensibilem, si eo tempore fiat observatio, quo stationarii deprehenduntur.*

PROBLEMA 127.

Tab. IV. Fig. 44. 1150. ***Determinare distantiam*** TR, ***ultra quam Cometa aut aliud phænomenon in æquatore positum a centro Terræ removeri debet, ut datum tempus super horizonte apparente*** HR ***consumat.***

RESOLUTIO.

1. Tempus dimidiæ moræ super horizonte apparente HR convertatur in gradus & scrupula æquatoris (§. 212), ut habeatur arcus VR, consequenter angulus HTR (§. 57 *Geom*).

2. Datis jam in triangulo HTR ad H rectangulo latere TH seu terræ semidiametro, quæ sit 1, vel per ea, quæ in Geographia ostendentur, 860 milliarium Germanicorum, & angulo HTR modo invento, reperitur TR (§. 36 *Trig.*).

E. gr. Sit tempus dimidiæ moræ super horizonte 5 h. 55', seu tempus moræ integræ 11 h. 50', erit VR seu HTR 88° 45', adeoque

Log. Sin. R	83387529
TH	29344984
Sin. tot.	100000000
Log. TR	45957455, cui in

magno Canone Briggii respondent 39423.

Est igitur TR 39423 milliarium Germanicorum seu 46 fere semidiametrorum terrestrium. Quodsi mora super horizonte dimidia ponatur 5 h. 57' 30'', seu integra 11 h. 55', erit VR 89° 22' 30''; unde TR reperitur 91 semidiametrorum terrestrium, adeoque Lunæ distantia a terra major (§. 906).

OBSERVATIO 72.

1151. Hevelius (f) *observavit, Cometam A.* 1652 d. 26 Dec. *cum duabus stellulis in pede Persei una ortum esse & occidisse, adeoque per* 17 *horas supra horizontem extitisse. Et similis mora Cometarum aliorum super horizonte ab aliis annotata est.*

CO-

(f) Cometogr. lib. 3 f. 151.

COROLLARIUM.

1152. Fieri adeo nequit, ut Cometæ in aëre nostro commorentur, sed ingenti admodum intervallo a centro Terræ remoti sint opus est, immo cum inter moram fixarum & Cometarum super horizonte nulla differentia sensibilis intercedat, ultra Lunam a terra distare debent (§. 379).

SCHOLION.

1153. *Absurda igitur est Aristotelicorum hypothesis de Cometarum exhalationibus e terra in atmosphæram elevatis ortu.*

OBSERVATIO 73.

1154. *Idem* Hevelius (g) *eodem die hor. 6 circiter vespertina Cometam in eadem fere linea recta cum duabus fixis in pede Persei notavit, non tamen æquali omnino spatio ab invicem remota, distantia nimirum inter Cometam & calcaneum Persei 1° 45′, inter calcaneum & sequentem sinistri pedis 2° 10′ existente. Eodem die h. 6. 16′ vesp.* Bullialdus *Parisiis in eadem recta linea vidit ambas sinistri pedis Persei & Cometam calcaneo quam alteri propiorem & ipso borealiorem & occidentaliorem, satisque diu Cometam in hoc positu perstitisse deprehendit, ita ut circa hor. 9 non multum rectam istam lineam superaverit. Immo hoc ipsum plane phænomenon eodem die etiam Regiomonti, Hafniæ, Monasterii, Lugduni Batavorum, Bruxellis, Boniæ in Provincia Galliæ alibique observatum esse*, Hevelius *autor est. Similiter* A. 1577. d. 16 Novembr. *eandem Cometæ a Vulture in circulo verticali distantiam observavit Uraniburgi* Tycho; *Pragæ autem* Hugenius (h).

COROLLARIUM.

1155. Cum Luna parallaxin admodum sensibilem habeat (§. 892), Cometa autem tunc temporis parallaxi sensibili fere destitutus fuerit (1154. 368); dubio sane caret, quod ultra regionem Lunæ a terra distiterit.

SCHOLION.

1156. *Idem sane manifestum est, ex comparatione parallaxium Lunæ atque Cometæ* (§. 1146).

OBSERVATIO 74.

1157. *Cometarum motus proprius omni tempore, quo accuratius in eundem inquisiverunt Astronomi, admodum regularis deprehensus: prout observationes* Tychonis (i), Hevelii (k), Cassini (l) *aliorumque abunde loquuntur. Quodsi cum* Cassino *motus Cometarum, qui diversis temporibus apparuerunt, proprios inter se conferre libuerit; mira inter veteres & recentiores observabitur convenientia. E. gr.* Co-

(g) loc. cit. f. 154.
(h) Tychonis Progymnasm. lib. 2. c. 6. p. 24.
(i) Progymnasm. lib. 2. p. 86.
(k) Cometogr. lib. 2. f. 105. & seqq.
(l) in libello de Cometis.

Cometa A. 1680 *iisdem prorsus legibus motus, quas Cometa* A. 1577 Tychoni *observatus respexit. Uterque nimirum sub initium apparitionis motu diurno* 4° 16′ *versus orientem gavisus est: eadem in utriusque motu notantur decrementa, cumque prior evanesceret, minuta nonnisi* 16, *posterior in eodem statu* 18 *per diem conficere visus est. Uterq; eclipticam circa* 21° ♒ *intersecavit, & sub eodem fere angulo, cum æquatore angulum* 33° *effecit & prope trecentesimum a* 0 ♈ *gradum per eum trajecit. Uterque sub iisdem plane stellis fixis incessit. Eadem fere semita fuit Cometarum annorum* 1665. 1672 *&* 1677 *: immo omnium Cometarum notatur quasi aliquis Zodiacus, cujus Constellationes* Cassinus *his versiculis comprehendit:*

Antinous, Pegasusque, Andromeda, Taurus, Orion,
Procyon atque Hydrus, Centaurus, Scorpius, Arcus.

Nec id negligi debet, quod, cum Cometa anni 1680 *&* 1681 *nudis oculis non amplius appareret, per telescopium tamen videri adhuc potuerit & quidem facilius per telescopium* 4 *pedum, quam per aliud excellentius* 20 *pedum, ipsoque Jove major apparuerit.*

COROLLARIUM.

1158. Cum Cometæ adeo regularem observent motum; corpora mundo coæva esse videntur, quæ in orbitis valde eccentricis feruntur, adeoque non videntur, nisi quando noctu circa perihelium versantur.

SCHOLION.

1159. *Atque hinc apparet, quod vastum illud spatium inter Saturnum atque fixas interjectum* (§. 1117), *non sit prorsus inane; sed motibus Cometarum locum concedat.*

OBSERVATIO 75.

1160. *Inprimis vero notatu dignum est, quemadmodum annotavit* Newtonus (m), *Cometas secundum ordinem signorum progredientes sub exitu apparitionis omnes esse aut solito tardiores, aut retrogrados, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores, si Terra vergit ad oppositionem: & contra, qui pergunt contra ordinem signorum esse justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem, & justo tardiores vel retrogrados, si Terra sita est ad partes contrarias.*

COROLLARIUM.

1161. Quoniam planetæ eodem modo retrogradi cernuntur (§. 562) ob motum Telluris annuum circa Solem (§. 585. 587) & præterea motus eorundem proprius ex eadem causa inæqualitati obnoxius est (§. 775); Come-

(m) in Princip. Phil. nat. mathem. Tom. 3. lem. 4. p. 478. edit. nov.

Cometas in regione planetarum versari, dum conspectui nostro sese sistunt, palam est.

SCHOLION.

1162. *Inæqualitas ista in planetis dicitur parallaxis orbis annui (§. 776), cum revera sit parallaxis, quæ in motum ipsorum redundat ob motum annuum Telluris circa Solem. Atque adeo patet ob parallaxin orbis annui, quam patiuntur Cometæ, fixæ non item (§. 608), innotuisse eorum in regionem planetarum descensum.*

LEMMA 6.

1163. *Si in ellipsi centrum a foco intervallo infinito removeatur, portio, cujus abscissa finita est, in parabolam degenerat.*

DEMONSTRATIO.

Sit axis transversus ellipsis$=a$, parameter$=b$; erit distantia foci a centro$=V(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab)$ (§. 482 *Anal.*). Quamobrem cum hæc sit infinita *per hypoth.* erit $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}ab=\infty^2$, seu quadratum hujus distantiæ erit infinities infinitum, consequenter si eandem dividas per quantitatem infinitam $\frac{1}{4}a$ *ex hypoth.* erit $a-b=\infty$, & hinc b respectu ipsius a infinite parva. Jam in ellipsi $y^2=bx-bx^2:a$ (§. 415 *Analys.*). Quamobrem cum x, quæ abscissam denotat, sit quantitas finita *per hypoth.* erit $bx^2:a$ quantitas infinite parva, adeoque respectu ipsius $bx=0$ (§. 3 *Analys. infin.*). Est itaque in casu præsente $y^2=bx$: quæ cum sit æquatio ad parabolam (§. 388 *Analys.*); portio ellipseos, quamdiu abscissa finita est, in parabolam degenerat. *Q. e. d.*

HYPOTHESIS 4.

1164. *Cometæ moventur in orbitis ellipticis valde eccentricis, circa Solem, qui in earum foco uno existit, ea lege, ut radius vector verrat areas tempori a Perihelio proportionales.*

COROLLARIUM.

1165. Quoniam orbita Cometarum admodum eccentrica (§. 1158), & portio, quam describunt, quamdiu apparent, valde exigua, cum nonnisi exiguo temporis spatio conspicui sint; orbita ipsorum tempore apparitionis in parabolam degenerat (§. 1164).

SCHOLION.

1166. Keplerus *trajectoriam Cometarum*, hoc est, *lineam, in qua incedunt, esse lineam rectam statuit* (n) *& in trajectoria rectilinea ex quibusdam locis observatis locum Cometæ per calculum eruere docuit* Cassinus. *Enimvero agnovit jam* Hevelius (o), *trajectoriam rectilineam non omnino satisfacere phæ-*

(n) Vid. Libri tres de Cometis

(o) Cometograph. lib. 9. f. 659.

phænomenis & in Linea parabolica cometas universos moveri sibi persuasit. Cum anno 1680 *ingens ille Cometa exoriretur,* Dœrffelius, *vir rerum astronomicarum peritissimus, ex observationibus loca Cometæ in orbita parabolica repræsentavit, in cujus foco est Sol, observatis legibus* Keplerianis. *Scriptum patrio idiomate editum paucis plagulis constat. Mox vero Vir summus* Newtonus (p) *idem accuratius demonstravit &* Hallejus (q) *docuit, quomodo loca Cometæ per calculum in orbita parabolica institutum erui possint. Nimirum quemadmodum de orbitarum ellipticarum veritate constat ex consensu calculi cum observationibus; ita quoque de Cometarum orbitis parabolicis ex eodem consensu certi reddimur. Tanto minus igitur nunc dubitari potest, Cometas esse corporum mundi totalium peculiare quoddam genus instar planetarum, cum eadem lege circa Solem moveantur, quemadmodum planetæ.*

OBSERVATIO 76.

1167. *Per telescopia si spectantur Cometarum capita, longe aliam sui faciem exhibent quam fixæ atque planetæ. Sane* Cel. Sturmius (r) *fatetur, se telescopium primum in Cometam anni* 1680, *deinde in ♃ ac vicinam ♀ & in Aquilæ Lyræque lucidas dirigentem, prunæ obscurius candenti, aut massæ interminatæ tristi ac fumido quasi lumine, in medio paulo magis, ad extrema minus, collustratæ potius, quam stellæ disco rotundo ac vivida luce corruscanti similem vidisse.* Hevelius (s) de Cometa A. 1661 *sequentia annotavit.* D. 3. Febr. *caput subflavi coloris, clarum & conspicuum, nullo tamen vibranti præditum erat lumine. In meditullio unum densum & subrufum referebat nucleum, ipsi Jovi propemodum æqualem: quem autem materia longe dilutior & tenuior cingebat.* D. 5. Febr. *caput aliquanto majus & clarius aurei coloris; lumen tristius, quam reliquarum stellarum apparebat. At vero nucleus ille unicus in diversas partes jam disjectus erat.* Die 6. Febr. *Cometa eundem fere adhuc referebat colorem, non dissimilem ei, paulo tamen obtusiorem, quem stella in humero aquilæ alias exhibet. Discus ex parte decreverat; nuclei autem plerique etiam minores existebant: quorum alius in parte disci inferiori ad sinistram præ reliquis omnibus multo densior clariorque corpore rotundo, instar luci-*

(p) in Princip. Phil. Nat. math. lib. 3. prop. 40. & seqq. p. 485 & seqq.
(q) in Synopsi Astron. Comet. quæ legitur in Transact. Anglic. n. 1883. p. 218. & Actis Erud. A. 1707. p. 267.
(r) in dissert. de Nat. Comet. c. 2. phæn. 12. p. 124 Tom. 2 Phil. Elect.
(s) Cometogr. lib. 7 f. 317.

lucidissimæ alicujus stellulæ extitit: quos nucleos alia materia, ut semper, omnino circumdabat. D. 7. Febr. *Caput a priore facie paululum recedebat, sic ut nucleus iste clarior non adeo jam esset conspicuus: interea tamen fere adhuc ejusdem erat coloris & magnitudinis.* D. 10. Febr. *caput jam aliquanto obscurius atque nuclei confusiores; in parte tamen inferiori clariores, quam in superiori: cujus alias magnitudo quoad nucleos pene erat eadem.* D. 13 Febr. *caput multum decreverat tam ratione magnitudinis, quam claritatis.* D. 17 Febr. *Cometa conspicuæ adhuc erat magnitudinis, etiam Luna splendente. Nuclei siquidem propemodum diametrum Veneris æquabant: etiam ratione luminis & coloris fere eandem speciem, nisi quod aliquanto turbidum & hebetudine languidum exhiberet.* D. 20 Febr. *totus Cometa ob Lunæ splendorem, una cum nucleis & materia circumstante pallidior & languidior videbatur.* D. 2. Mart. *satis adhuc conspicuus, magnitudine aliquot minutorum in diametro; non tamen omnino rotundus, adhæc circumcirca laceratus & dispersus existebat.* D. 10 Mart. *eandem fere præ se ferebat magnitudinem, nisi quod totum corpus cum nucleis obtusius tristiusque existeret.* D. 28 Martii *Cometa pallidissimus & tenuissimus, maxime vero ratione materiæ erat valde dispersus, ut nulli omnino nuclei discrete animadverterentur, quanquam magnitudo ejus parum decreverat.* Erhardus Weigelius, *cui Cometam* A. 1664 *una cum Luna & nubecula aliqua a Sole illuminata simul contueri datum est, advertit* (t), *quod Luna per tubum conspecta continuam exhibeat superficiem luminosam, Cometa vero non item, nubeculæ in vicinia horizontis a Sole adhuc illuminatæ simillimus.*

COROLLARIUM.

1168. Patet adeo, Cometas proprio lumine destitui, & hinc a Sole illustrari: id quod etiam inde confirmatur, quod dum a Terra recedunt ad Solem, decrescente diametro augeatur splendor.

SCHOLION.

1169. *Ex iisdem observationibus* Hevelius *aliique concludunt, Cometas ad instar macularum Solis, quibus nempe simillimi* (§ 411), *ex ejus exhalationibus seu fuliginibus concrescere*, Keplero (u) *calculum adjicientes, qui Cometas in æthere instar piscium in oceano magno numero gigni statuit, etsi non omnes in oculum incurrant, vel quia minores,* vel

(t) Vid. die Fortsetzung des Himmels-Spiegels c. 11. § 5. p. ..
(u) in ausführlichen Berichte von den Cometen des 1607ten Jahres.

vel quia interdiu super horizonte existunt. Quamvis autem hæc hypothesis probabilitate sua non destituatur, præsertim si observationes Hevelianæ *fuerint satis accuratæ; rationes tamen superius allatæ faciunt, ut in eorum sententiam magis propendeam, qui Cometas corpora mundo coæva esse statuunt, præsertim postquam vir summus* Newtonus (x) *ostendit, Cometam A.* 1680 *in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisse, si ex Solis & Planetarum exhalationibus constitisset. Si cœlum nobis in posterum aliquot adhuc Cometas spectandos exhibuerit; nullus dubito fore, ut tandem certiora de eorum natura tradantur.*

OBSERVATIO 77.

1170. Cassinus *autor est, Cometas annorum* 1665 *&* 1680, *cum* 22 *&* 23 *gradibus a Sole tantum distarent, pleno orbe fulsisse.*

COROLLARIUM.

1171. Cum adeo a Sole illuminentur (§. 1168); evidens est, Cometas annorum 1665 & 1680 supra Solem extitisse.

OBSERVATIO 78.

1172. *Caudæ Cometarum semper projiciuntur in partem a Sole aversam, etsi* Tycho *in Cometa A.* 1577 *&* Hevelius *in Cometa A.* 1652 *aliquam inclinationem calculo scrupulosius subducto, notaverint. Longitudo caudarum in uno Cometa diversis temporibus varia. Sane Cometæ, qui A.* 1680 *apparuit, cauda circa* 20 *Nov. observante* Sturmio (y) *gracilis satis & ad summum* 20 *gradus longa, mox stupenda plusquam* 60 *graduum longitudine per aliquot noctes conspicua fuit, deinceps autem indies fere magis magisque decrevit. Stellas fixas per caudas Cometarum tralucentes viderunt* Cysatus, Crügerus, Tycho, Keplerus, Schickardus, Hevelius (z). *Plerumque tamen caudæ stellas occultant.*

COROLLARIUM.

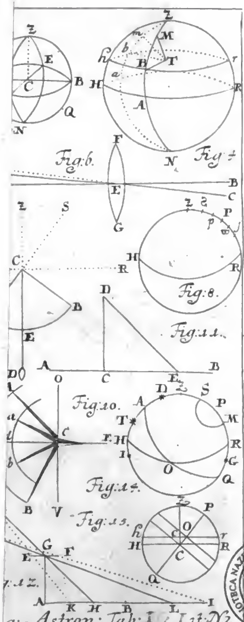
1173. Patet adeo, caudas Cometarum esse congeriem exhalationum e capite ascendentium.

SCHOLION.

1174. *Prolixius hoc adstruit* Newtonus (a) *& singularia eorum phænomena explicat, refutatis quoque opinionibus nonnullorum oppositis.*

FINIS.

(x) in Princip. Phil. natur. lib. 3. prop. 41 p. 508 edit. nov.
(y) Philos. Eclect. Tom 2 p. 133.
(z) Vid. Hevelii Cometogr. lib. 8 f. 516. 517.
(a) loc. cit. p. 509 & seqq.



g: Astron: Tab: I. Lit: N.2.

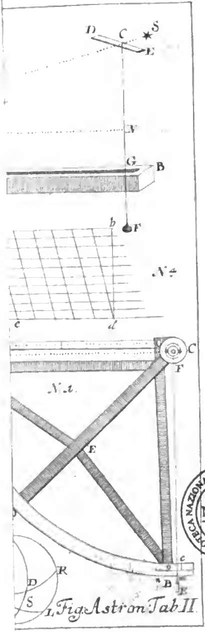


Fig. Astron. Tab. II.

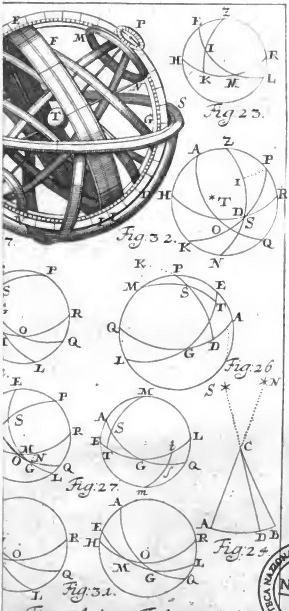


Fig: Astron: Tab: III. Lit: P 2.

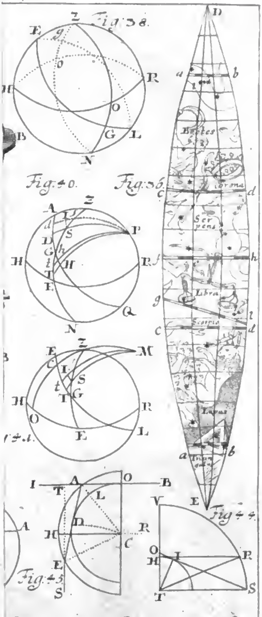
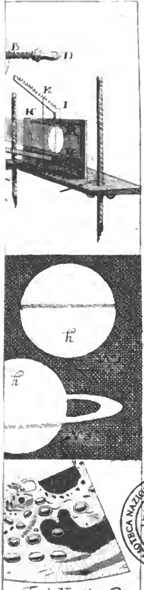


Fig: Astron Tab: IV Lit: Q 2.



n:Tab:V. lit:R 2

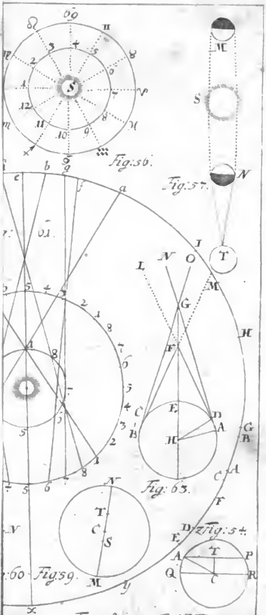


Fig: Astron: Tab: VI. Lit. S z.

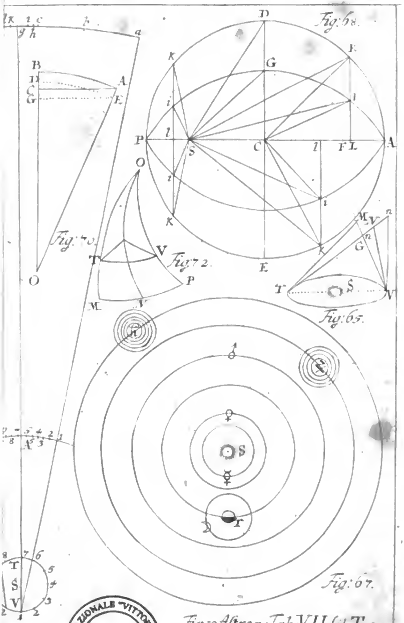


Fig: Astron: Tab: VIII. T 2.

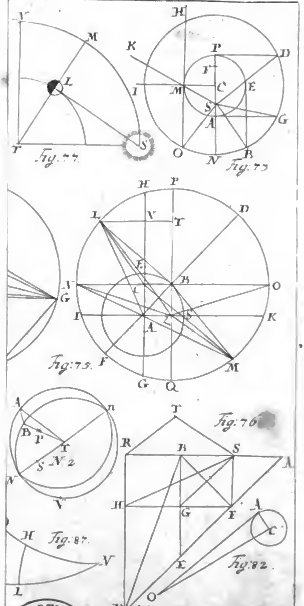


Fig: Astron: Tab: VIII Lit: V2



79.



Fig. 80.

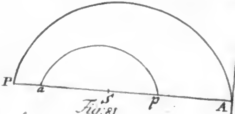


Fig. 81.

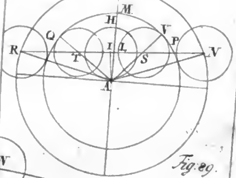


Fig. 89.

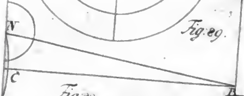
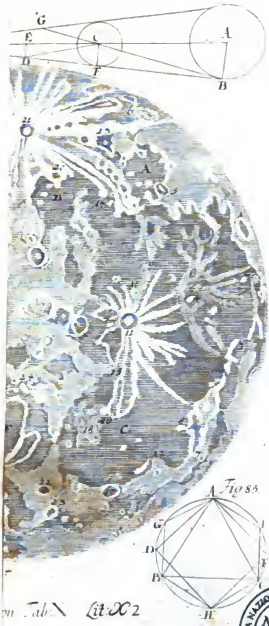


Fig. 88.

Figur: Astron: Tab: IX.


Fig 85.
Tab X
Lit: X 2


Cometa A. 1652 ab Hevelio observatus
2.

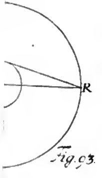
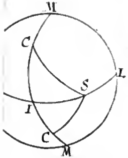
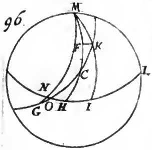


Fig. 93.



96.





Cometa A. 1652 ab Hevelio observatus.

Fig: Astron: Tab: XI Lit: Y 2.



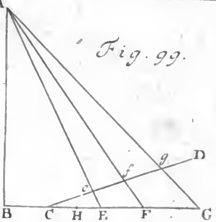
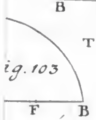


Fig. 99.



ig. 103

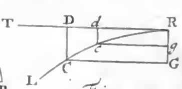
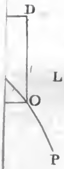


Fig. 98.



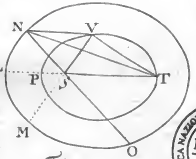


Fig. 102.

Fig. Astron. Tab. XII
Lit. Z 2.

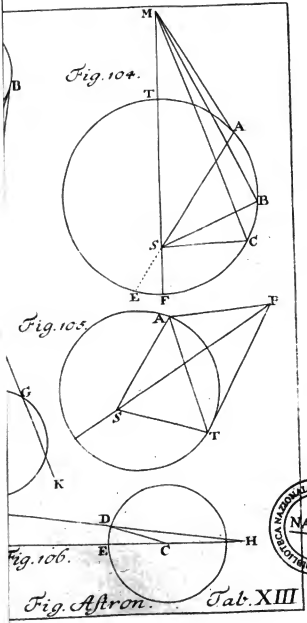


Fig. Astron. Tab. XIII

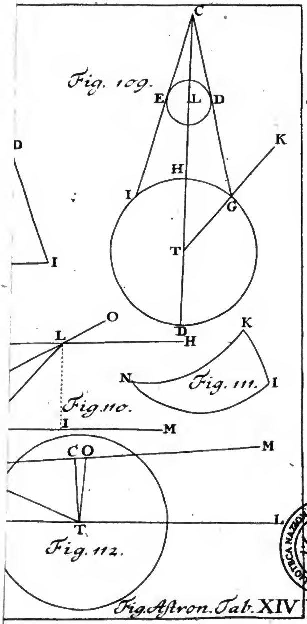


Fig. Astron. Tab. XIV

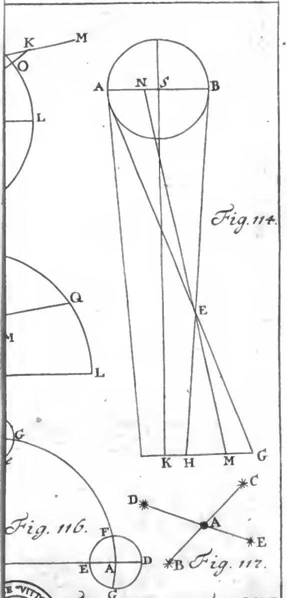


Fig: Astron: Tab: XV.